

# 一个具有附益性及保序性算子的 形态学非局部拓展

孙忠贵<sup>1,2</sup>, 高新波<sup>2</sup>, 张冬梅<sup>1</sup>, 李 洁<sup>2</sup>, 王 颖<sup>2</sup>

(1. 聊城大学数学科学学院, 山东聊城 252000; 2. 西安电子科技大学电子工程学院, 陕西西安 710071)

**摘 要:** 近年, 形态学非局部拓展工作在图像处理领域受到众多关注. 而附益性算子是经典形态学的最基本形式, 也是形态学分析方法最重要的变换工具. 为此, 一些研究者就形态学非局部拓展中如何保持算子的附益性开展工作. 本文从理论及实例两个方面说明, 相关拓展工作为保持算子的附益性而丢失了保序性的不足; 进一步, 通过设计非局部权值的获取过程, 并结合现有工作, 本文提出了一个新的形态学非局部拓展, 并定理证明了所得算子同时具备附益性及保序性两个重要性质; 人工合成图像及自然图像上的仿真实验也表明了本文所提算法的有效性.

**关键词:** 形态学; 非局部; 附益性; 保序性; 腐蚀; 膨胀

**中图分类号:** TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2018)08-1969-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.08.023

## A Nonlocal Extension of Morphology with Adjunction and Order-Preservation Operators

SUN Zhong-gui<sup>1,2</sup>, GAO Xin-bo<sup>2</sup>, ZHANG Dong-mei<sup>1</sup>, LI Jie<sup>2</sup>, WANG Ying<sup>2</sup>

(1. School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng, Shandong 252000, China;

2. School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** Due to the success in image denoising, the nonlocal strategies have recently been introduced to extend morphology from local to nonlocal. And the operators with adjunction property (adjunction operators for short) are the basic operator form in traditional morphology, which are fundamental in morphological analyzing. However, the adjunction property of operators has usually been missed in the extended works. To overcome the problem, some extensions for nonlocal morphology with adjunctions operators have been provided. Unfortunately, as declared in this paper, another important property, i. e., order-preservation, has been lost in these extensions. To make up the defect of losing order-preservation, by adapting the nonlocal weights acquisition, a novel nonlocal morphology is proposed in this study. Meanwhile, it has been proved that adjunction and order-preservation properties are both kept in the proposed extension. Finally, the experimental results on synthetic and natural images validate its feasibility and effectiveness.

**Key words:** morphology; nonlocal; adjunction; order-preservation; erosion; dilation

### 1 引言

作为图像处理的一个重要工具, 数学形态学建立在格论和拓扑学之上, 具有严谨的理论基础和丰富的操作算子. 最初, 数学形态学主要针对二值图像处理, 后被推广到对灰度图像的处理. 相应的形态学也被称为二值形态学与灰度形态学<sup>[1]</sup>. 本文主要就灰度形态学

开展相关研究, 文中形态学泛指灰度形态学.

形态学主要通过被称为结构元素的图像子集定义操作算子, 并运用这些算子对图像进行具体的操作处理. 本文将被处理图像用  $I$  表示, 结构元素用  $SE$  表示. 在具体应用中, 结构元素的确定通常具有一定的先验知识和直观的物理解释. 腐蚀和膨胀是形态学的两个基本算子, 分别用  $\varepsilon$  和  $\delta$  表示. 作为形态学的基本算子,

收稿日期: 2017-05-24; 修回日期: 2017-10-26; 责任编辑: 马兰英

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 61432014, No. 61671339, No. U1605252); 山东省自然科学基金 (No. ZR2014FM032); 聊城大学博士科研基金 (No. 318051711)

$\varepsilon$  和  $\delta$  通常具有一些良好的数学性质,也正是这些性质为形态学的实际应用提供了坚实的理论保障。

本文侧重讨论腐蚀及膨胀算子的保序性和附益性两个主要性质.具有附益性的算子在形态学中称为附益算子.文献[2]指出:“附益算子是形态学分析方法中最重要的变换工具,是形态算子最基本的结构形式”.因此附益性对形态学而言既有重要的理论意义,又有重要的应用价值.腐蚀算子  $\varepsilon$  和膨胀算子  $\delta$  具有附益性是其组合构成的开( $\delta\varepsilon$ )、闭( $\varepsilon\delta$ )运算具有幂等性的重要保证<sup>[1]</sup>.实际中也常通过验证开、闭运算的幂等性来判断腐蚀和膨胀算子是否具有附益性.同时,保序性是形态学算子进行梯度定义的基本前提,而形态学梯度则是形态学图像边缘提取的基本工具<sup>[3]</sup>.因此,附益性和保序性是形态学算子的两个重要性质,其在形态学研究中的应用中占居重要位置.

