

# 基于双正交小波变换的矩不变量

刘 斌, 高 强

(湖北大学计算机与信息工程学院, 湖北武汉 430062)

**摘 要:** 寻找相对于尺度、平移、旋转不变的小波不变量是多尺度分析在模式识别中的关键问题. 矩是一种理论和应用上比较成熟的方法, 本文将矩与多尺度小波分解的近似系数联系起来, 利用空间基函数的双正交性推导得到了双正交小波矩不变量, 并用实验验证了结果的正确性. 同时以 Haar 小波为例对结论中的限制条件进行了理论分析和实验验证, 结果表明可以计算高于平滑阶数的小波矩, 且计算精度符合要求. 由此获得了比较完善的理论和实验结果, 最后指出了它在实际应用中所需注意的问题.

**关键词:** 模式识别; 多尺度分析; 双正交小波; 不变矩; 平滑性

**中图分类号:** TP391.41      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2017)04-0826-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.04.009

## Moment Invariants Based on Biorthogonal Wavelet Transform

LIU Bin, GAO Qiang

(School of Computer and Information Engineering, Hubei University, Wuhan, Hubei 430062, China)

**Abstract:** It's a key problem to find wavelet invariants to the transformation of scale, translation and rotation in pattern recognition using multi-resolution analysis. Moment invariant is a mature method on theory and applications. This paper links the moment invariants with the approximation coefficients of image wavelet decomposition. A novel biorthogonal wavelet moment invariant is derived from the biorthogonality of the spatial basis functions. The experimental results are also provided to confirm the correctness of the theoretical derivation. After that, the limiting condition of the conclusion is analyzed by taking Haar wavelet as an example. Both theoretical analysis and experimental verification show that the wavelet moments of higher order than smoothness can be calculated within required accuracy. And the complete theoretical and experimental results are obtained. Finally, some problems to be paid attention to in practical application are pointed out.

**Key words:** pattern recognition; multi-scale analysis; biorthogonal wavelets; invariant moment; smoothness

### 1 引言

在信号及图像处理中利用多尺度的金字塔算法<sup>[1]</sup>可进行多尺度地特征提取与识别, 但金字塔分解后各层数据间存在冗余, 而多尺度的小波分解算法可使各层系数相对独立<sup>[2]</sup>. 由小波及其多分辨率分析理论<sup>[3-5]</sup>可知, 图像可分解为随尺度分辨率逐级改变的近似信息和细节信息, 它们分别体现了图像的整体轮廓和精细结构, 由此理论上可大尺度上分析图像然后逐层细化进行识别, 即多尺度识别. 而多尺度识别的关键在于找到待识别模式在有限个尺度下相对于平移、尺度、旋转变化的不变量, 这是不变矩所具备的特性, 可利用不变矩理论表征这种不变量.

不变矩是比较成熟的理论和方法, Hu 首次给出了七个具有平移、旋转和尺度不变性的不变矩<sup>[6]</sup>, 可从图

像中提取不变矩作为特征向量进行目标的识别和匹配<sup>[7]</sup>. 矩的计算量大且高阶矩易受噪声影响, 这是矩的全局处理造成的, 为减小计算量人们也提出了一些改善的方法<sup>[8,9]</sup>. 图像信息具有局部相关性, 利用局部化分析工具小波将反映全局信息的矩方法也分层局部化, 这样能够结合小波与不变矩的各自特性构造新的不变量进行更有效地特征提取与识别. 在这种指导思想下, Shen 提出了一种小波矩将矩中核函数用小波函数来代替以期融合小波与矩的优点<sup>[10]</sup>; 金琪将小波与矩结合阐明了一维及二维张量积的小波矩不变量<sup>[11]</sup>, 两者是对小波与矩结合的不同尝试.

