L^* 系统中公式的语构程度化方法

罗敏霞，姚 宁
（中国计量学院应用数学系，浙江杭州 310018）

摘 要： 本文从语构角度出发，给出 L^* 系统中公式的语构真度的概念，讨论其相关的一系列性质，并进一步研究 L^* 系统中由语构真度诱导的公式间的相似度及伪度量，证明由语构真度诱导的伪度量空间中运算的连续性，从而为在 L^* 系统中基于语构理论展开近似推理提供可能的框架.

关键词： L^* 系统；语构真度；相似度；伪度量；伪度量空间
中图分类号： O141.1 **文献标识码：** A **文章编号：** 0372-2112 (2011) 02-0424-05

Syntactic Graded Method of Formulas in the System L^*

LUO Min-xia, YAO Ning
(*Department of Applied Mathematics, China Jiliang University, Hangzhou, Zhejiang 310018, China*)

Abstract: In terms of syntax, the concept of the syntactical truth degree of formulas in the system L^* is given in this paper. Then a series of the corresponding properties of the syntactical truth degree of formulas are discussed. Moreover, the similarity degree and pseudo-metric between formulas induced by syntactical truth degree are investigated. In addition, the continuity of the operations in the pseudo-metric space is proved. So then we can provide a possible framework for developing approximate reasoning based on the theory of syntax in the system L^*.

Key words: the system L^*; syntactical truth degree; similarity degree; pseudo-metric; the pseudo-metric space

1 引言

为克服传统数理逻辑的不足从而解决当前人工智能和计算机科学中出现的新问题，人们纷纷转向非经典数理逻辑（如多值逻辑、模糊逻辑、模态逻辑等）的研究. 如：1995 年 Höhle 在文献[1]中基于一类剩余格提出了 ML（Monoidal Logic）逻辑；1998 年 Hájek 在文献[2]中基于连续三角范数和它们的剩余提出了基本模糊逻辑 BL（Basic Fuzzy Logic），同时研究了 BL 的三个重要扩张：Łukasiewicz 逻辑、Gödel 逻辑和乘积逻辑；2001 年 Esteva 和 Godo 在文献[3]中基于左连续三角范数和它们的剩余提出了 MTL（Monoidal T-norm based Logic）逻辑，并讨论了 MTM 的一些扩张：WNM（Weak Nilpotent Minimum）逻辑、IMTL（Involutive Monoidal T-norm based Logic）逻辑和 NM（Nilpotent Minimum）逻辑；1997 年王国俊教授在文献[4]中基于 R_0 蕴涵算子提出了模糊命题演算的一种新的形式化演绎系统 L^*；2003 年裴道武教授在文献[5]中证明了 NM 逻辑系统和 L^* 系统等价，IMTL 逻辑系统和 L_0^* 系统等价等等.

以上提到的各种逻辑大部分都只注重形式推理而不注重数值计算[9]. 1952 年，文献[6]首次将“真值”指派的思想应用于逻辑中，对公式进行程度化研究. 1979 年 Pavelka 在他的一系列文章（见文献[7]）中利用这种思想对所有的概念进行了程度化研究. 之后，对于逻辑公式的程度化研究已成为一项重要的研究课题. 文献[8]利用均匀概率空间的无穷乘积测度在二值命题逻辑中提出了计算公式真度的方法. 文献[9]利用积分方法对 n 值及连续值模糊逻辑中的公式进行程度化研究，并建立了计量逻辑学理论，等等. 逻辑系统分为语构和语义两大部分，前面提到的公式程度化方法都是基于语义研究的，是否可从语构角度出发研究公式的程度化？最近，文献[10]在二值命题逻辑系统中提出了公式的语构真度概念，借助文献[10]的研究方法，文献[11]对 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统进行了语构程度化研究. 在此基础上，本文针对 L^* 系统进行了语构程度化的研究，提出 L^* 中公式的语构真度概念，并研究 L^* 中由语构真度诱导的相似度与伪度量，证明在由语构真度诱导的伪度量空间中非运算“$\neg$”、并运算“$\vee$”、交运算“$\wedge$”和蕴涵运算“$\rightarrow$”都是连续的.