文献[4]较早利用图像空域信息的周期性,即非局部性,进行纹理合成.文献[5]提出的非局部均值滤波器(nonlocal means, NLM)则首次将这种非局部信息用于图像的噪声滤除,从而将均值滤波器由局部方法推广到非局部方法.与经典局部滤波主要依据当前像素的邻域信息进行噪声去除不同,NLM在一个更大的区域(甚至整幅图像)进行操作.同时像素点之间的相似性刻画是通过相应的图像片而非单个像素点进行.由于很好地利用了图像的周期性,NLM的这种非局部策略在图像的噪声滤除及细节保持方面均取得了较好效果.正是这种成功应用,使NLM的非局部方法在图像处理领域受到广泛关注<sup>[6,7]</sup>.

受NLM将经典均值滤波器由局部推广到非局部的启发,一些研究者也尝试将形态学由经典的局部方法推广到非局部方法<sup>[8-10]</sup>,所得到非局部形态学在一些具体的图像处理任务中也取得了较好效果.

然而,文献[11]指出,将形态学由局部推广到非局部的过程中,原有算子的附益性常常被丢失.而如前所述,附益性是形态学算子的一个重要性质.因此,现有的一些非局部形态学推广工作,其推广算子很难说是真正理论意义上的形态学算子<sup>[11]</sup>.而缺少了严谨理论支撑的形态学算子在具体应用中也势必会存在一些潜在问题.因此,构造具有附益性的形态学算子极为重要.为保持算子的附益性,文献[11]指出在形态学的非局部推广过程中,结构元素一旦依被处理图像确定下来,在后续的形态学处理过程中就不应再发生变化.基于此规则,文献[12]具体构造出一个非局部形态学,并且其腐蚀算子和膨胀算子保持了附益性.然而,文献[12]的形态学非局部拓展工作,在保持附益性的同时,却丢失了这两个算子的另外一个重要性质——保序性.

通过对文献[12]工作的进一步改进,本文给出一

个新的形态学非局部拓展.其腐蚀算子与膨胀算子同时保持了附益性和保序性两个重要性质.

## 2 形态学基本理论

### 2.1 形态学基本概念

经典形态学理论起源于集合论,将其图像  $I$  识为一个由定义域  $\Omega$  到值域  $F$  上的映射函数,其中  $\Omega$  为像素的坐标集合, $F$  为像素的灰度区间(或集合).对  $n$  维图像而言, $\Omega \subset Z^n$ .图像  $I$  具体可表示为如下函数的形式:

$$x \mapsto I(x) \quad (1)$$

其中  $x \in \Omega, I(x) \in F$ .图像  $I$  把每个像素  $x$  映射到一个灰度值  $t$ ,即  $I(x) = t$ .令  $Fun(\Omega, F)$  表示由  $\Omega$  映射到  $F$  的所有函数组成的集合,则  $I \in Fun(\Omega, F)$  且  $Fun(\Omega, F)$  构成一个完备格<sup>[1]</sup>.形态学中的结构元素( $SE$ )是一个用来对图像中的像素点进行探测的小集合,其形状和大小的确定都依赖于具体任务.结构元素分为扁平结构和非扁平结构两类.对  $n$  维图像,当  $SE \subseteq \Omega$  时  $SE$  称为扁平结构元素,当  $SE$  为  $n+1$  维时称为非扁平结构元素.本文用  $SE(x)$  表示中心为像素  $x$  的结构元素.使用上面这些基本概念,给出形态学腐蚀和膨胀两个基本算子的具体定义.对扁平结构元素的情况:

$$\varepsilon_{SE}(I)(x) = \bigwedge_{y \in SE(x)} I(y), x \in \Omega \quad (2)$$

$$\delta_{SE}(I)(x) = \bigvee_{y \in SE(x)} I(y), x \in \Omega \quad (3)$$

其中  $\widehat{SE}$  表示  $SE$  进行中心对称变换所得新的结构元素.下标  $SE$  表示当前算子的定义依赖相应的结构元素.式(2)和式(3)中所定义的腐蚀和膨胀分别称为扁平腐蚀与扁平膨胀.对非扁平结构元素的情况:

$$\varepsilon_{SE}(I)(x) = \bigwedge_{y \in SE(x)} \{I(y) - SE(x)(y)\}, x \in \Omega \quad (4)$$

$$\delta_{SE}(I)(x) = \bigvee_{y \in SE(x)} \{I(y) + \widehat{SE}(x)(y)\}, x \in \Omega \quad (5)$$

其中  $SE(x)(y)$  表示非扁平结构元素  $SE(x)$  在像素  $y$  处的灰度值.相应的腐蚀和膨胀分别称为非扁平腐蚀与非扁平膨胀.