从文献[11]的理论推导过程可知, 其结论是基于正交 Daubechies 小波框架, 相应的滤波器可表示为三角多项式的形式, 而很多小波滤波器无法表示成这种形式<sup>[12]</sup>, 这样的理论推导结果在实际应用中具有很大的

局限性. 本文提出另一种更简洁明了的证明思路, 此证明过程只需利用空间基函数的双正交性, 由此得出不仅是 Daubechies 小波, 只要是正交小波甚至双正交小波都有相应的结论成立. 另外还对推导结果中的限制条件进行了理论分析, 分析的结论表明可以不受限制地计算大于小波平滑阶数的矩不变量, 而其计算误差仍在正常范围内, 且信号数据越长矩值的计算精度越高, 这对于实际应用具有重要意义.

## 2 小波变换及其滤波器平滑性

假设  $f(x) \in L^2(R)$ , 则将积分变换  $W_f(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx$  称为函数  $f(x)$  的小波变换.

$\psi(x)$  称为小波函数, 其作伸缩平移可得空间  $W_j = \text{span}\{\psi_{j,k}(x) \mid \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), j, k \in Z\}$ . 小波变换存在尺度函数  $\varphi(x)$ , 它可生成多分辨率逼近序列  $V_j = \text{span}\{\varphi_{j,k}(x) \mid \varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)\}$ , 且

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \varphi(2x - n) \quad (1)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g_n \varphi(2x - n) \quad (2)$$

式(1)、(2)称为双尺度方程, 同时  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ . 对式(1)两边分别做 Fourier 变换有

$$\hat{\varphi}(2\omega) = \mathbf{H}(\omega) \hat{\varphi}(\omega) \quad (3)$$

其中  $\mathbf{H}(\omega) = 2^{-1/2} \sum_n h_n e^{-i\omega n}$ , 式(3)无穷迭代得

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbf{H}\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad (4)$$

由此可知  $\mathbf{H}(\omega)$  决定了相应的多分辨率分析, 而小波的构造则可以转化为  $\mathbf{H}(\omega)$  的构造. 实际滤波器设计中对  $\mathbf{H}(\omega)$  有平滑性要求, 假设  $\mathbf{H}(\omega) \in C^m(R)$ , 即在零点有  $m$  次平滑性, 由式(4)得  $\hat{\varphi}(\omega) \in C^m(R)$ , 又由文献[13]可得  $|\varphi(x)| \leq K(1 + |x|)^{-\alpha}$ , 而由  $\hat{\varphi}(\omega)$  的 Fourier 逆变换显然可得  $\varphi(x) \in C^m(R)$ . 由式(2)可知  $\psi(x)$  可由  $\varphi(x)$  的线性组合来表示, 两者具有相同的光滑性<sup>[14]</sup>, 则  $\psi(x) \in C^m(R)$ . 同样根据  $\psi(x)$  的 Fourier 变换可得  $\hat{\psi}(\omega) \in C^m(R)$ , 于是由文献[13]得  $|\psi(x)| \leq K(1 + |x|)^{-\alpha}$ . 综上所述, 可得引理 1.

**引理 1** 在设计滤波器  $\mathbf{H}(\omega)$  时, 使其在零点有  $m$  ( $m \in N$ ) 次平滑性, 则由其决定的尺度函数  $\varphi(x)$  和小波函数  $\psi(x)$  满足:

$$\varphi(x) \in C^m(R), |\varphi(x)| \leq K(1 + |x|)^{-\alpha}, K \text{ 为常数};$$

$$\psi(x) \in C^m(R), |\psi(x)| \leq K(1 + |x|)^{-\alpha}, \alpha > m + 1.$$

## 3 双正交小波分解及其消失矩

众所周知, 正交小波具有系数无关、能量守恒等良好性质, 尤其是紧支的 Daubechies 正交小波分解回算算法简单且表达信息充分无冗余. 但是除 Haar 小波以外

的所有紧支集的正交小波都不具备对称性<sup>[15]</sup>, 这一缺点使其在某些应用场合表现不佳. Cohen 和 Daubechies 放宽了正交性条件, 构造了正交性较弱的双正交小波<sup>[16]</sup>, 相应的滤波器具有对称性、较高消失矩、数据量小等优点, 是信号和图像处理理想数学工具. 双正交小波存在两组对偶的尺度函数和小波函数, 分别由  $\mathbf{H}(\omega)$  和  $\tilde{\mathbf{H}}(\omega)$  决定并满足:

$$\langle \varphi(x-s), \tilde{\varphi}(x-t) \rangle = \delta_{s,t}, \langle \psi(x-s), \tilde{\psi}(x-t) \rangle = \delta_{s,t}$$

相应的对偶多分辨率序列满足  $V_j \perp \tilde{W}_j, \tilde{V}_j \perp W_j$ .

