

非自治振荡电路的主谐波分析法

黄炳华, 黄昌琴, 蔡义明

(广西大学电气工程学院, 广西南宁 530004)

摘 要: 二阶非自治电路有时含有自激和受迫两个谐波分量, 事实上是一种混频振荡; 可将网络划分成两个分部, 各分部有各自独立的振荡频率, 可以单独列出相量方程或代数方程, 而后联合求解. 用谐波分析法求解二阶非自治电路, 关于最初谐波项的假设, 如果能够符合被求电路的物理实际, 会得到有实数解的正确结果. 反之实数解的缺失, 意味着初始假设的不合理. 为此必须深入仔细的分析并修正, 重新设定最初的谐波成份. 本文讨论同时存在有三次与五次方的非线性电路. 说明最初谐波项假设的合理性具有很重要的意义.

关键词: 非自治电路; 混频; 谐波分析法; 耦合; 初相角

中图分类号: TN711.4

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2019)09-2003-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2019.09.027

The Main Harmonic Analysis of Non-Autonomous Oscillation Circuits

HUANG Bing-hua, HUANG Chang-qin, CAI Yi-ming

(Electrical Engineering School of Guangxi University, Nanning, Guangxi 530004, China)

Abstract: The second order non-autonomous circuit of containing sometime both self-excited and forced components is a mixing oscillation. The whole network can be divided into two components, each of which can give independent phasor or algebraic equation by its own oscillation frequency, and then be solved together. The second order non-autonomous circuits are found by means of the harmonic analysis methods. Concerning the initial assumption of harmonic components, if it fits the physical characteristics of the circuit, the correct real number solution will be obtained. By contrast, the absence of real number solution implies an improper initial assumption. In this case, careful analysis and revise is necessary to reset the initial harmonic components. The nonlinear circuits of coexisting third power and fifth power is discussed in this paper. It possesses very important meaning to explain the rationality of the initial assumption of harmonic components.

Key words: non-autonomous circuits; mixing; harmonic analysis; coupling; initial phase angle

1 引言

早期的无线电通讯技术, 外来信号与本机振荡在含有平方律的非线性器件中混频, 通过带通滤波器选出其中的差频信号俗称变频; 构成超外差接收机的主要环节. 非自治电路的激励源可视为外加信号, 自激成份可视为本机振荡, 因而混频原理同样可适用于一般非自治电路; 但混频后不经过选频滤波, 目的不是为了获得差频, 其总体输出包含多种多样的谐波成份, 研究该电路目的是为了求出其中的主谐波. 现有国内外许多文献, 采用谐波分析法求解非自治电路, 对于最初谐波项的预设, 并没有包含一个频率独立的自振谐波项, 尽管存在多种多样的近似解析方法, 都不具有适用一般非自治电路的普遍性^[1-6], 大都是针对某些常见的具体方程, 提出一些近似解析方法, 例如采用摄动法 (per-

turbation method) 或小参数振幅缓变法等等, 关于小参数的假设显得很勉强, 如果电路参数不满足这要求, 整个解析方法会因而被否定.

非自治电路可能包含有自激和受迫两个主谐波; 完全响应是两者的非线性耦合. 本文采用分部网络求解方法; 先去除外激源, 用基波分析法^[7-14]求出自振荡基波项的频率 ω_n , 然后将频率为 ω_n 的自振谐波项, 和频率为 ω_p 的外激信号; 做为预设两个谐波项; 代入原方程求出两个谐波成份的幅值 U_{nm} 和 U_{pm} , 两谐波非线性耦合的定量关系取决于非线性特性, 求解后可用功率平衡定理验证每一谐波要各自保持复功率平衡. 并验证当外激幅值足够强大时, 原存在的自激分量会因而消失. 这种方法具有适用于各种各样情况的普遍性. 本文用充分例证证明, 最初谐波项的预设是否合理, 对于求解结果有至关重要的影响.

2 非线性耦合量的求定

2.1 单谐波项电压贡献的基波电流

设单谐正弦电压 u_{ht} 和非线性压控器件 g_N 的伏安特性 $i=f(u)$ 如式(1), 引起 i 基波电流 i_{1h} 的幅值 I_{1hm} 如式(2); 则 g_N 的基波电导 g_{mfh} 以及在单谐电压作用下消耗的功率 P_{mfh} 如式(3).

$$\begin{cases} u_{ht} = U_{hm} \sin(\omega_h t + h) \\ i = -a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 \end{cases} \quad (1)$$

$$i_{1h} = I_{1hm} \sin(\omega_h t + h), I_{1hm} = g_{mfh} U_{hm} \quad (2)$$

$$\begin{cases} g_{mfh} = i_{1h}/u_{ht} = -a_1 + 3a_3 U_{hm}^2/4 + 5a_5 U_{hm}^4/8 \\ P_{mfh} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i_{1h} \times u_{ht} dt = U_{hm}^2 g_{mfh}/2 \end{cases} \quad (3)$$

$$i_{non} = i - i_{1h}, P_{non} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i_{non} \times u_{ht} dt = 0 \quad (4)$$

2.2 双谐波混频的功率计算

电路如图 1.

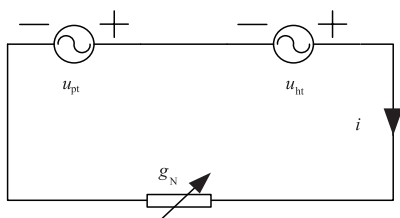


图1 双频电压的功率计算

$$\begin{cases} u_{pt} = U_{pm} \sin(\omega_p t + p), u_{ht} = U_{hm} \sin(\omega_h t + h) \\ u = u_{pt} + u_{ht} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} i = -a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 = i_1 + i_{non}, i_1 = i_{1h} + i_{1p} \\ g_N = di/du = -a_1 + 3a_3 u^2 + 5a_5 u^4 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} i_{1h} = I_{1hm} \sin(\omega_h t + h), I_{1hm} = g_{mfh} U_{hm} \\ g_{mfh} = i_{1h}/u_{ht} = -a_1 + 3a_3 U_{heq3}^2/4 + 5a_5 U_{heq5}^4/8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} U_{heq3}^2 = U_{hm}^2 + 2U_{pm}^2, U_{heq5}^4 = U_{hm}^4 + 6U_{hm}^2 U_{pm}^2 + 3U_{pm}^4 \\ P_{mfh} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i_{1h} \times u_{ht} dt = U_{hm}^2 g_{mfh}/2 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} g_{mfp} = i_{1p}/u_{pt} = -a_1 + 3a_3 U_{peq3}^2/4 + 5a_5 U_{peq5}^4/8 \\ U_{peq3}^2 = U_{pm}^2 + 2U_{hm}^2, U_{peq5}^4 = U_{pm}^4 + 6U_{hm}^2 U_{pm}^2 + 3U_{hm}^4 \end{cases} \quad (9a)$$