2 预备知识

设 $S=\{p_1, p_2, \cdots\}$ 是可数集，$\neg$ 是一元运算，$\vee$ 与 $\rightarrow$ 是二元运算，由 S 生成的 $\{\neg, \vee, \rightarrow\}$ 型自由代数记

收稿日期：2009-12-23；修回日期：2010-03-23
基金项目：国家自然科学基金（No.90818020）

作 $F(S)$. $F(S)$中的元素称为命题或公式,S 中的元素称为原子命题或原子公式.

定义 2.1[12] R_0 型命题逻辑系统记为 L^*,其公理如下:

(L^*1) $A\to(B\to A)$

(L^*2) $(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$

(L^*3) $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$

(L^*4) $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$

(L^*5) $A\to\neg\neg A$

(L^*6) $A\to A\vee B$

(L^*7) $A\vee B\to B\vee A$

(L^*8) $(A\to C)\wedge(B\to C)\to(A\vee B\to C)$

(L^*9) $(A\wedge B\to C)\to(A\to C)\vee(B\to C)$

(L^*10) $(A\to B\vee((A\to B)\to\neg A\vee B)$

其中 $A\wedge B$ 为$\neg(\neg A\vee\neg B)$的简写.

L^* 中的推理规则为 MP 规则和交推理规则,即由 A 与 $A\to B$ 推得 B;由 $A\to B$ 与 $A\to C$ 可推得 $A\to B\wedge C$.

定义 2.2[13] 设 $v:F(S)\to[0,1]$是映射,这里$[0,1]$是 R_0 单位区间,若 v 是$(\neg,\vee,\to)$型同态,即

$v(\neg A)=\neg v(A)=1-v(A)$,

$v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)=\max\{v(A),v(B\}$,

$v(A\to B=v(A)\to v(B=R_0(v(A),v(B))$,

则称 v 为$F(S)$在 R_0 单位区间$[0,1]$中的赋值,简称 v 为赋值. $F(S)$的全体赋值之集记作 $\bar{\Omega}$.

定义 2.3[9] 设 $A=A(p_1,\cdots,p_m)$是 $F(S)$中含有 m 个原子公式 $p_1,\cdots,p_m$ 的公式,$\bar{A}(x_1,\cdots,x_m)$是 A 所诱导的函数,令

$$\tau_\infty(A)=\int_{[0,1]^m}\bar{A}(x_1,\cdots,x_m)\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_m$$

称 $\tau_\infty(A)$为公式 A 的积分真度.

定义 2.4[14] 设 X 是一个集合,ρ 是定义在 $X\times X$ 上的一个非负实值函数,并且满足下列条件,对任意的 x,y 和 $z\in X$,

(1)$\rho(x,y)\geqslant 0$;

(2)当 $x=y$ 时$\rho(x,y)=0$;

(3)$\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(4)$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$.

则称 ρ 为伪度量,(X,ρ)为伪度量空间.若将条件(2)换成 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$ 时,则称 ρ 为度量,(X,ρ)为度量空间.

定义 2.5[14] 设 $X=(X,\rho)$, $Y=(Y,\tilde{\rho})$是两个度量空间,T 是 X 到 Y 中的映射,$x_0\in X$,如果对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\rho(x,x_0)<\delta(x\in X)$时,$\tilde{\rho}(Tx,Tx_0)<\varepsilon$,则称 T 在 x_0 连续.等价地,$\forall\{x_n\}\subset X$,$\rho(x_n,x_0)$趋于 $0(n\to\infty)$可推出$\tilde{\rho}(Tx_n,Tx_0)$趋于 $0(n\to\infty)$.如果映射 T 在 X 中的每一点处都连续,则称 T 在 X 上连续或称 T 是连续映射.(类似可给出伪度量空间中连续映射的定义.)