### 2.2 形态学算子的两个重要性质

腐蚀算子  $\varepsilon$  与膨胀算子  $\delta$  作为形态学的两个基本算子具有一些良好的数学性质,从而为形态学的具体应用提供了坚实的数学保证<sup>[13,14]</sup>.其中保序性的数学定义为:

$$\varepsilon(f) \leq f \leq \delta(f) \quad (6)$$

上式  $f$  表示任一被处理的图像.基于腐蚀与膨胀的保序性,便可给出下面形态学梯度的定义:

$$\rho(f) = \delta(f) - \varepsilon(f) \quad (7)$$

形态学梯度在实际中十分重要,常被用来进行图像的边缘提取<sup>[3]</sup>.经典形态学腐蚀与膨胀所满足的另一个重要性质是附益性,即

$$\delta(f) \leq g \Leftrightarrow f \leq \varepsilon(g) \quad (8)$$

其中  $f$  与  $g$  分别表示任意两幅被处理图像,  $\Leftrightarrow$  为双向推导(等价)符号.

腐蚀与膨胀算子的附益性是形态学的重要理论基础<sup>[2]</sup>.

### 3 形态学非局部改进

#### 3.1 非局部均值滤波器

非局部思想在图像处理领域引起重视主要是受非局部均值滤波器成功应用的影响. 为了方便对形态学非局部改进工作的理解, 先就非局部均值滤波器(NLM)进行简单介绍.

NLM 对一个像素点灰度的滤波输出, 在本质上可以看成整幅图像(非局部)中像素点灰度的加权平均, 具体表示如下:

$$NLM(I)(x) = \sum_{y \in \Omega} W_I(x, y) I(y), \quad x \in \Omega \quad (9)$$

其中权值  $W_I(x, y)$  通过计算分别以像素  $x, y$  为中心的图像片间的相似性获得:

$$W_I(x, y) = \frac{\widehat{W}_I(x, y)}{\sum_{z \in \Omega} \widehat{W}_I(x, z)} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \widehat{W}_I(x, y) &= \widehat{W}_I(P(x), P(y)) \\ &= \exp\left(-\frac{\|P(x) - P(y)\|^2}{h^2}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

上式  $\|\cdot\|$  为欧几里得范数;  $P(x), P(y)$  分别表示以像素  $x, y$  为中心的图像片;  $h$  为光滑参数, 在进行高斯噪声滤波时, 噪声强度越大,  $h$  越大. 由式(10)与式(11)可以看出, NLM 中的权值  $W_I(x, y)$  还满足下面三个具体条件:

$$0 \leq W_I(x, y) \leq 1 \quad (12)$$

$$\sum_{y \in \Omega} W_I(x, y) = 1 \quad (13)$$

$$W_I(x, y) = W_I(y, x) \quad (14)$$

NLM 的成功应用, 吸引研究者们对其开展了一系列的后续工作, 如多核扩展<sup>[7]</sup>、鲁棒度量改进<sup>[15]</sup>等. 关于 NLM 理论及应用的具体细节可参考文献[5, 6].

#### 3.2 现有的形态学非局部改进

受 NLM 成功把均值滤波器由局部推广到非局部的启发, 一些研究者也着手进行将形态学由局部推广到非局部的尝试. 文献[8]采用全局像素定义结构元素, 并使用 NLM 中的权值进行非平坦实现, 从而得到经典形态学的一个非局部推广, 其腐蚀和膨胀两个基本算子的定义如下:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{NLMSE}(I)(x) &= \bigwedge_{y \in SE(x)} \{I(y) - \alpha W_I(x, y)\}, \quad x \in \Omega \\ \delta_{NLMSE}(I)(x) &= \bigvee_{y \in SE(x)} \{I(y) + \alpha W_I(x, y)\}, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (15)$$

$$\delta_{NLMSE}(I)(x) = \bigvee_{y \in SE(x)} \{I(y) + \alpha W_I(x, y)\}, \quad x \in \Omega \quad (16)$$

其中  $\alpha$  为可调参数.

文献[9]采用字典表示、流形学习等操作实现了形态学的一个非局部拓展. 这种改进, 在一定程度上可看成是多种算法的综合. 本文主要关注如何通过结构元素的非局部化实现对形态学的非局部拓展.

如前文所述, 附益性是形态学算子的一个重要性质. 为保持算子的附益性, 在对形态学进行非局部拓展的过程中, 结构元素一旦确定, 就不应再发生变化<sup>[11]</sup>. 受文献[11]工作的启发, 文献[12]给出一个结构元素系统的定义. 一个结构元素构集合  $\{SE_I(x)\}_{x \in \Omega}$  称为结构元素系统, 当且仅当其满足下面两个条件:

$$x \in SE_I(x) \quad (17)$$

$$y \in SE_I(x) \Rightarrow x \in SE_I(y) \quad (18)$$

其中  $\Rightarrow$  为单向推导(蕴含)符号. 事实上, 很多常用的结构元素, 如圆形结构元素、线形结构元素、方形结构元素都满足上述条件.