**定理 1** 设  $f(x)$   $\tilde{f}(x)$  是  $R$  上不恒为常数的函数,  $f(x) \in C^m(R)$ , 且当  $l \leq m$  时,  $f(x)$  的  $l$  阶导数  $f^{(l)}(x)$  有界,  $\tilde{f}(x)$  衰减性满足  $\tilde{f}(x) \leq K(1 + |x|)^{-\alpha}, \alpha > m + 1$ . 又设  $f_{j,k}(x) = 2^{j/2} f(2^j x - k), \tilde{f}_{j,k'}(x) = 2^{j/2} \tilde{f}(2^j x - k')$ , 它们满足双正交关系<sup>[17]</sup>

$$\langle f_{j,k}, \tilde{f}_{j,k'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}, \forall j, j', k, k' \in Z$$

$$\text{则有 } \int x^l \tilde{f}(x) dx = 0, l = 1, 2, \dots, m.$$

**推论 1** 假设  $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$  和  $\tilde{\varphi}(x)$ 、 $\tilde{\psi}(x)$  分别由  $\mathbf{H}(\omega) \in C^m(R)$  和  $\tilde{\mathbf{H}}(\omega) \in C^n(R)$  决定的双正交尺度函数和小波函数, 由引理 1 可得  $\varphi(x) \in C^m(R)$ 、 $\psi(x) \in C^m(R)$  和  $|\tilde{\varphi}(x)| \leq K(1 + |x|)^{-\alpha}$ 、 $|\tilde{\psi}(x)| \leq K(1 + |x|)^{-\alpha}$ , 则由定理 1 可得

$$\int x^l \tilde{\varphi}(x) dx = 0, \int x^l \tilde{\psi}(x) dx = 0, l = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{而由小波分析理论有 } \int \tilde{\varphi}(x) dx = 1, \int \tilde{\psi}(x) dx = 0.$$

同理, 双正交小波对偶的尺度函数和小波函数满足

$$\int x^l \varphi(x) dx = 0, \int x^l \psi(x) dx = 0, l = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$\int \varphi(x) dx = 1, \int \psi(x) dx = 0.$$

正交情形下尺度函数  $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$ , 小波函数  $\psi(x) = \tilde{\psi}(x)$ , 利用定理 1 也有同样的推论成立.

对于任意  $f(x) \in L^2(R)$  作双正交小波分解时有两种分解方法, 这里仅列出一种. 分解式为  $f(x) = A_j + \sum_{l \geq j} D_l$ , 其中  $l = S - 1 + j, S$  为实际分解的尺度数, 以下仅给出一种分解形式

$$A_j = \sum_n a_n(j) \varphi_{j,n}(x), a_n(j) = \langle f(x), \tilde{\varphi}_{j,n}(x) \rangle;$$

$$D_l = \sum_n d_n(l) \psi_{l,n}(x), d_n(l) = \langle f(x), \tilde{\psi}_{l,n}(x) \rangle.$$

以上是一维的双正交小波分解, 而二维情形可由一维作张量积而成. 对于二元函数  $f(x, y) \in L^2(R^2)$ , 将其作二维张量积双正交小波分解可  $f(x, y) = A_j + \sum_{l \geq j} (D_l^1$

$$+ D_l^2 + D_l^3), l = S - 1 + j, S \text{ 为分解尺度数, 其中 } A_j = \sum_{m,n} a_{m,n}(j) \varphi_{j,m,n}(x, y),$$