3 公式的语构真度

定义 3.1 设 $\tau^*:F(S)\to[0,1]$是映射,这里$[0,1]$是 R_0 单位区间,如果 τ^* 满足下列条件,对于任意的 $A,B\in F(S)$,

$(L^*\text{ i})$ $\tau^*(L^*j)=1$,这里 $L^*j(j=1,\cdots,10)$为 L^* 中的公理.

$(L^*\text{ ii})$ $\tau^*(\neg A)=1-\tau^*(A)$.

$(L^*\text{ iii})$ $\tau^*(A\vee B)+\tau^*(A\wedge B)=\tau^*(A)+\tau^*(B)$.

$(L^*\text{ iv})$ $\tau^*(B)\geqslant\tau^*(A)+\tau^*(A\to B)-1$.

则称 τ^* 为 L^* 中 $F(S)$的语构真度函数,简称为 L^* 中 $F(S)$的真度,特别地,称 $\tau^*(A)$为 L^* 中公式 A 的语构真度.

例(i) 设 v 是赋值,则容易验证 v 满足定义 3.1 中的条件,所以赋值 v 是$F(S)$的语构真度函数.

例(ii) 定义 2.3 中给出的 L^* 中公式的真度 τ_∞ 是 L^* 中 $F(S)$的语构真度函数.不难验证 τ_∞满足定义 3.1 中的条件(见文[9]).

命题 3.1 设 $A\in F(S)$.

(1)若$\vdash A$,则 $\tau^*(A)=1$.

(2)若 A 是可驳公式,即$\vdash\neg A$,则 $\tau^*(A)=0$.

命题 3.2 设 $A,B,C\in F(S)$,$\alpha,\beta\in[0,1]$.

(1)若$\tau^*(A)\geqslant\alpha$,$\tau^*(A\to B)\geqslant\beta$,则 $\tau^*(B)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(2)若$\tau^*(A\to B)\geqslant\alpha$,$\tau^*(B\to C)\geqslant\beta$,则 $\tau^*(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(3)若$\tau^*(A\to B\geqslant\alpha$,$\tau^*(A\to C)\geqslant\beta$,则 $\tau^*(A\to B\wedge C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

特别地,当 $\alpha=\beta=1$ 时,(1)、(2)、(3)分别称为 L^* 中公式的关于语构真度的 MP 规则、HS 规则和交推理规则,简记为 τ^*-MP 规则、τ^*-HS 规则和 τ^*-交推理规则.

命题 3.3 设 $A,B\in F(S)$.

(1)若 $\tau^*(A\to B)=1$,则 $\tau^*(A)\leqslant\tau^*(B)$.

(2)若$\vdash A\to B$ 则$\tau^*(A)\leqslant\tau^*(B)$.

(3)若 $A\sim B$ 则$\tau^*(A)=\tau^*(B)$.

其中,$A\sim B$ 表示 A 与 B 可证等价,即$\vdash A\to B$ 且$\vdash B\to A$.

证明 由$(L^*\ iw)$可得(1);由命题 3.1 和(1)可得(2).下证(3).由已知条件 $A\sim B$ 即$\vdash A\to B$ 且$\vdash B\to A$,结合(2)可得 $\tau^*(A)\leqslant\tau^*(B)$,$\tau^*(B)\leqslant\tau^*(A)$,所以,$\tau^*(A)=\tau^*(B)$.

命题 3.4 设 $A,B\in F(S)$.则 $\tau^*(A\wedge B)\leqslant\tau^*(A)\wedge\tau^*(B)\leqslant\tau^*(A)\vee\tau^*(B)\leqslant\tau^*(A\vee B)$.