$$P_{mfp} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i_{1p} \times u_{pt} dt = U_{pm}^2 g_{mfp}/2 \quad (9b)$$

$$\begin{cases} P_{eq} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i \times u dt = P_{eq1} + P_{non} \\ P_{eq1} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i_1 \times u dt, P_{non} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i_{non} \times u dt = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} P_{all} &= U_{pm}^2 g_{mfp}/2 + U_{hm}^2 g_{mfh}/2 \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i \times u dt = P_{eq} = P_{eq1} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} g_{mfh} &= I_{1hm}/U_{hm} = -a_1 + 3a_3 (U_{hm}^2 + 2U_{pm}^2)/4 \\ &+ 5a_5 (U_{hm}^4 + 6U_{hm}^2 U_{pm}^2 + 3U_{pm}^4)/8 = f(U_{hm}, U_{pm}) \end{aligned} \quad (12)$$

本文采用 MATHEMATICA9.0 程序做出各种运算. 两个异频电压源 $u_{pt} + u_{ht}$ 如式(5), 式中频率 ω_h 和 ω_p 不互为整数倍, 串联作用于非线性电导 g_N 伏安特性如式(6). 以式(5)代入式(6)得电流 i 含有多种成份, 两个谐波源各只取一次成份称主谐波电流记为 $i_1 = i_{1h} + i_{1p}$, 记非主谐波电流 $i_{non} = i - i_1$, 其中 i_{1h} 的幅值记为 I_{1hm} , 定义等效基波电导记为 $g_{mfh} = I_{1hm}/U_{hm} = i_{1h}/u_{ht}$ 如式(7), 其中 U_{heq3} 和 U_{heq5} 代表三次项与五次项的等效耦合值, 是根据贡献同等功率理论求出来的. u_{ht} 贡献的平均功率 P_{mfh} 必须与 g_N 中 $\omega_h t$ 分量消耗的功率相等如式(8). 同理可以定义等效基波电导 g_{mfp} 是电流 i_{1p} 与 u_{pt} 的比值如式(9a), u_{pt} 贡献的平均功率 P_{mfp} 必须与 g_N 中 $\omega_p t$ 分量消耗的功率相等如式(9b). 式(10)的 P_{eq} 代表非线性电导 g_N 消耗的全部平均功率, P_{mfh} 代表 u_{ht} 源供出的实功率, P_{mfp} 代表 u_{pt} 源供出的实功率, 两源共同供出的实功率 P_{all} 等于 g_N 的总消耗 P_{eq} 如式(11). 由式(7)、(8)得式(12), 可见 g_{mfh} 不但与 U_{hm} 有关且与 U_{pm} 的耦合有关. k 次谐波源所送出的功率, 由于有非 k 次谐波源的存在, 而增加 k 次谐波功率的送出量; 增加的送出量取决于非线性项的幂次, 这种耦合关系对于确立功率平衡理论的基础, 发挥很重要的作用.

3 非自治电路主谐波合解的第一例证

3.1 用谐波平衡原理求非自治电路的主谐波

例一 非自治电路如图 2, 激励源视为外信号; LC 回路和电路中含有负性电导构成自激振荡视为本机振荡, 两者同时作用在非线性电导可视为混频. 不过电路没有选频滤波, 并不是为了获得差频; 而是为了研究混频振荡输出的主谐波成份. 各元件参数如式(13), g_N 非线性伏安特性如式(14), 微分方程如式(15).

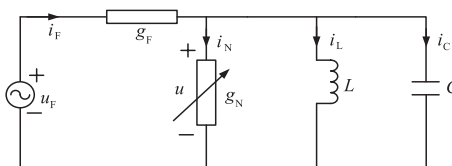


图2 非自治电路

当外激 $u_F = 0$ 时, 如果预设 $u_h = U_{hm0} \sin(\omega_h t + h)$, 自振幅值 U_{hm0} 与频率 ω_h 如式(16); 如果预设 $u_h = U_{hmr} \sin \omega_h t + U_{hmx} \cos \omega_h t$ 求自振幅值 U_{hm0} 则得出不定解 (U_{hmx}, U_{hmr}) 如式(17). 因为没引入初条件, 故暂态过程消失后进入稳态振荡第一瞬间的初相角 h 是不定的.

$$\begin{cases} g_F = 10^{-3}, a_1 = 4.6875 \times 10^{-3}, a_3 = 4 \times 10^{-5} \\ a_5 = 11 \times 10^{-8}, C = 10^{-6}, L = 25/16, \omega_F = \omega_p = 2000 \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} i_N = -a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5, g_N = di_N/du \\ i_N = g_N \dot{u} = (di_N/du) \dot{u} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \ddot{u} + u/LC + \dot{u}(g_F + g_N)/C = \dot{u}_F g_F/C \\ u_F = U_{Fm} \sin \omega_F t, \omega_p = \omega_F \end{cases} \quad (15)$$

$$\omega_h^2 = 1/(CL) = w = 800^2, U_{hm0}^2 = 100 \quad (16)$$

$$U_{hmx}^2 = (100 - U_{hmr}^2), h = \arctan(U_{hmx}/U_{hmr}) \quad (17)$$

当 $u_F \neq 0$, 如果预设 $u_h = U_{hm} \sin(\omega_h t + h)$, 求出五组数据列如表 1. 表中, U_{hm} 指 $u_F \neq 0$ 的自振幅值; h 不做为求解变量, 只做为未给出数值的待定量留在程序中, 并不影响可求出 $U_{hm} \neq U_{hm0}$, 也不影响能分析自振是否存在, 它用 $U_{hm} = 0$ 显示自振已消失, 得到更加合理的结果. 表中 g_{in} 表示图 3(a) 端口 U_{hm} 向左看的输入电导.