$$a_{m,n}(j) = \langle f(x, y), \tilde{\varphi}_{j,m,n}(x, y) \rangle;$$

$$\begin{aligned}
 D_l^1 &= \sum_{m,n} d_{m,n}^1(l) \psi_{l,m,n}^1(x,y), \\
 d_{m,n}^1(l) &= \langle f(x,y), \tilde{\psi}_{l,m,n}^1(x,y) \rangle; \\
 D_l^2 &= \sum_{m,n} d_{m,n}^2(l) \psi_{l,m,n}^2(x,y), \\
 d_{m,n}^2(l) &= \langle f(x,y), \tilde{\psi}_{l,m,n}^2(x,y) \rangle; \\
 D_l^3 &= \sum_{m,n} d_{m,n}^3(l) \psi_{l,m,n}^3(x,y), \\
 d_{m,n}^3(l) &= \langle f(x,y), \tilde{\psi}_{l,m,n}^3(x,y) \rangle.
 \end{aligned}$$

#### 4 矩与双正交小波不变矩

一元函数  $f(x) \in L^2(R)$  的  $p$  阶矩的定义为

$$m_p = \int x^p f(x) dx, p=0,1,2,\dots$$

二维灰度图像  $f(x,y)$  的  $p+q$  阶几何矩<sup>[7]</sup> 的定义为

$$m_{pq} = \iint x^p y^q f(x,y) dx dy, p,q=0,1,2,\dots$$

把坐标原点移至  $f(x,y)$  的质心,再除以一个尺度因子可得中心化规格矩,而由中心化规格矩可以表示出七个具有平移、旋转、尺度不变性的 Hu 不变矩.

用双正交小波的尺度函数  $\varphi(x)$  和小波函数  $\psi(x)$  对  $f(x)$  进行分解,如果用对偶的尺度函数和小波函数进行分解也有同样的推导和结论成立,由  $f(x)$  的  $p$  阶矩

$$\begin{aligned}
 m_p &= \int x^p f(x) dx = \int x^p (A_j + \sum_{l \geq j} D_l) dx \\
 &= \int x^p (\sum_n a_n(j) \varphi_{j,n}(x) + \sum_{l \geq j} \sum_n d_n(l) \psi_{l,n}(x)) dx \\
 &= 2^{-j/2} * 2^{-pj} \sum_n a_n(j) \int (t+n)^p \varphi(t) dt + \\
 &\quad \sum_{l \geq j} 2^{-l/2} * 2^{-pl} \sum_n d_n(l) \int (t+n)^p \psi(t) dt \quad (6)
 \end{aligned}$$

对式(6)利用二项式定理展开,并利用推论1中式(5)的结果化简,可得定理2.

**定理2** 如果双正交小波对偶的共轭滤波器  $H(\omega)$  和  $\tilde{H}(\omega)$  在零点分别有  $m$  和  $n$  次平滑性,将信号函数  $f(x)$  按  $H(\omega)$  或  $\tilde{H}(\omega)$  构造的  $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$  或  $\tilde{\varphi}(x)$ 、 $\tilde{\psi}(x)$  上作分解展开,则以双正交小波变换的近似系数  $a_n(j)$  所表示的  $f(x)$  的  $p$  阶小波矩为

$$w_p = 2^{-j/2} * 2^{-pj} \sum_n n^p a_n(j) \quad (7)$$

对应于不同的分解方式,  $p=0,1,2,\dots,m(n)$ .

张量积情形下将图像的双正交小波分解式两边同

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \frac{w_p}{m_p} = \frac{2^{-j/2} * 2^{-pj} \sum_n n^p a_n(j)}{2^{-j/2} * 2^{-pj} [\sum_n a_n(j) \int (t+n)^p \varphi(t) dt + \sum_n d_n(j) \int (t+n)^p \psi(t) dt]} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{\sum_n a_n(j) (\frac{C_p^0}{p+1} + \frac{C_p^1}{p} n + \dots + \frac{C_p^{p-1}}{2} n^{p-1}) + \sum_n d_n(j) (\frac{C_p^0(1-2^p)}{2^p(p+1)} + \frac{C_p^1(1-2^{p-1})}{2^{p-1}p} n + \dots + \frac{C_p^{p-1}}{2^1 * 2} n^{p-1})}{\sum_n n^p a_n(j)}}
 \end{aligned}$$

时乘以  $x^p y^q$  并对  $x,y$  进行积分和二项式定理展开,利用推论1的结果进行化简可得到推论2.