命题 3.5 若 A 或 B 定理,则

$$\tau^*(A)+\tau^*(A\to B)=\tau^*(B)+\tau^*(B\to A).$$

证明 不妨假设 A 为定理,由(L^*1)得:

$$\vdash B(A\to B),\ \vdash A\to(B\to A),$$

由命题 3.1 可得:

$$\tau^*(A)=1,\tau^*(B\to(A\to B))$$
$$=\tau^*(A\to(B\to A))=1,$$

再由命题 3.3(1)可得,

$$\tau^*(B)\leqslant\tau^*(A\to B),\tau^*(A)\leqslant\tau^*(B\to A).$$

由(L^* ⅳ)可得:

$$\tau^*(B)\geqslant\tau^*(A\to B).$$

则

$$\tau^*(A\to B)=\tau^*(B),\tau^*(B\to A)=\tau^*(A)=1,$$

从而,

$$\tau^*(A)+\tau^*(A\to B)=\tau^*(B)+\tau^*(B\to A).$$

注:等式 $\tau^*(A)+\tau^*(A\to B)=\tau^*(B)+\tau^*(B\to A)$ 对于 L^* 中任意公式未必成立.例如,取 $A,B\in F(S)$ 以及赋值 $v\in\bar{\Omega}$, $v(A)=\frac{1}{2}$, $v(B)=\frac{1}{3}$, $v(A)+v(A\to B)=v(A)+v(A)\to v(B)=\frac{1}{2}+(1-\frac{1}{2})\vee\frac{1}{3}=1$, $v(B)+v(B\to A)=v(B)+v(B\to v(A))=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$,显然 $v(A)+v(A\to B)\neq v(B)+v(B\to A)$.

4 语构真度诱导的公式间的相似度与伪度量

定义 4.1 设 $A,B\in F(S)$,令 $\xi_{\tau^*}(A,B)=\tau^*((A\to B\wedge(B\to A))$,称 $\xi_{\tau^*}(A,B)$ 为 A 与 B 间由语构真度诱导的相似度.当 $\xi_{\tau^*}(A,B)=1$ 时,称 A 与 B 相似.

显然,$\xi_{\tau^*}(A,B)=\xi_{\tau^*}(B\to A)$(对称性),并且可证等价公式 A 与 B 间由语构真度诱导的相似度等于 1,即若 $A\sim B$ 则 $\xi_{\tau^*}(A,B)=1$.

命题 4.1 设 $A,B,C\in F(S)$,则

$$\xi_{\tau^*}(A,B)+\xi_{\tau^*}(B,C)-\xi_{\tau^*}(A,C)\leqslant 1.$$

证明 由于 L^* 中 $\vdash(A\to B)\vee(B\to A)$,再结合($L^*$ ⅲ)及命题 3.1 可得:

$$\tau^*((A\to B)\wedge(B\to A))=\tau^*(A\to B)+\tau^*(B\to A)-1,$$

类似地,

$$\tau^*((B\to C)\wedge(C\to B)=\tau^*(B\to C)+\tau^*(C\to B)-1,$$
$$\tau^*((A\to C)\wedge(C\to A))=\tau^*(A\to C)+\tau^*(C\to A)-1.$$

由命题 3.2 可知:

$$\tau^*(A\to C)\geqslant\tau^*(A\to B)+\tau^*(B\to C)-1,$$
$$\tau^*(C\to A)\geqslant\tau^*(C\to B)+\tau^*(B\to A)-1,$$

则

$$\tau^*((A\to C)\wedge(C\to A))\geqslant\tau^*((A\to B)\wedge(B\to A))$$
$$+\tau^*((B\to C)\wedge(C\to B)-1,$$

故 $\xi_{\tau^*}(A,B)+\xi_{\tau^*}(B,C)-\xi_{\tau^*}(A,C)\leqslant 1.$

定义 4.2 设 $A,B\in F(S)$, $\rho_{\tau^*}: F(S)\times F(S)\to[0,1]$,定义 $\rho_{\tau^*}(A,B)=1-\xi_{\tau^*}(A,B)$,则 ρ_{τ^*} 是 $F(S)$ 上的伪度量,称($F(S),\rho_{\tau^*}$)为伪度量空间.