表 1 当 $U_{Fm} = 10, 15, 18, 20, 22$ 时, 式 (15) 的主谐波解, 临界值 $U_{pmcr} = 7.22V, U_{Fmcr} = 18.51V$

(a)	$U_{Fm} = 10$	$u_{10a} = -1.303 \cos[2000t] + 2.46 \sin[2000t] + 9.086 \sin[h + 800t], U_{pm} = 2.785, U_{hm} = 9.086;$ $u_{10b} = -3.47 \cos[2000t] + 2.94 \sin[2000t] + 7.47 \sin[h + 800t], U_{pm} = 4.544, U_{hm} = 7.47;$ $U_{pm} < U_{pmcr}, g_{in} = 0, \text{self-oscillation existence}$
(b)	$U_{Fm} = 15$	$-5.21723 \cos[2000t] - 4.40033 \sin[2000t] + 2.98842 \sin[h + 800t]$ $U_{pm} = 6.825 < U_{pmcr}, U_{hm} = 2.988, g_{in} = 0, \text{self-oscillation existence}$
(c)	$U_{Fm} = 18$	$-4.7936 \cos[2000t] - 5.3274 \sin[2000t] + 1.0985 \sin[h + 800t]$ $U_{pm} = 7.167 < U_{pmcr}, U_{hm} = 1.099, g_{in} = 0, \text{self-oscillation existence}$
(d)	$U_{Fm} = 20$	$-9.83918 \cos[2000t] + 4.50818 \sin[2000t], U_{pm} = 10.823 > U_{pmcr}$ $U_{hm} = 0, g_{in} = 0.00617 > 0, \text{self-oscillation disappearance}$
(e)	$U_{Fm} = 22$	$-9.40768 \cos[2000t] + 5.88994 \sin[2000t], U_{pm} = 11.099 > U_{pmcr}$ $U_{hm} = 0, g_{in} = 0.00683 > 0, \text{self-oscillation disappearance}$

由表 1 数据可得出以下几点: ①表 1 第一行列入 u_{10a} 和 u_{10b} 两个数据, 说明对于不同初始条件, 稳态振荡可以有多解. ②随 U_{Fm} 的增大 U_{pm} 也随之增大导致 U_{hm} 减小; 当 U_{pm} 大到一定值时 U_{hm} 消失, 能使得自振荡消失最低的受迫分量称临界电压记为 U_{pmcr} ; 对应的外激幅值记为 U_{Fmcr} . 当 $U_{pm} < U_{pmcr}$ 时自振存在; 当 $U_{pm} > U_{pmcr}$ 时自振荡消失; ③当 $U_{Fm} \leq 18$ 时, 表 1 前三行数据自振荡还存在, 输入电导 $g_{in} = g_{mth} + g_F = 0$, 说明稳态振荡时 ω_h 分量消耗平均功率 $P_{\omega_h} = 0$. ④当 $U_{Fm} \geq 20$ 时, 表 1 后两行数据 $U_{hm} = 0$ 自振荡消失, 电路企图建立电压幅值较大的振荡, 超过自动限幅特性的最大限制, 使自振荡不能维持功率平衡无法自保持而消失, 表现为输入电导 $g_{in} = g_{mth} + g_F > 0$.

3.2 两种预设谐波项求解结果的对比

$$\begin{aligned} u = u_{pt} + u_{ht} &= U_{pmr} \sin \omega_F t + U_{pmx} \cos \omega_F t \\ &+ U_{hmr} \sin(\omega_h t + h) \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} u = u_{pt} + u_{ht} &= U_{pmr} \sin \omega_F t + U_{pmx} \cos \omega_F t \\ &+ U_{hmr} \sin \omega_h t + U_{hmx} \cos \omega_h t \end{aligned} \quad (18b)$$

式 (18a) 包含三个求解变量 (U_{pmr}, U_{pmx}, U_{hm}), 其中 u_{pt} 和 u_{ht} 预设谐波项形式不同; 式 (18b) 包含四个求解变量 ($U_{pmr}, U_{pmx}, U_{hmr}, U_{hmx}$), 其中 u_{pt} 和 u_{ht} 的预设谐波项形式

相同. 按照两种谐波项预设定的不同进行运算对比: 一种是预设自振谐波项如式 (18a), 可得出表 1 的数据. 另一种是预设自振谐波项如式 (18b), 导致给出的解并不完全; 例如给出 20 组解全都是含有虚数的复根; 其中没有一组是值得采用的实数解. 可以举出两个例子证明如下:

例 1 当 $U_{Fm} = 10$, 如果预设谐波项如式 (18a), 导出表 1(a) 的 u_{10a} 数据如式 (19); 如果预设谐波项如式 (18b), 求出多余的自振相量解如式 (20a) 和 (20b).

$$2.46 \sin[2000t] - 1.30 \cos[2000t] + 9.086 \sin[h + 800t], \quad U_{hm} = 9.086 \quad (19)$$

$$2.46 \sin[2000t] - 1.30 \cos[2000t] - 2.13 \sin[800t] - 8.83 \cos[800t], U_{hv} = -2.125 - j8.83 \quad (20a)$$

$$2.46 \sin[2000t] - 1.30 \cos[2000t] + 7.20 \sin[800t] + 5.54 \cos[800t], U_{hv} = 7.20 + j5.54 \quad (20b)$$

式 (20a)、(20b) 的自振相量值 $U_{hv} = U_{hmr} + jU_{hmx}$ 是不定的; 自振幅值 $U_{hm}^2 = U_{hmr}^2 + U_{hmx}^2 = 9.0863^2$ 是确定的. 而受迫解的相量值 $U_{pv} = U_{pmr} + jU_{pmx}$ 是确定的, 如表 1(a) 的 u_{10a} 数据 $U_{pv} = 2.46 - j1.3$.

例 2 当 $U_{Fm} = 20$, 如果预设谐波项如式 (18a), 得到合理的解如表 1(d) 数据, 包含有 $U_{hm} = 0$ 的零解; 如

果预设项如式(18b),程序运算显示20组解全是含虚数的复解,丢失合理的零解 $U_{hm}=0$.

3.3 划分成两个分部网络

按照两个主谐波划分图2成为两个分部网络如图3(a)和图3(b),是混频后只取两个基波成份的分部网络.