**推论2** 如果双正交小波的对偶共轭滤波器  $H(\omega)$  和  $\tilde{H}(\omega)$  在零点分别有  $m$  和  $n$  次平滑性,将图像函数  $f(x,y)$  在按  $H(\omega)$  或  $\tilde{H}(\omega)$  构造的双正交的二维张量积小波上作分解展开,则以小波近似系数  $a_{m,n}(j)$  所表示的  $f(x,y)$  的  $p+q$  阶小波矩为

$$w_{pq} = 2^{-(p+q+1)j} \sum_{m,n \in Z} m^p n^q a_{m,n}(j) \quad (8)$$

对应于不同的分解方式,  $p,q=0,1,2,\dots,m(n)$ .

如果双正交小波滤波器  $H(\omega)$  和  $\tilde{H}(\omega)$  在零点分别有  $m$  和  $n$  次平滑性,那么将图像  $f(x,y)$  在任一对偶的尺度函数和小波函数上作张量积小波分解后,其任一层  $j$  的近似系数理论上可以独立无误差地表示阶次不大于其平滑阶数的矩值. 式(8)中不出现细节系数,表明图像作了张量积小波分解后,它的有限个视觉不变量将保留在任一层的近似中而与细节无关,即得到了基于近似系数的小波不变量. 这种基于近似系数的小波不变量,通过作类似 Hu 不变矩的组合,就可得到基于近似系数的小波不变矩.

实际应用中,需要注意逼近层  $j$  和平滑性阶数  $m$  或  $n$  的值. 理论上说增大逼近层  $j$  和平滑阶数能够以较小的计算代价获得更多的不变量信息,但实际它将受到物体大小和 Gibbs 效应的影响<sup>[18]</sup>, 为保证计算精度逼近层  $j$  应满足  $j \ll \log_2 L$ ,  $L$  为信号长度或图像尺寸. 另一方面,小波分解过程中的卷积会造成破坏边界的 Gibbs 效应而影响矩不变量的计算精度,为减少 Gibbs 效应的影响,平滑阶数值也不能过大.

#### 5 关于小波平滑性的讨论

由式(7)和(8)知理论上  $w_p$  矩值阶数需满足  $p=0,1,2,\dots,m(p=0,1,2,\dots,n)$ . 但通过理论和实验发现,可以计算  $p > m(p > n)$  的值且精度在可接受的范围内. 本文以最简单的正交 Haar 小波(平滑性小于1)为例,对大于平滑阶数的高阶矩值的计算误差进行理论分析. 利用 Haar 小波对一维信号分解  $f(x)$  的  $p$  阶矩,为便于分析这里只作一次小波分解,此时有  $l=j$ . 假设  $\varepsilon$  为  $w_p$  与  $m_p$  的比值,  $m_p$  由式(6)定义,  $w_p$  由式(7)定义,则

$$\begin{aligned}
 &< \frac{1}{1 + \frac{\sum_n a_n(j) \frac{C_p^0}{2^p(p+1)}}{\sum_n a_n(j) l^p} + \frac{\sum_n a_n(j) \frac{C_p^1}{2^{p-1}p} n}{\sum_n a_n(j) n l^{p-1}} + \dots + \frac{\sum_n a_n(j) \frac{C_p^{p-1}}{2^1 * 2^{p-1}} n^{p-1}}{\sum_n a_n(j) n^{p-1} l}} = \frac{1}{1 + O(\frac{1}{l})}
 \end{aligned}$$

对于  $\varepsilon = \frac{w_p}{m_p} = \frac{1}{1 + O(\frac{1}{l})}$ , 当  $l \rightarrow \infty$  时, 有  $\varepsilon \rightarrow 1$ .

实际情况中,  $l$  代表了分解系数的长度, 而分解系数的长度显然与原信号的长度  $L$  有关. 故对于一维信号而言, 原信号越长则  $\varepsilon = \frac{w_p}{m_p}$  越趋近于 1, 即信号越长按式(7)计算得到矩值越精确.