事实上,$\forall A,B,C\in F(S)$,由命题 4.1 得:

$$\rho_{\tau^*}(A,B)+\rho_{\tau^*}(B,C)\geqslant\rho_{\tau^*}(A,C),$$

其次,由定义 4.2 和 ξ_{τ^*} 的对称性知,$\rho_{\tau^*}(A,B)\geqslant 0$ 且 $\rho_{\tau^*}(A,B)=\rho_{\tau^*}(B,A)$.又由定义 4.1,$\rho_{\tau^*}(A,A)=1-\xi_{\tau^*}(A,A)=0$,所以 ρ_{τ^*} 是 $F(S)$ 上的伪度量.

命题 4.2 设 $A,B\in F(S)$.

(1)若 $A\sim B$ 则 $\rho_{\tau^*}(A,B)=0$.

(2)$\rho_{\tau^*}(A,\bar{0})=\tau^*(A)$,$\bar{0}$为一特定公式.

证明 (1)显然,只证(2).由于 L^* 中 $\vdash\bar{0}\to A$,且 $\vdash(A\to\bar{0})\vee(\bar{0}\to A)$,利用($L^*$ ⅲ)及命题 3.1 得

$$\rho_{\tau^*}(A,\bar{0})=1-\xi_{\tau^*}(A,\bar{0})$$
$$=1-\tau^*((A\to\bar{0})\wedge(\bar{0}\to A))$$
$$=1-\tau^*(A\to\bar{0})$$
$$=1-\tau^*(\neg A)$$
$$=\tau^*(A).$$

命题 4.3 设 $A,B\in F(S)$,则

$$\rho_{\tau^*}(\neg A,\neg B)=\rho_{\tau^*}(A,B).$$

证明 由于 L^* 中 $A\to B\sim\neg B\to\neg A$, $B\to A\sim\neg A\to\neg B$ 则

$$\rho_{\tau^*}(\neg A,\neg B)=1-\xi_{\tau^*}(\neg A,\neg B)$$
$$=1-\tau^*((\neg A\to\neg B\wedge(\neg B\to\neg A))$$
$$=1-\tau^*((B\to A)\wedge(A\to B))$$
$$=1-\xi_{\tau^*}(B,A)=1-\xi_{\tau^*}(A,B)$$
$$=\rho_{\tau^*}(A,B).$$

推论 4.1 设 $A,A_n\in F(S)(n=1,2,\cdots)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{\tau^*}(A_n,A)=0$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{\tau^*}(\neg A_n,\neg A)=0$.

推论 4.1 表明,非运算“$\neg$”在($F(S),\rho_{\tau^*}$)中连续.

定理 4.1 设 $A,B,C,D\in F(S)$,且

$$\rho_{\tau^*}(A,B)<\varepsilon,\rho_{\tau^*}(C,D)<\varepsilon,$$

则 $\rho_{\tau^*}(A\vee C,B\vee D)<2\varepsilon.$

证明 由 L^* 中,

$$\vdash(A\to B)\wedge(B\to A)\to(A\to B),$$
$$(A\to B)\wedge(B\to A)\sim(B\to A)\wedge(A\to B),$$
$$\vdash(A\to B)\to(C\vee A\to C\vee B),$$

再结合 L^* 中的 MP 规则和交推理规则可知,L^* 中

$$\vdash(A\to B)\wedge(B\to A)\to$$
$$((C\vee A\to C\vee B)\wedge(C\vee B)\to(C\vee A)).$$

于是,由命题 3.3(2)及定义 4.1 可知,$\xi_{\tau^*}(A,B)\leqslant\xi_{\tau^*}(C\vee A,C\vee B)$.又由于 L^* 中 $A\vee C\sim C\vee A$, $B\vee C\sim C\vee B$,则 $\xi_{\tau^*}(A,B)\leqslant\xi_{\tau^*}(A\vee C,B\vee C)$.类似地,有 $\xi_{\tau^*}(C,D)\leqslant\xi_{\tau^*}(B\vee C,B\vee D)$,结合命题 4.1 可知

$$\xi_{\tau^*}(A,B)+\xi_{\tau^*}(C,D)$$

$$\leqslant \xi_{\tau^*}(A \vee C, B \vee C) + \xi_{\tau^*}(B \vee C, B \vee D)$$
$$\leqslant 1 + \xi_{\tau^*}(A \vee C, B \vee D),$$