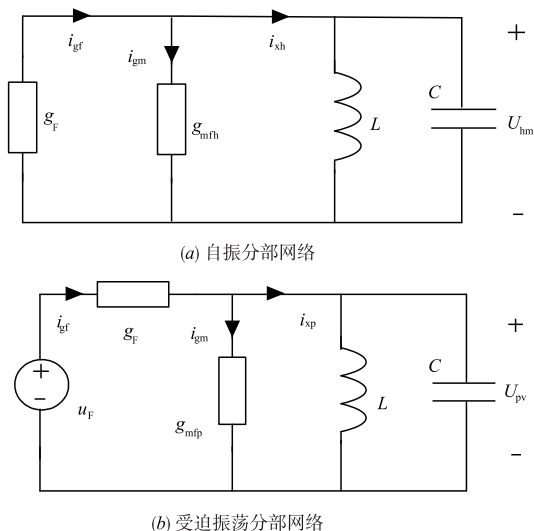


图3 网络划分成两个谐波成分

两个分部网络不能分开单独求解后迭加,而必须考虑相互间耦合影响后联合求解. 要强调指出,由于没引入初条件其初相角不定. 只能对图3(a)求自激谐波幅值 U_{hm} ,而无法确定具体的相量值 U_{hv} .

3.4 自振分部网络的复功率平衡

自振分部网络图3(a)不包含外激励,用基波电导 g_{mh} 代替 g_N ;从 U_{hm} 两端向左看输入导纳记为 y_{in} 如式(21a),输入电导记为 g_{in} 如式(21b). 当自振荡存在时恒有 $y_{in}=0, b_{in}=0, g_{in}=0$.

$$y_{in} = g_{in} + jb_{in} = g_F + g_{mh} + j[\omega_h C - 1/(\omega_h L)] \quad (21a)$$

$$g_{in} = g_F + g_{mh} = g_F - a_1 + 3a_3(U_{hm}^2 + 2U_{pm}^2)/4 + 5a_5(U_{hm}^4 + 6U_{hm}^2 U_{pm}^2 + 3U_{pm}^4)/8 = f(U_{hm}, U_{pm}) \quad (21b)$$

图3(a)分两种情况:第一种情况,当 $U_{Fm}=0$ 时,画出 $g_{in}=f(U_{hm})$ 曲线如图4,当复功率平衡时 $g_{in}=0$,可求出幅值与频率为 $U_{hm0}=10; \omega_h=800$. 曲线与横轴交点A的横坐标值就是自振幅值 U_{hm0} . 交点A是一个稳定平衡态,在外力扰动下,有自动恢复到平衡点的能力.

第二种情况,当 $U_{Fm} \neq 0$ 时,采用式(12)求 g_{mh} ,其中包含受迫分量 U_{pm} 对自振分量 U_{hm} 的耦合影响,因而输入电导 $g_{in}=f(U_{hm}, U_{pm})$ 如式(21b),自振荡自激保持实功率平衡条件是 $g_{in}=0$,只有一个方程无法求得两个变量 (U_{hm}, U_{pm}) ;说明单独由自振分部网络无法确定 U_{hm} ;要与受迫分部网络联解才能求出 (U_{hm}, U_{pm}) .

根据表1可以做出,当 $U_{Fm} \neq 0$ 时,在不同 U_{pm} 值下的曲线 $g_{in}=f(U_{hm})$ 如图5.

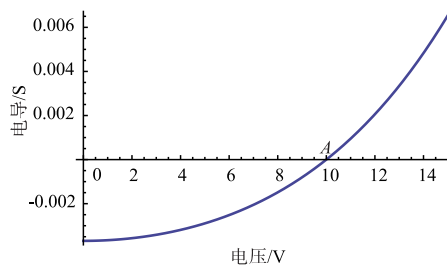
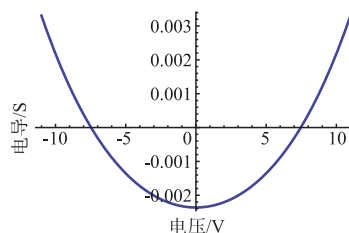
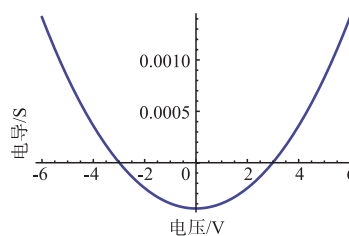


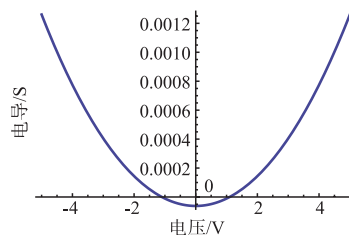
图4 $U_{Fm}=0$ 的曲线 $g_{in}=f(U_{hm})$



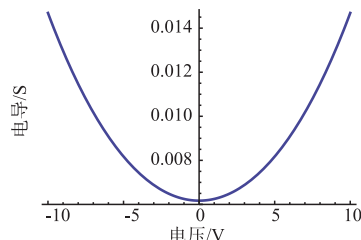
(a) $U_{Fm}=10, U_{pm}=4.544$



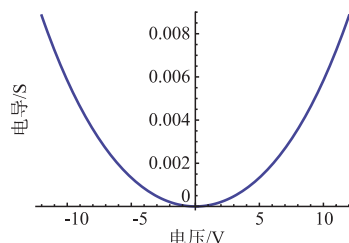
(b) $U_{Fm}=15, U_{pm}=6.825$



(c) $U_{Fm}=18, U_{pm}=7.17$ 自振存在



(d) $U_{Fm}=20, U_{pm}=10.82$ 自振消失



(e) 临界值 $U_{Fm}=18.51, U_{pmcr}=7.219$

图5 U_{Fm} 变化时曲线 $g_{in}=f(U_{hm})$ 的变化情况

随着 U_{Fm} 的增大 U_{pm} 也逐步递增, 曲线 $g_{in} = f(U_{hm})$ 向上移动, 与横轴交点座标值 U_{hm} 逐步递减; 自振分量逐步减小, 当曲线向上移动到完全在横轴上方, 和横轴没交点时自振消失. 图 5(a) 从 $U_{Fm} = 10, U_{pm} = 4.54$ 开始, 做出对应于表 1(a) 数据 u_{10b} 的曲线, 图 5(c) 对应于表 1(c) 的 $U_{Fm} = 18, U_{pm} = 7.17$ 的数据, 此时在一定范围内纵座标 $g_{in} \leq 0$; 说明自振还存在, 但自振幅值 U_{hm} 已经很小了. 当外激励升到 $U_{Fm} = 20$ 时对应于表 1(d), 受迫分量到达 $U_{pm} = 10.82$ 画出图 5(d) 曲线说明, 当 $U_{pm} > U_{pmcr}$ 时, 对 U_{hm} 的任意取值 g_{in} 恒为正, 即自振恒消耗正功率, 最终无法维持而消失.