基于上面的结构元素系统, 文献[12]将式(9)的 NLM 算法中“求和”运算替换为“取大”运算, “乘”运算替换为“求和”运算, 得到一个  $(\max, +)$  代数系统下较自然的形态学非局部拓展:

$$\varepsilon_{SE_I, W_I}(f)(x) = \bigwedge_{y \in SE_I(x)} \{f(y) - W_I(x, y)\}, \quad x \in \Omega \quad (19)$$

$$\delta_{SE_I, W_I}(f)(x) = \bigvee_{y \in SE_I(x)} \{f(y) + W_I(x, y)\}, \quad x \in \Omega \quad (20)$$

其中  $f$  为被处理图像,  $\{SE_I(x)\}_{x \in \Omega}$  为一个结构元素系统,  $W_I(x, y)$  为式(9) NLM 权值  $W_I(x, y)$  的对数, 即

$$W_I(x, y) = \log(W_I(x, y)) \quad (21)$$

并且文献[12]还证明了对任意两幅图像  $f$  和  $g$ , 式(19)与式(20)所定义的腐蚀、膨胀算子满足下式:

$$\delta_{SE_I, W_I}(f) \leq g \Leftrightarrow f \leq \varepsilon_{SE_I, W_I}(g) \quad (22)$$

从而说明形态学的这一非局部拓展保持了算子的附益性.

#### 3.3 改进过程中保序性丢失的缺陷

尽管文献[12]给出的非局部形态学拓展保持了附益性这一重要性质, 这一改进工作却丢失了形态学算子的另外一个重要性质——保序性. 具体说来, 由式(12) NLM 权值小于 1, 及式(21)的对数运算显然可以得出式(19)与式(20)中  $W_I(x, y)$  非正的结论, 进而可以说明由这两式所定义的腐蚀与膨胀算子不具备保序性. 即对任意图像  $f$ , 式(19)及式(20)所定义的两个算子不具有保序性, 即不能保证下式成立.

$$\varepsilon_{SE_I, W_I}(f) \leq f \leq \delta_{SE_I, W_I}(f) \quad (23)$$

图 1 通过一个具体实例, 对文献[12]非局部拓展工作的这一缺陷作进一步说明.

100	100	100			
100	100	100			
100	100	100			
(a) 原始图像 $f$					
1/9	1/9	1/9	-2.2	-2.2	-2.2
1/9	1/9	1/9	-2.2	-2.2	-2.2
1/9	1/9	1/9	-2.2	-2.2	-2.2
(b) 非局部权值 $W_I$			(c) $W_I = \log(W_I)$		
102.2	102.2	102.2	97.8	97.8	97.8
102.2	102.2	102.2	97.8	97.8	97.8
102.2	102.2	102.2	97.8	97.8	97.8
(d) $\mathcal{E}_{SE_I, W_I}(f)$			(e) $\delta_{SE_I, W_I}(f)$		

图1 算子保序性丢失的验证实例

其中图 1(a) 为一幅  $3 \times 3$  的原始图像, 各像素的灰度值均为 100; 图 1(b) 为取图像片的大小为  $1 \times 1$  的极端情况下, 根据式 (10) 所计算出的各像素点间的 NLM 权值 (均为  $1/9$ ); 图 1(c) 则是用式 (21) 对图 1(b) 中 NLM 权值取对数的结果 (均为  $-2.2$ , 小于零); 图 1(d) 和图 1(e) 则分别为根据式 (19)、式 (20) 计算所得原图像的腐蚀及膨胀结果, 显然

$$\mathcal{E}_{SE_I, W_I}(f) > \delta_{SE_I, W_I}(f) \quad (24)$$

从而说明文献 [12] 形态学非局部改进工作中的腐蚀、膨胀算子丢失了保序性这一重要性质。

## 4 一个新的形态学非局部拓展

### 4.1 算法提出

为克服形态学非局部拓展中算子不能同时具备附益性及保序性的缺陷, 首先对式 (10) 的 NLM 权值  $W_I(x, y)$  进行如下修整:

$$W_I(x, y) = W_I(x, y) / W_I(x, x) \quad (25)$$

再由式 (10) 与式 (11) NLM 权值的计算过程可知:

$$W_I(x, x) = \max_{y \in \Omega} \{W_I(x, y)\} \quad (26)$$

由此得到修正后的权值满足如下两个性质:

$$0 \leq \omega_I(x, y) \leq 1 \quad (27)$$

$$\omega_I(x, x) = 1 \quad (28)$$

再令

$$\mathbb{W}_I(x, y) = \log(\omega_I(x, y)) \quad (29)$$

对任一待处理图像  $f$  和任一确定的结构元素系统  $\{SE_I(x)\}_{x \in \Omega}$ , 将拓展依然在  $(\max, +)$  代数系统下进行, 所得非局部腐蚀、膨胀算子定义如下:

$$\mathcal{E}_{SE_I, \mathbb{W}_I}(f)(x) = \bigwedge_{y \in SE_I(x)} \{f(y) - \mathbb{W}_I(x, y)\}, x \in \Omega \quad (30)$$

$$\delta_{SE_I, \mathbb{W}_I}(f)(x) = \bigvee_{y \in SE_I(x)} \{f(y) + \mathbb{W}_I(x, y)\}, x \in \Omega \quad (31)$$