### 6 实验与结果分析

本文在 Matlab8.0 平台上利用其自带的 leleccum 信号的前 1024 个数据点作为实验信号(图 1)对上述理论结果进行验证. 采用 Bior1.5 双正交小波滤波器对上述信号进行分解, 分解后按式(7)计算小波矩不变量, 结果列于下表 1.

理论上说基于各分解层的小波近似系数计算得到的各阶矩值应保持不变, 但由于 Gibbs 效应的影响, 实际的计算数值存在一定误差, 且误差值随着矩阶数

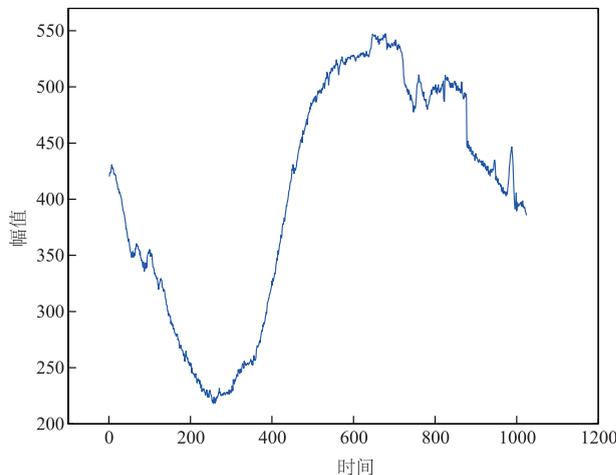


图1 一维leleccum信号示意图(前1024个数据点)

和分解层数增大而增大, 表 1 的实验结果很好地反映了本文理论推导及其分析的结论.

表 1 基于分解近似系数的信号矩值及其误差值

逼近层/误差值	逼近层尺寸	$m_0 (\times 10^5)$	$m_1 (\times 10^8)$	$m_2 (\times 10^{11})$	$m_3 (\times 10^{14})$	$m_4 (\times 10^{17})$	$m_5 (\times 10^{19})$
第零层(原信号)	1024	4.13729	2.31878	1.63704	1.26360	1.02867	8.69030
第一层(矩值)	512	4.13729	2.32084	1.63936	1.26606	1.03120	8.71602
误差值(%)		0.00000	0.08921	0.14164	0.19433	0.24568	0.29592
第二层(矩值)	256	4.13729	2.32498	1.64400	1.27098	1.03626	8.76757
误差值(%)		-0.00010	0.26757	0.42509	0.58341	0.73783	0.88904
第三层(矩值)	128	4.13871	2.33396	1.65560	1.28388	1.04965	8.90303
误差值(%)		0.03426	0.65465	1.13398	1.60392	2.03975	2.44783
第四层(矩值)	64	4.13593	2.34923	1.66979	1.29779	1.06384	9.05006
误差值(%)		-0.03300	1.31330	2.00057	2.70484	3.41848	4.13978
第五层(矩值)	32	4.13561	2.38243	1.70750	1.33799	1.10549	9.47687
误差值(%)		0.04067	2.74521	4.30422	5.88630	7.46806	9.05112

表 2 长信号分解近似系数的信号矩值及其误差值

逼近层/误差值	逼近层尺寸	$m_0 (\times 10^5)$	$m_1 (\times 10^8)$	$m_2 (\times 10^{11})$	$m_3 (\times 10^{14})$	$m_4 (\times 10^{17})$	$m_5 (\times 10^{19})$
第零层(原信号)	1024	4.13729	2.31878	1.63704	1.26361	1.02867	8.69030
第一层(矩值)	512	4.13729	2.32085	1.63936	1.26607	1.03120	8.71603
误差值(%)		0.00000	0.08923	0.14167	0.19439	0.24578	0.29607
第二层(矩值)	256	4.13729	2.32498	1.64400	1.27098	1.03627	8.76763
误差值(%)		0.00000	0.26757	0.42523	0.58373	0.73838	0.88983
第三层(矩值)	128	4.13729	2.33326	1.65533	1.28086	1.04645	8.87148
误差值(%)		0.00000	0.65466	0.99360	1.36523	1.72849	2.08474
第四层(矩值)	64	4.13729	2.34981	1.67197	1.30071	1.06697	9.08107
误差值(%)		0.00000	1.33835	2.13338	2.93591	3.72283	4.49658
第五层(矩值)	32	4.13729	2.38293	1.70952	1.34083	1.10863	9.50848
误差值(%)		0.00000	2.76667	4.42745	6.11139	7.77298	9.41479