在图 5(c) 和 (d) 之间; 必然有曲线与横座标相切的临界值如图 5(e). 以式 (13) 的参数代入式 (21b) 可得式 (22a) 和 (22b), 联解 (22) 两式求得实数解为 $U_{hm} = 0, U_{pmcr} = 7.219$. 可见自振消失临界值是根据功率平衡理论求定的. 进一步求出相切临界值时的外激幅值 $U_{Fmcr} = 18.51$. 表 1 前四行数据和图 5(a) ~ (d) 是相对应的. 表 1 第五行数据和图 5(e) 并不对应.

$$\begin{aligned} g_{in} &= -3.6875 \times 10^{-3} + 3(U_{hm}^2 + 2U_{pm}^2) \times 10^{-5} + \\ &11(U_{hm}^4 + 6U_{hm}^2 U_{pm}^2 + 3U_{pm}^4) \times 10^{-7}/16 = 0 \quad (22a) \\ dg_{in}/dU_{hm} &= 6 \times 10^{-5} U_{hm} + 11(4U_{hm}^3 + 12U_{hm} U_{pm}^2) \\ &\times 10^{-7}/16 = 0 \quad (22b) \end{aligned}$$

3.5 受迫分量与复功率平衡

以表 1(c) 的 $U_{Fm} = 18$ 为例证, 在本例设激励源相量 U_{Fm} 的初相角 $\delta = 0$; 在自振存在情况下, 用表 1(c) 的数据, 验证图 3(b) 受迫分量所有支路复功率总和为零. 并且可以反过来, 根据受迫分量要遵守复功率平衡, 用相量法求出受迫分量的相量值, 印证表 1(c) 数据. 考虑自振分量对受迫分量的耦合影响表现在图 3(b) 的 g_{mfp} , 由于 $U_{pm} = (U_{pmr}^2 + U_{pmx}^2)^{1/2}$, 式 (9a) 是一个含三变量 (U_{hm}, U_{pmr}, U_{pmx}) 的代数方程; 由图 3(b) 求导纳 y_3 与阻抗 $z = 1/y_3$; 可用相量法导出相量方程如式 (23), 其实部与虚部各自平衡可列出两个式, 共可列三个方程联立求出上述三个变量. 两相量 U_{pv} 与 U_{Fm} 的相角差, 取决于图 3(b) 的网络阻抗参数 $z/(z + 1/g_F)$, 受迫分量 (U_{pmr}, U_{pmx}) 及其初相角 $P = \arctan(U_{pmx}/U_{pmr})$ 是可求确定的.

$$\begin{cases} y_3 = g_{mfp} + j[\omega_F C - 1/(\omega_F L)], z = 1/y_3 \\ U_{pv} = U_{pmr} + jU_{pmx} = U_{Fm} z/(z + 1/g_F) \end{cases} \quad (23)$$

4 耦合解的第二例证

4.1 求自振荡频率与幅值

例二 电路如图 2, 微分方程等同于例一的式 (15); 参数与伏安特性 i_N 不同于例一, 如式 (24b).

求外激 u_F 置零时, 自振幅值 U_{hm0} 与频率 ω_h ; 本例有

两个自振幅值如式 (25). 自振分量的基波输入电导 g_{in} 如式 (26) 作曲线如图 6; 与横轴有两个交点, P_1 是不稳定平衡态, 其横截距 $U_{hm1} = 8.94427$; P_2 是稳定平衡态, 其横截距 $U_{hm2} = 20$.

$$\begin{aligned} C &= 10^{-6}, L = 25/16, g_F = 38 \times 10^{-5}, a_1 = 2 \times 10^{-5} \\ a_3 &= 8 \times 10^{-6}, a_5 = 2 \times 10^{-8}, \omega_F = 1921 \quad (24a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_N &= a_1 u - a_3 u^3 + a_5 u^5, i'_N = (di_N/du) \times (du/dt) = g_N u \\ g_N &= a_1 - 3a_3 u^2 + 5a_5 u^4 \quad (24b) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} U_{hm1} = 8.94427, U_{hm2} = 20 \\ \omega_h^2 = 1/(CL) = \omega = 800^2 \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} g_{in} &= g_F + g_{mfb} = g_F + a_1 - 3a_3 U_{hm}^2/4 + 5a_5 U_{hm}^4/8 \\ &= 4/10000 - 6 \times 10^{-6} U_{hm}^2 + 10^{-7} U_{hm}^4/8 = f(U_{hm}) \quad (26) \end{aligned}$$

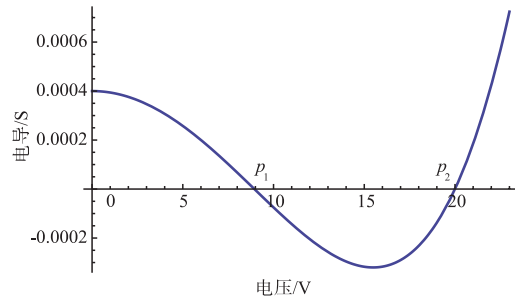


图6 曲线 $g_{in} = f(U_{hm})$

图 6 的曲线说明, 当初值 $U_0 > U_{hm2}$ 时, $g_{in} > 0$ 说明正功率消耗促使 U_{hm} 减小, 最后 U_{hm} 趋向 U_{hm2} . 当 $U_{hm2} > U_0 > U_{hm1}$ 时, $g_{in} < 0$ 说明功率多余促使 U_{hm} 增大, 最后 U_{hm} 也趋向 U_{hm2} ; 说明 P_2 是稳定平衡态. 当 $U_0 < U_{hm1}$ 时, $g_{in} > 0$ 说明正功率消耗, 会促使 U_{hm} 减小, 最后 U_{hm} 趋向零点. 则电路在小干扰时, 无法起振建立自振荡, 电路能起振建立自激振荡的条件是大初激值必须超过 $U_{hm1} = 8.9443$, 早期的无线电通讯理论称这种情况为硬激励起振. 建立自持振荡稳定幅值 $U_{hm2} = 20$, 对应交点 P_2 是个稳定极限环. 对应交点 P_1 是一个不稳定极限环.