采用这两个算子, 对图 1(a) 所示大小  $3 \times 3$  的图像

$f$  分别进行腐蚀和膨胀操作, 具体结果如图 2 所示。

1/9	1/9	1/9	1	1	1
1/9	1/9	1/9	1	1	1
1/9	1/9	1/9	1	1	1
(a) 非局部权值 $W_I$			(b) $\omega_I(x, y) = W_I(x, y) / W_I(x, x)$		
0	0	0	100	100	100
0	0	0	100	100	100
0	0	0	100	100	100
(c) $\mathbb{W}_I(x, y) = \log(\omega_I(x, y))$			(d) $\mathcal{E}_{SE_I, \mathbb{W}_I}(f)$ 和 $\delta_{SE_I, \mathbb{W}_I}(f)$		

图2 算子保序性检验

其中图 2(a) 为取图像片的大小为  $1 \times 1$  的极端情况下, 各像素点间的 NLM 权值 (均为  $1/9$ ); 图 2(b) 则是用式 (25) 对图 2(a) 中 NLM 权值进行修正的结果 (均为 1); 图 2(c) 为用式 (29) 对图 2(b) 中权值取对数的结果 (均为 0); 图 2(d) 则分别为根据式 (30)、式 (31) 计算所得原图像即图 1(a) 的腐蚀及膨胀结果 (均为 100)。

由图 2(d) 可以看出, 对这幅各像素灰度值相等的图像, 其腐蚀与膨胀的结果均与原图像相等, 即:

$$\mathcal{E}_{SE_I, \mathbb{W}_I}(f) = f = \delta_{SE_I, \mathbb{W}_I}(f) \quad (32)$$

与式 (24) 所示的文献 [12] 方法处理结果不同, 本文拓展算法所得的腐蚀、膨胀结果之间的关系, 即式 (32) 与算子的保序性不再矛盾。

### 4.2 性质证明

进一步, 通过两个定理, 分别就本文拓展工作式 (30)、式 (31) 所定义的腐蚀、膨胀算子的保序性与附益性进行理论证明。

**定理 1** (保序性定理)

设  $I, f \in Fun(\Omega, F)$  为任意两幅图像, 则:

$$\mathcal{E}_{SE_I, \mathbb{W}_I}(f) \leq f \leq \delta_{SE_I, \mathbb{W}_I}(f)$$

证明:  $\omega_I(x, x) = 1, \forall x \in \Omega$  由 (28)

$$\Rightarrow \mathbb{W}_I(x, x) = 0, \forall x \in \Omega \quad \text{由 (29)}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) - \mathbb{W}_I(x, x), \forall x \in \Omega$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \bigwedge_{y \in SE_I(x)} \{f(y) - \mathbb{W}_I(x, y)\}, \forall x \in \Omega$$

由 (17)

$$\Rightarrow f \geq \mathcal{E}_{SE_I, \mathbb{W}_I}(f)$$

由 (30)

类似可证

$$f \leq \delta_{SE_I, \mathbb{W}_I}(f)$$

故

$$\mathcal{E}_{SE_I, \mathbb{W}_I}(f) \leq f \leq \delta_{SE_I, \mathbb{W}_I}(f)$$

证毕。

对附益性的证明见下面定理 2。

**定理 2** (附益性定理)

设  $I, f_1, f_2 \in Fun(\Omega, F)$  为任意三幅图像, 则

$$\delta_{SE_i, \mathbb{W}_i}(f_1) \leq f_2 \Leftrightarrow f_1 \leq \varepsilon_{SE_i, \mathbb{W}_i}(f_2)$$

证明:

$$\begin{aligned} & \delta_{SE_i, \mathbb{W}_i}(f_1) \leq f_2 \\ \Leftrightarrow & \delta_{SE_i, \mathbb{W}_i}(f_1(x)) \leq f_2(x), \quad \forall x \in \Omega \\ \Leftrightarrow & \bigvee_{y \in SE_i(x)} \{f_1(y) + \mathbb{W}_I(x, y)\} \leq f_2(x), \quad \forall x \in \Omega \text{ 由(31)} \\ \Leftrightarrow & f_1(y) + \mathbb{W}_I(x, y) \leq f_2(x), \quad \forall x \in \Omega, \forall y \in SE_i(x) \\ \Leftrightarrow & f_1(y) \leq f_2(x) - \mathbb{W}_I(x, y), \quad \forall y \in \Omega, \forall x \in SE_i(y) \end{aligned}$$

由(18)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & f_1(y) \leq \bigwedge_{x \in SE_i(y)} \{f_2(x) - \mathbb{W}_I(x, y)\}, \quad \forall y \in \Omega \\ \Leftrightarrow & f_1(y) \leq \bigwedge_{x \in SE_i(y)} \{f_2(x) - \mathbb{W}_I(y, x)\}, \quad \forall y \in \Omega \end{aligned}$$

由(14)及式(21)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & f_1(x) \leq \bigwedge_{y \in SE_i(x)} \{f_2(y) - \mathbb{W}_I(x, y)\}, \quad \forall x \in \Omega \\ \Leftrightarrow & f_1 \leq \varepsilon_{SE_i, \mathbb{W}_i}(f_2) \end{aligned}$$

由(30)

证毕.