表 3 短信号分解近似系数的信号矩值及其误差值

逼近层/误差值	逼近层尺寸	$m_0 (\times 10^5)$	$m_1 (\times 10^8)$	$m_2 (\times 10^{11})$	$m_3 (\times 10^{14})$	$m_4 (\times 10^{17})$	$m_5 (\times 10^{19})$
第零层(原信号)	512	1.64323	4.31423	1.56669	6.36826	2.73237	1.20986
第一层(矩值)	256	1.64323	4.32245	1.57100	6.39174	2.74509	1.21668
误差值(%)		0.00000	0.19045	0.27515	0.36860	0.46556	0.56391
第二层(矩值)	128	1.64323	4.33887	1.57962	6.43873	2.77057	1.23036
误差值(%)		0.00000	0.57118	0.82581	1.10657	1.39827	1.69457
第三层(矩值)	64	1.64323	4.37172	1.59692	6.53303	2.82179	1.25791
误差值(%)		0.00000	1.33244	1.92953	2.58731	3.27279	3.97109
第四层(矩值)	32	1.64323	4.43734	1.63161	6.72251	2.92502	1.31361
误差值(%)		0.00000	2.85348	4.14373	5.56274	7.05060	8.57516
第五层(矩值)	16	1.64323	4.56864	1.70150	7.10505	3.13440	1.42727
误差值(%)		0.00000	5.89704	8.60490	11.5670	14.7136	17.9693

注:表中数量级只对矩值数据有效,不包括误差值,同时误差值都是相对第零层的误差。

对于第 5 节中的结论,采用 Haar 小波滤波器分别对上述信号及其前半段信号进行分解,按式(7)计算小波矩不变量,结果列于表 2 和表 3。由于 Haar 小波平滑性  $m < 1$ ,理论上只能计算  $p = 0$  的值,而从表 2 和表 3 数据可知,用 Haar 小波分别对长度不同的一维信号进行分解计算大于平滑阶数的高阶矩值 ( $p \geq 1, p \in N$ ) 的相对误差都在可接受的范围内,且同样满足阶数越低分解层越少其相对误差也越小。另外从两表的误差数据对比可知,长信号的计算误差比短信号(长度减半信号)的相对误差要小约 50%,这与理论分析得出的信号越长矩值计算越精确的结论相符合,故在实际应用中我们完全可以用低平滑性的小波对信号或图像进行分解计算大于平滑阶数的高阶小波矩用于模式识别等领域。

## 7 结束语

本文从理论上推导得到了基于双正交小波变换的矩不变量,并指出它在应用中需要注意的地方,同时对结论的限制条件进行了分析,得出了具有实际意义的结论。多尺度分析是减少不必要的细节在大尺度范围内进行识别,而不变矩方法则要求尽可能保留细节特征,两种方法间存在一种矛盾性和互补性。通常在模式识别中,需从总体轮廓上把握物体的特征,这样将具有抗噪性和抗干扰性<sup>[19]</sup>,而保留物体的细节特征有助于区分形近物体但却导致对噪声和干扰的敏感。实际应用中两种方法的结合很必要,最合理的妥协就是每个物体在其合适的层次得到识别。

## 参考文献

[1] 李骏扬,金立左,费树岷. 基于多尺度特征表示的城市道路检测[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(11): 2578

- 2585.