再由定义 4.2 得,

$$\rho_{\tau^*}(A \vee C, B \vee D)$$
$$\leqslant \rho_{\tau^*}(A, B) + \rho_{\tau^*}(C, D) < 2\varepsilon.$$

推论 4.2　设 $A, B, A_n, B_n \in F(S)(n = 1, 2, \cdots)$,则当 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{\tau^*}(A_n, A) = \lim\limits_{n\to\infty}\rho_{\tau^*}(B_n, B) = 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{\tau^*}(A_n \vee B_n, A \vee B) = 0$.

由于 $A \wedge B$ 简写为 $\neg(\neg A \vee \neg B)$,结合推论 4.1 和推论 4.2 容易得到下面的推论.

推论 4.3　设 $A, B, A_n, B_n \in F(S)(n = 1, 2, \cdots)$,则当 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{\tau^*}(A_n, A) = \lim\limits_{n\to\infty}\rho_{\tau^*}(B_n, B) = 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{\tau^*}(A_n \wedge B_n, A \wedge B) = 0$.

推论 4.2 和推论 4.3 分别表明“$\vee$”运算和“$\wedge$”运算在$(F(S), \rho_{\tau^*})$中连续.

定理 4.2　设 $A, B, C, D \in F(S)$,则

$$\rho_{\tau^*}(A \to B, C \to D) \leqslant \rho_{\tau^*}(A, C) + \rho_{\tau^*}(B, D).$$

证明　由于 L^* 中

$$\vdash (A \to C) \wedge (C \to A) \to (A \to C),$$
$$(A \to C) \wedge (C \to A) \sim (C \to A) \wedge (A \to C),$$
$$\vdash (A \to C) \to ((C \to B) \to (A \to B)),$$

利用 L^* 中的 MP 规则和交推理规则可得 L^* 中,

$$\vdash (A \to C) \wedge (C \to A) \to$$
$$((C \to B) \to (A \to B)) \wedge ((A \to B) \to (C \to B)).$$

则由命题 3.3(2)及定义 4.1 可得

$$\xi_{\tau^*}(A, C) \leqslant \xi_{\tau^*}(C \to B, A \to B),$$

由 ξ_{τ^*} 的对称性可知

$$\xi_{\tau^*}(A, C) \leqslant \xi_{\tau^*}(A \to B, C \to B).$$

又由 L^* 的公理(L^*4)知 L^* 中

$$\vdash (B \to D) \to ((C \to B) \to (C \to D)),$$

类似地,有 $\xi_{\tau^*}(B, D) \leqslant \xi_{\tau^*}(C \to B, C \to D)$.

结合命题 4.1 得

$$\xi_{\tau^*}(A, C) + \xi_{\tau^*}(B, D)$$
$$\leqslant \xi_{\tau^*}(A \to B, C \to B) + \xi_{\tau^*}(C \to B, C \to D)$$
$$\leqslant 1 + \xi_{\tau^*}(A \to B, C \to D).$$

最后由定义 4.2 可知

$$\rho_{\tau^*}(A \to B, C \to D)$$
$$\leqslant \rho_{\tau^*}(A, C) + \rho_{\tau^*}(B, D).$$

推论 4.4　设 $A, B, A_n, B_n \in F(S)(n = 1, 2, \cdots)$.若 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{\tau^*}(A_n, A) = \lim\limits_{n\to\infty}\rho_{\tau^*}(B_n, B) = 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{\tau^*}(A_n \to B_n, A \to B) = 0$.因而“$\to$”运算在$(F(S), \rho_{\tau^*})$中连续.