定理 1 和定理 2 从理论上保证了本文形态学非局部拓展所得算子同时具有保序性及附益性这两个重要性质.

## 5 实验验证

选取一幅人工合成图像(“blocks”)和一幅自然图像(“lighthouse”),采用本文的形态学拓展,分别对其进行腐蚀、膨胀、梯度、开、闭等一系列操作,通过分析处理结果进一步验证拓展算子的保序性及附益性.实验参数的设置采用文献[5]的推荐值进行,其中图像片的大小为  $7 \times 7$ ,式(11)中  $h^2 = 25$ (处理图像受标准方差为 5 的噪声污染).

两幅实验图像大小均为  $128 \times 128$  像素,其中人工合成图像“blocks”(用  $f_1$  表示)的灰度级由 50 及 150 两个灰度构成,分别对其进行腐蚀、膨胀,进而计算形态学梯度,相应结果如下图 3 所示.

由图 3,主观上可以看出,图像被膨胀后的灰度值大于图像被腐蚀的结果,且形态学梯度取值较大的地方也与图像边缘相对应.这说明腐蚀、膨胀操作具有了较好的保序性.

图 4 是在自然图像“lighthouse”(用  $f_2$  表示)上的非局部形态学处理情况,也得到了与人工合成图像上(图 3)相一致的实验结果.

腐蚀算子  $\varepsilon$  和膨胀算子  $\delta$  具有附益性是其组合构成的开( $\delta\varepsilon$ )、闭( $\varepsilon\delta$ )运算具有幂等性的重要保证<sup>[1]</sup>.仍以上面两幅图像为处理对象,用本文形态学非局部拓展的开、闭算子对其进行操作,验证这些操作的幂等性.

其中人工合成图像上的操作结果如图 5 所示.可以看出,图像经过一次开运算与两次开运算,其主观视觉几乎没有差异;同时,一次闭运算与两次闭运算的结果在主观视觉上也难以区分.

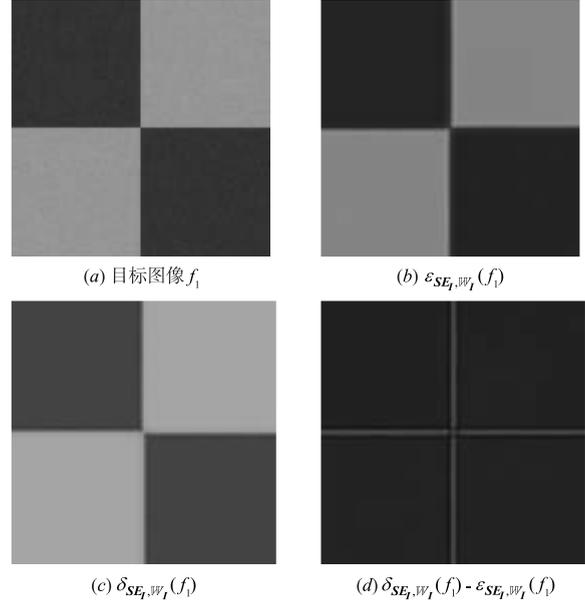


图 3 人工合成图像上的形态学梯度操作

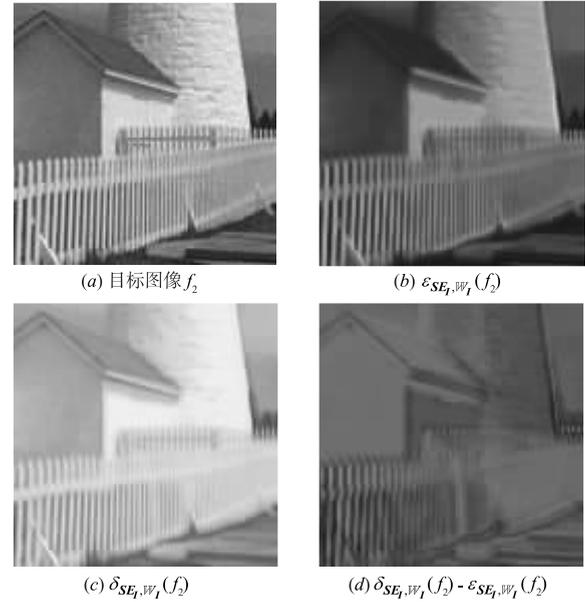


图 4 自然图像上的形态学梯度操作

图 5 中两次开运算间及两次闭运算所得图像差异的欧几里得范数如下:

$$\|(\delta_{SE_i, \mathbb{W}_i}(\varepsilon_{SE_i, \mathbb{W}_i}(f_1)))^2 - \delta_{SE_i, \mathbb{W}_i}(\varepsilon_{SE_i, \mathbb{W}_i}(f_1))\| = 9.2028 \times 10^{-13} \quad (33)$$

$$\|(\varepsilon_{SE_i, \mathbb{W}_i}(\delta_{SE_i, \mathbb{W}_i}(f_1)))^2 - \varepsilon_{SE_i, \mathbb{W}_i}(\delta_{SE_i, \mathbb{W}_i}(f_1))\| = 5.1319 \times 10^{-13} \quad (34)$$

式(33)与式(34)从客观上也表明了所定义开、闭运算的幂等性.

在自然图像上的分别进行两次开、闭运算的结果如图 6 所示.其中两次运算间差异的欧几里得范数分别为:

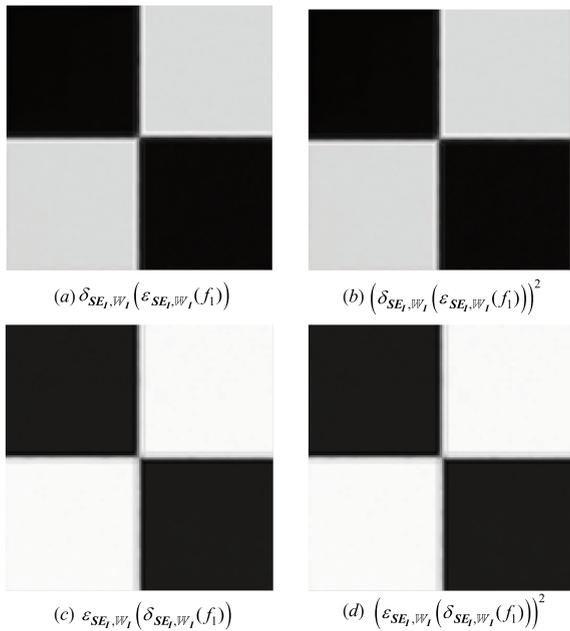


图5 人工合成图像上开、闭运算的幂等性检验

$$\|(\delta_{SE_i, \mathbb{W}_i}(\varepsilon_{SE_i, \mathbb{W}_i}(f_2)))^2 - \delta_{SE_i, \mathbb{W}_i}(\varepsilon_{SE_i, \mathbb{W}_i}(f_2))\| = 8.1484 \times 10^{-13} \quad (35)$$

$$\|(\varepsilon_{SE_i, \mathbb{W}_i}(\delta_{SE_i, \mathbb{W}_i}(f_2)))^2 - \varepsilon_{SE_i, \mathbb{W}_i}(\delta_{SE_i, \mathbb{W}_i}(f_2))\| = 1.2166 \times 10^{-12} \quad (36)$$

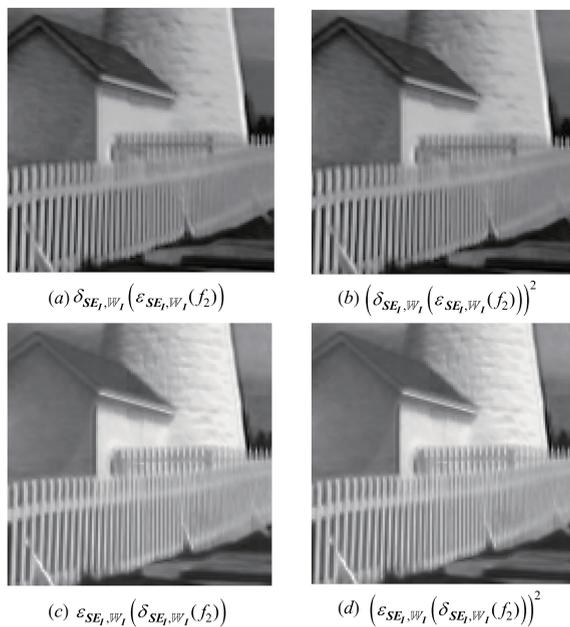


图6 自然图像上开、闭运算的幂等性检验

显然,自然图像上的实验也取得了与人工合成图像上相一致的实验结果。

由实验结果可以看出:本文所提出形态学非局部拓展,其腐蚀、膨胀算子所具有的保序性,在理论上保证了相应形态学梯度的合理性,从而使得实验中形态学

梯度较大的地方能够与图像边缘相对应;同时,这两个算子的附益性也给二者所构成的形态学开、闭运算提供了理论保证,使得实验中相应的开、闭运算无论在主观视觉还是客观结果上都保持了幂等性。