4.2 用谐波平衡原理求表 2 的数据

作 U_{Fm} 变化时的数据列如表 2, 由前两行数据表 2(a) 和 2(b), 说明当考虑强迫分量的耦合影响, 为完成功率平衡逼使建立的自振电压幅值 $U_{hm} < U_{hm0}$, 其最后结局都要满足 $g_{in} = 0, U_{pm} < U_{pmcr}$ 说明自振存在有 $u = u_{ht} + u_{pt}$. 后两行数据表 2(c) 和 2(d), 说明自振已消失, 必有 $U_{pm} > U_{pmcr}, U_{hm} = 0, g_{in} > 0$; 网络在正阻尼情况下, 必然没有自激振荡. 编程运算可在开始时, 预设只包含受迫分量 $u = u_{pt}$, 也能得到相同结果, 有关重要结论和例一分析结果一致. 可仿例一, 用两个分部网络, 验证自振与受迫分量各自维持自身的复功率平衡; 也可用相量法求出自振幅值与受迫分量的相量值.

4.3 两种预设谐波项求解结果的对比

表 2 当 $U_{Fm} = 60$ 时, 如果程序预设谐波项如式 (18a), 做出表 2(a) 正确数据; 本文第 5 节做出相图 9(a) 自振存在; 如果用式 (18b) 做为预设谐波项, 则得出 20 组解全部是含有虚数的复根, 明明存在的实数解被丢失, 显然是一个重要的缺失与错误. 因此纠正最初谐

波项预设定的错误, 对于肯定功率平衡理论体系做出的结果, 发挥至关重要的作用. 关于受迫分量与自振分量最初谐波项预设定的形式是不同的. 自振分量初相角 h 是不定的; 而受迫分量初相角 p 指的是相量 U_{Fm} 与 U_{pv} 的夹角, 取决于图 3(b) 的网络阻抗参数, 因而是确定的, 各量关系如式 (27).

表 2 当 $U_{Fm} = 60, 70, 80, 90$ 时, 例二的主谐波解, 临界值 $U_{pmcr} = 16.7989V$, $U_{Fmcr} = 71.418V$

(a) $U_{Fm} = 60$	$u_{60} = -14.3422\cos[1921t] - 0.4931\sin[1921t] \pm 6.9192\sin[h + 800t]$ $U_{pm} = 14.3506 < U_{pmcr}$, $U_{hm} = 6.9192$, $g_{in} = 0$, self-oscillation existence
(b) $U_{Fm} = 70$	$u_{70} = -16.3169\cos[1921t] - 2.6654\sin[1921t] - 2.3172\sin[h + 800t]$ $U_{pm} = 16.5332 < U_{pmcr}$, $U_{hm} = 2.3172$, $g_{in} = 0$ self-oscillation existence
(c) $U_{Fm} = 80$	$u_{80} = -19.02355\cos[1921t] - 1.52314\sin[1921t]$, 可以预设 $u = u_{pt}$ $U_{pm} = 19.0844 > U_{pmcr}$, $U_{hm} = 0$, $g_{in} = 0.0010039 > 0$, self-oscillation disappearance
(d) $U_{Fm} = 90$	$u_{90} = -21.0302\cos[1921t] + 3.2702\sin[1921t]$, 可以预设 $u = u_{pt}$ $U_{pm} = 21.2829 > U_{pmcr}$, $U_{hm} = 0$, $g_{in} = 0.0026585 > 0$, self-oscillation disappearance

$$u_p = U_{pm} \sin(\omega_F t + p) = U_{pmr} \sin\omega_F t + U_{pmx} \cos\omega_F t \quad (27)$$

谐波分析法有一定局限, 等式两边的谐波系数平衡是一个数学方程的必然结果, 无法辩识这个求解结果是否完善. 功率平衡是一个经过证明的物理定律, 自振与受迫分量在任意情况下均应满足复功率平衡, 这是研究非线性振荡很重要的基础. 它必然要追问, $U_{Fm} = 60$ 时应该存在有实数解; 按照功率平衡理论求得临界值 U_{Fmcr} , U_{pmcr} 的结论, 最终可以发现这是程序运行的丢失; 根据该电路方程的物理实际; 在本例由于 (U_{hmr} , U_{hm}) 是两个不能同时被确定的物理量, 各谐波系数平衡列出四个方程只有三个是独立的; 但预设式 (18b) 有四个求解变量, 因而程序只能给出部份解, 有时给出的 20 组解都是包含虚数的复根, 一些有用合理的实数解被丢失了.

主谐波分析法建立在功率平衡理论上; 克服原有经典方法的缺陷, 推进谐波分析法进入更合理更正确的应用范围. 关于预设 u_{ht} 和 u_{pt} 两个谐波项必须引入两种形式不同的数学描写式 (18a) 才能获得正确合理的结果. 以上两个例证, 说明合理谐波项的预设, 对于获得正确结论有至关重要的影响. 当采用谐波平衡原理, 编写程序运算出现多达 20 ~ 25 组谐波解时, 经典的系数平衡求解结果, 无法提出如何选取合理谐波成份的正确方法, 有时满足方程的平衡是不稳定平衡态. 根据功率平衡理论, 将满足谐波平衡的解抽出来验算是否遵守复功率平衡, 是最好的检验方法; 并且可以进一步验证该平衡态是否是稳定平衡态.

4.4 用曲线图和 $g_{in} = 0$ 求自振消失临界值

作出对应表 2 中 (a) ~ (d) 四行数据的四个曲线图 7(a) ~ (d). 改变外激源从 $U_{Fm} = 60$ 起逐步递增至 U_{Fm}

$= 90$ 止; U_{pm} 也必然随之递增. 可发现随 U_{Fm} 与 U_{pm} 逐步递增, 交点横座标 U_{hm} 逐步减小; 当 $U_{Fm} = 70$ 时, 对应图 7(b) 曲线与横轴交点 $U_{hm} = 2.317$; 当增大到 $U_{Fm} = 80$ 时, 对应图 7(c) 的曲线与横轴没有交点, 显示对于任意的 U_{hm} , 恒有 $g_{in} > 0$ 说明自振消失. 在图 7(b) 和图 7(c) 之间, $g_{in} = f(U_{hm})$ 曲线和横轴必有一个切点如图 8, 联解相切两个条件式 (28a)、(28b), 可求出 $U_{pmcr} = 16.799V$ 是自振消失的临界点. 进一步求出该点的激励幅值 $U_{Fmcr} = 71.418V$.

$$g_{in} = g_F + g_{mfh} = 4 \times 10^{-4} - 6(U_{hm}^2 + 2U_{pm}^2) \times 10^{-6} + (U_{hm}^4 + 6U_{hm}^2 U_{pm}^2 + 3U_{pm}^4) \times 10^{-7} / 8 = 0 \quad (28a)$$