注:若将 τ^* 取为 τ_∞,由 τ_∞ 诱导的相似度 ξ_{τ_∞} 与伪度量 ρ_{τ_∞} 也具有 ξ_{τ^*} 和 ρ_{τ^*} 的性质,具体可参见文献[9]和文献[15].

5　结束语

本文从语构角度出发,给出 L^* 中公式的语构真度概念,说明原来在语义下的赋值与真度是语构真度,并研究了由语构真度诱导的相似度与伪度量,证明它们具有语义下相似度与伪度量的对称性、各运算的连续性等基本性质,从而在 L^* 中提出公式的语构程度化方法,进一步丰富由王国俊教授提出的计量逻辑学的基本内容,为不确定性推理提供了新的研究方法.

参考文献:

[1] U Höhle. Commutative, Residuated l-Monoids[M]. U Höhle, E P Klement(Eds.), Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets, Kluwer Acad Publ, Dordrecht, 1995.53 – 106.

[2] Hájer P. Metamathematics of Fuzzy Logic[M]. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[3] Esteva F, Godo L. Monoidal t-norm-based logic: Towards a logic for left-continuous t-norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124(3): 271 – 288.

[4] 王国俊.模糊命题演算的一种形式化演绎系统[J].科学通报,1997,42(10):1041 – 1045.

Wang Guojun. A formal deduction system for fuzzy propositional calculus[J]. Chinese Science Blletin, 1997, 42(10): 1041 – 1045.(in Chinese)

[5] Pei D W. On equivalent forms of fuzzy logic systems NM and IMTL[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 138(1): 187 – 195.

[6] Rosser J Band Turquette A R. Many-Valued Logics[M]. Amsterdam: North-Holland, 1952.

[7] Pavelka J. On fuzzy logic(Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ)[J]. Zeitschr f Math Logik u Grundlagen d Math. 1979, 25: 45 – 52, 119 – 134, 447 – 464.

[8] Wang G J, Fu L, Song J S. Theory of truth degrees of propositions in two valued logic[J]. Science in China, Ser. A, 2002, 45(9): 1106 – 1116.

[9] 王国俊.计量逻辑学(Ⅰ)[J].工程数学学报,2006,23(2):191 – 215.

Wang Guojun. Quantitative logic(Ⅰ)[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(2): 191 – 215.(in Chinese)

[10] 张东晓,李立峰.二值命题逻辑公式的语构程度化方法[J].电子学报,2008,36(2):325 – 330.

Zhang Dongxiao, Li Lifeng. Syntactic graded method of two-valued propositional logic formulas[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(2): 325 – 330.(in Chinese)

[11] Ma L N. Syntactic graded method in Łu-kasiewicz n-valued propositional logic[A]. Proceedings of International Conference on Quantitative Logic and Quantification of Software[C]. Hong Kong: Global-Link Publisher, 2009.157 – 163.

[12] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理(第二版)[M].北京:科学出版社,2008.

[13] 王国俊.数理逻辑引论与归结原理(第二版)[M].北京:科学出版社,2006.

[14] Royden H L,著;叶培新,译.实分析(原书第三版)[M].

北京:机械工业出版社,2006.
[15] 王伟,王国俊.伪度量 L^*-Lindenbaum 代数中基本运算的连续性[J].陕西西安:陕西师范大学学报(自然科学版),2005,33(2):1-4.
Wang Wei, Wang Guojun. Continuity of basic operations on pseudo-metric L^*-Lindenbaum algebra[J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition),2005,33(2):1-4.(in Chinese)

作者简介:

罗敏霞 女,1964 年生于山西运城,教授,博士、硕士生导师,中国人工智能学会理事,中国人工智能学会人工智能专业委员会委员.研究方向为人工智能基础理论、模糊逻辑.
E-mail:mxluo@cjlu.edu.cn

姚 宁 女,1985 年生于山西运城.硕士研究生,研究方向为人工智能基础理论及应用.