## 6 结论

非局部拓展是近年形态学研究的一个热点方向,而附益性和保序性是形态学算子的两个重要性质,也是形态学应用的重要理论保证.如何保持算子的这两个性质,是形态学非局部拓展过程中的一个关键问题.在已有工作基础上,通过对非局部均值的权值修正,本文提出了一个同时具有附益性及保序性算子的形态学非局部拓展.并从理论及实验两个方面说明了算法的有效性.除上述两个性质外,形态学算子还具有对偶性、分配律等其他一些良好性质,关于这些性质在非局部拓展中的探讨将是下一步研究工作.另外,如何将本文工作推广到的彩色图像的形态学处理<sup>[16,17]</sup>,也值得在将来工作中进一步思考与尝试。

## 参考文献

- [1] Heijmans H J A M. Theoretical aspects of gray-level morphology[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 1991, 13(6): 568 - 582.
- [2] 段油, 秦前清. 具有附益性的形态塔式变换及其应用[J]. 武汉大学学报(理学版), 2004, 50(1): 74 - 78.  
Duan C, Qin Q Q. The morphological adjunction pyramid transforms and applications[J]. Journal of Wuhan University (Natural Science Edition), 2004, 50(1): 74 - 78. (in Chinese)
- [3] Angulo J. Hypercomplex mathematical morphology[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2011, 41(1): 86 - 108.
- [4] Efros A A, Leung T K. Texture synthesis by non-parametric sampling[A]. Proceedings of the 7th International Conference on Computer Vision (ICCV) [C]. Kerkyra, Greece, Greece; IEEE, 1999. 1033 - 1038.
- [5] Buades A, Coll B, Morel J M. A non-local algorithm for image denoising[A]. Proceedings of the 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2005) [C]. San Diego, CA, USA: IEEE, 2005. 60 - 65.
- [6] Buades A, Coll B, Morel J M. Image denoising methods: a new nonlocal principle[J]. SIAM Review, 2010, 52(1): 113 - 147.
- [7] Sun Z G, Chen S C, Qiao L S. A general non-local denoising model using multi-kernel-induced measures[J]. Pattern Recognition, 2014, 47(4): 1751 - 1763.
- [8] Salembier P. Study on nonlocal morphological operators

- [A]. Proceedings of the 16th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP) [C]. Cairo, Egypt: IEEE, 2009. 2245 – 2248.
- [9] Lezoray O, Elmoataz A. Nonlocal and multivariate mathematical morphology[A]. Proceedings of the 19th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP) [C]. Orlando, FL, USA: IEEE, 2012. 129 – 132.
- [10] Ta V, Elmoataz A, Lézoray O. Nonlocal PDEs-based morphology on weighted graphs for image and data processing [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(6): 1504 – 1516.
- [11] Roerdink J B T M. Adaptive and group invariance in mathematical morphology[A]. Proceedings of the 16th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP) [C]. Cairo, Egypt: IEEE, 2009. 2229 – 2232.
- [12] Velasco-Forero S, Angulo J. On nonlocal mathematical morphology[A]. Proceedings of the 2013 Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing (ISMM 2013) [C]. In Proc. of ISMM' 13, 2013. Uppsala, Sweden: Springer, 2013. 219 – 230.
- [13] 雷涛, 张艳宁, 樊养余, 王小鹏, 王履程. 矢量对偶形态学算子[J]. 电子学报, 2016, 44(6): 1285 – 1293.
- Lei T, Zhang Y Y, Fan Y Y, Wang X P, Wang L C. Vector dual morphological operators[J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(6): 1285 – 1293. (in Chinese)
- [14] Lei T, Wang Y, Luo W W. Multivariate self-dual morphological operators based on extremum constraint[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015: 1 – 16.
- [15] Sun Z G, Chen S C. Analysis of non-local Euclidean medians and its improvement [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2013, 20(4): 303 – 306.
- [16] Lei T, Zhang Y, Wang Y, Liu S, Guo Z. A conditionally invariant mathematical morphological framework for color images[J]. Information Sciences, 2017, 387: 34 – 52.
- [17] Lei T, Wang Y, Fan Y Y, Zhao J. Vector morphological operators in HSV color space[J]. Science China Information Sciences, 2013, 56(1): 1 – 12.

#### 作者简介



**孙忠贵** 男, 1971 年出生, 山东聊城人, 博士, 现为聊城大学数学科学学院副教授、硕士生导师, 主要研究方向为图像处理与机器学习。  
E-mail: altlp@nuaa.edu.cn



**高新波(通信作者)** 男, 1972 年出生, 山东莱芜人, 博士, 现为西安电子科技大学教授, 教育部长江学者特聘教授, 国家杰出青年科学基金获得者。从事机器学习和计算机视觉等有关研究。  
E-mail: xbgao@mail.xidian.edu.cn