Li Junyang, Jin Lizuo, Fei Shumin. Urban road detection based on multi-scale feature representation[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2014, 36(11): 2578 - 2585. (in Chinese)

- [2] Quillec G, Lamard M, Cazuguel G. Fast wavelet-based image characterization for highly adaptive image retrieval[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(4): 1613 - 1623.
- [3] Masloval I, Ticalvilca A M, McKee M. Adjusting wavelet-based multiresolution analysis boundary conditions for long-term streamflow forecasting[J]. Hydrological Processes, 2016, 30(1): 57 - 74.
- [4] Currey B, Führ H, Taylor K. Continuous wavelet transform on local fields[J]. Bol Soc Parana Mat, 2016, 34(2): 113 - 121.
- [5] Wei Deyun, Li Yuanmin. Generalized wavelet transform based on the convolution operator in the linear canonical transform domain[J]. Optik-International Journal for Light and Electron Optics, 2014, 125(16): 4491 - 4496.
- [6] Xiao Bin, Cui Jiangtao, Qin Hongxing, Li WeiSheng, Wang Guoyin. Moments and moment invariants in the Radon space[J]. Pattern Recognition, 2015, 48(9): 2772 - 2784.
- [7] Prashan Premaratne, Malin Premaratne. Image matching using moment invariants[J]. Neurocomputing, 2014, 137: 65 - 70.
- [8] 谢生龙,王夏黎,董春雨. 基于不变矩理论线矩法图像特征的提取[J]. 计算机技术与发展, 2014, 24(11): 139 - 143.
- Xie Shenglong, Wang Xiali, Dong Chunyu. Extraction of figure features based on line moment method of moment invariant theory[J]. Computer Technology and Development, 2014, 24(11): 139 - 143. (in Chinese)

- [9] 潘泉,程咏梅,杜亚娟. 离散不变矩算法及其在目标识别中的应用[J]. 电子与信息学报,2001,23(1):30-36.  
Pan Quan, Cheng Yongmei, Du Yajuan. Discrete moment invariant algorithm and its application on target recognition [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2001,23(1):30-36. (in Chinese)
- [10] Shen Dinggang, Horace H S. Discriminative wavelet shape descriptors for recognition of 2-D patterns [J]. Pattern Recognition,1999,32(2):151-165.
- [11] 金琪,戴汝为. 基于矩表示的小波不变量[J]. 模式识别与人工智能,1995,8(3):179-187.  
Jin Qi, Dai Ruwei. Wavelet invariants based on moment presentation [J]. PR & AI, 1995,8(3):179-187. (in Chinese)
- [12] Dem'yanovich Y K, Vager B G. Spline-wavelet decomposition on an interval [J]. Journal of Mathematical Sciences,2015,207(5):736-752.
- [13] 徐长发,李国宽. 实用小波方法(第三版)[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2009. 114-115.  
Xu Changfa, Li Guokuan. Practical Wavelet Method (Third Edition) [M]. Wuhan: The Huazhong University of Science & Technology Press,2009. 114-115. (in Chinese)
- [14] Butzer P L, Fischer A, Ruckfirth K. Scaling functions and wavelets with vanishing moments [J]. Computers Math, 1994,27(3):33-39.
- [15] Daubechies I. Ten Lecture on Wavelets [M]. Vermont: Capital City Press,1992. 299-300.
- [16] Cohen A, Daubechies I, Fcauvcau J C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets [J]. Commun Pure Appl Math,1992,45(5):485-560.
- [17] 成礼智,王红霞,罗永. 小波的理论及应用[M]. 北京:科学出版社,2004. 100-102.  
Cheng Lizhi, Wang Hongxia, Luo Yong. The Theory and Application of Wavelet [M]. Beijing: Science Press, 2004. 100-102. (in Chinese)
- [18] Li Yuanmin, Wei Deyun. On the Gibbs phenomenon for linear canonical series expansion [J]. Optik-International Journal for Light and Electron Optics, 2015, 126 (23): 3605-3612.
- [19] 丁晓青. 汉字识别研究的回顾[J]. 电子学报,2002,30(9):1364-1368.  
Ding Xiaoqing. Chinese character recognition: a review [J]. Acta Electronica Sinica, 2002,30(9):1364-1368. (in Chinese)

#### 作者简介



刘 斌 男,1963年生,湖北红安人,教授、博士生导师,主要从事模式识别、图像处理及小波分析的研究。



高 强(通信作者) 男,1988年生,湖北鄂州人,硕士生,主要从事图像处理与模式识别的研究。

E-mail: shengqiang8814@qq.com