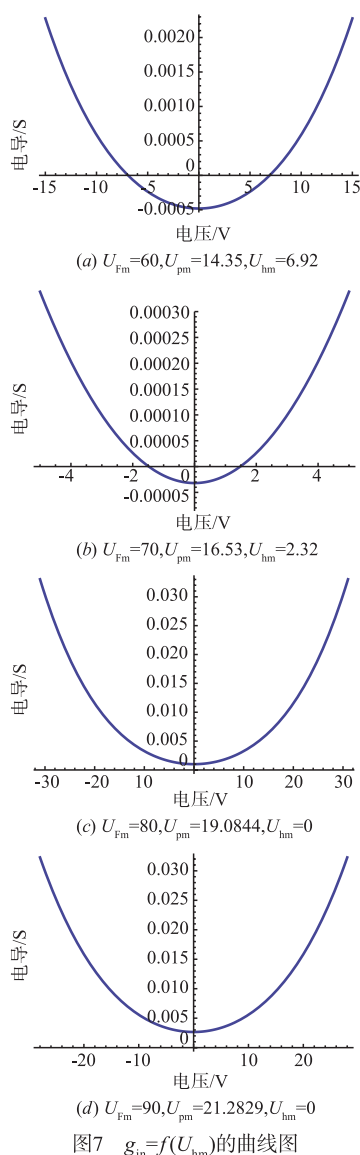
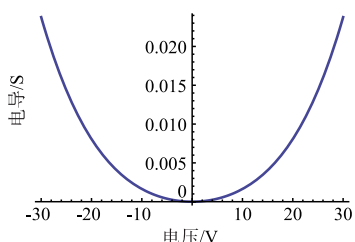
$$dg_{in}/dU_{hm} = -12U_{hm} \times 10^{-6} + (U_{hm}^3 + 3U_{hm} U_{pm}^2) \times 10^{-7} / 2 = 0 \quad (28b)$$

5 混频振荡包含的全体谐波成份

5.1 求全部谐波成份与振荡频率

以上表 1 和表 2 所显示的数据, 显然不是振荡解的全体成份; 而仅仅是其中的主体基本部份称为主谐波. 因此还有必要研究总体输出其他非主谐波成份. 两个不同频信号同时加到非线性元件如图 1, 其响应电流 i 会出现众多 ω_h 和 ω_F 的倍频 $n\omega_h$ 和 $n\omega_F$ 以及各种组合频率成份 ω_{hf} . 为书写简便起见, 记 $w_p = \omega_p t + p$; $w_h = \omega_h t + h$. 设输入信号如式 (29); 则响应电流 i 可表为式 (30a), 根据数学的二项式定理可得式 (30b), 记 $q = n - m$, 则式中乘积项 $u_p^{n-m} u_h^m = u_p^q u_h^m$ 产生组合频率成份 ω_{hf} , 其通式为 $\omega_{hf} = |\pm q\omega_h \pm m\omega_F|$, 式中 (m, q) 是零或正整数, 组合频率成份的最高阶次 $q + m = n$.

$$u = u_p + u_h = U_{pm} \sin(w_p) + U_{hm} \sin(w_h) \quad (29)$$

图7 $g_{in}=f(U_{hm})$ 的曲线图图8 曲线 $g_{in}=f(U_{hm})$ 与横轴相切, $U_{pmcr}=16.799V$

$$i=f(u)=f(u_p+u_h)=a_0+a_1(u_p+u_h)+a_2(u_p+u_h)^2+a_3(u_p+u_h)^3+\cdots+a_n(u_p+u_h)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(u_p+u_h)^n \quad (30a)$$

$$(u_p+u_h)^n=\sum_{m=0}^n\frac{n!}{m!(n-m)!}u_p^{n-m}u_h^m \quad (30b)$$

本文两个例证只讨论奇次幂高次项,不包含偶次幂偶

次谐波及直流项. 以三次幂式(31a)为例,用三角公式展开高次项如式(31b);经代入整理可得 i_1 代表主谐波如式(32),程序证明式(31)和(32)各结论正确性,并显示非主谐波 i_{non} 表达式.

$$i=a_1u+a_3u^3=a_1(u_p+u_h)+a_3[u_h^3+3u_h^2u_p+3u_hu_p^2+u_p^3] \quad (31a)$$

$$\begin{cases} u_h^3=[U_{hm}\sin(w_h)]^3=U_{hm}^3[3\sin(w_h)-\sin(3w_h)]/4 \\ u_h^2=[U_{hm}\sin(w_h)]^2=U_{hm}^2[1-\cos(2w_h)]/2 \end{cases} \quad (31b)$$

$$i=i_1+i_{non}, i_1=i_{1h}+i_{1p}=U_{hm}\{a_1+3a_3(U_{hm}^2+2U_{pm}^2)/4\}\sin w_h+U_{pm}\{a_1+3a_3(U_{pm}^2+2U_{hm}^2)/4\}\sin w_p \quad (32)$$

$$\begin{cases} g_{mth}=I_{1hm}/U_{hm}=i_{1h}/u_{ht}=a_1+3a_3U_{heq3}^2/4 \\ U_{heq3}^2=U_{hm}^2+2U_{pm}^2 \end{cases} \quad (33a)$$

$$\begin{cases} g_{mfp}=I_{1pm}/U_{pm}=i_{1p}/u_{pt}=a_1+3a_3U_{peq3}^2/4 \\ U_{peq3}^2=U_{pm}^2+2U_{hm}^2 \end{cases} \quad (33b)$$

混频理论说明,非线性特性可以用幂级数展开为多项式,关于混频的展开式,采用二项式定理和三角公式,展开两个信号所包含的多种频率成份,在多种多样谐波成份中,两个信号(ω_h, ω_F)各取其中的一次谐波成份如式(32),可以导出含三次幂的等效基波电导 g_{mth} 和 g_{mfp} 如式(33),这个结论和式(8)、(9)的结论一致;和功率平衡理论得到的等效基波电导完全一致.

程序展开全体谐波成份不一定都能满足图2微分方程的平衡,图2的解和图1是完全不同的. 对于图1有 $u=u_{pt}+u_{ht}$, 没有非主谐波电压;有非主谐波电流. 图2包含有非主谐波电压;其中主谐波电压 $u_1=u_{pt}+u_{ht}$, $u_{pt} \neq u_F$, $u=u_1+u_{non}$. 表1和表2求出的主谐波只是图2全体振荡解的主体基本部份. 图1电路全体谐波解;其包含的每一个谐波成份并非都能满足图2微分方程的平衡,最后必须验证该谐波是否满足功率平衡来确定. 全体成份 u 有时甚至不包含自振成份 u_{ht} , 而包含有关非主谐波成份.

5.2 用相图显示总体输出的振荡解

取例二参数如式(24),做出微分方程式(15)关于变量 $\{u, \dot{u}\}$ 的平面投影相图,对应表2四行数据,画出稳态相图如图9. 公共基频 ω_0 即(ω_h, ω_F)的最大公约数,网络中所有谐波项均为 ω_0 整数倍. 可见总体输出振荡解的角频率等于 ω_0 ;振荡周期 $T=2\pi/\omega_0$. 对于表2的数据而言;当自振存在时耦合振荡频率 $\omega_0=1$;振荡周期 $T=2\pi/\omega_0=6.28s$;其相图如图9(a)和(b). 当自振消失时受迫频率 $\omega_F=1921$;周期 $T=2\pi/\omega_F=(6.28/1921)s=3.27ms$;其相图如图9(c)和(d).

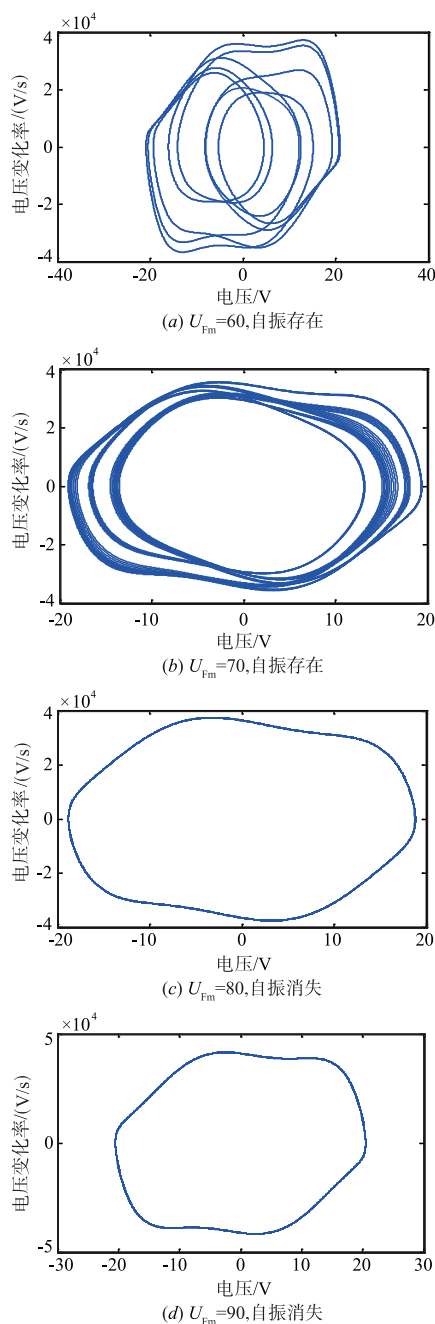


图9 表2四行数据做出的四个稳态相图

6 结论

基波分析法适用于求解自治电路,本文提出主谐波分析法,普遍适用于各种非自治电路;并用列表数据对照曲线图形的逐步演变,论述在一定条件下自振荡分量会消失.导出自振消失时外激幅值与受迫分量的临界值 U_{fmer} , U_{pmer} .

主谐波分析法可不列微分方程,根据功率平衡用相量法求出两个主谐波.并做出自振消失的独立判断,从而发现程序运行丢失实数解.

本文共提出求主谐波的三种方法:首先用谐波分析法,求出满足方程平衡的主谐波;其次用功率平衡理论将网络划分成两个分部,求出主谐波;最后用混频理论求出两个信号混频后的展开式,其中一次谐波成份即主谐波,前后共三种方法均能得到共同一致的结论.

参考文献

- [1] 夏承铨. 非线性电路[M]. 北京:人民邮电出版社,1986. 329-379.
- [2] 肖达川. 线性与非线性电路[M]. 北京:科学出版社,1992. 211-246.
- [3] 黄安基. 非线性振动[M]. 成都:西南交通大学出版社,1993. 205-259.
- [4] 褚亦清,李翠英. 非线性振动分析[M]. 北京:北京理工大学出版社,1996. 752-867.
- [5] 高金峰. 非线性电路与混沌[M]. 北京:科学出版社,2005. 97-128.
- [6] 冯久超,李广明. 功率平衡理论在研究非线性电路与混沌中的进展[J]. 华南理工大学学报,2012,40(11):13-18.
- [7] 黄炳华,钮利荣,蔺兰峰,孙春妹. 功率平衡基础上的基波分析法[J]. 电子学报,2007,35(10):1994-1998.
HUANG Bing-hua, NIU Li-rong, LIN Lan-feng, SUN Chun-mei. Fundamental wave analysis based on power balance[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(10):1994-1998. (in Chinese)
- [8] 黄炳华,黄新民,韦善革. 用基波平衡原理分析非线性振荡与混沌[J]. 通信学报,2008,29(1):65-70.
HUANG Binghua, HUANG Xinmin, WEI Shangge. Analysing nonlinear oscillation and chaos using fundamental wave balance principle[J]. Journal on Communications, 2008, 29(1):65-70. (in Chinese)
- [9] 黄炳华,黄新民,李世作. 功率平衡与基波分析法[J]. 电路与系统学报,2003,8(1):72-76.
- [10] 黄炳华,黄新民,张驰. 电子网络振荡与稳定的基波分析法[J]. 电子科技大学学报,2006,35(1):47-50.
- [11] 黄炳华,宋春宁,黄洪全. 非线性电子网络的基波分析法[J]. 固体电子学研究和进展,2003,23(1):35-41.
- [12] 黄炳华,黄新民,张海明,黄金川. 各类自激振荡的基波分析法[J]. 固体电子学研究和进展,2005,25(1):102-107.
- [13] 黄炳华,黄新民,王庆华. 用基波平衡原理分析非线性电子网络的稳定性[J]. 固体电子学研究和进展,2006,26(1):43-48.
- [14] 黄炳华,陈辰,韦善革,黎彬. 基波平衡原理的推广[J]. 固体电子学研究和进展,2008,28(1):57-62.
- [15] Binghua Huang, Guangming Li, Huijie Liu. Power balance theorem of frequency domain and its application [J]. Journal of Modern Physics, 2014, 23(5):1097-1108.

- [16] Atadan A S, Huseyin K. An intrinsic method of harmonic analysis for non-linear oscillations [J]. Journal of Sound Vibration, 2013, 48(4): 324 – 326.
- [17] Mickens R E. Comments on the method of harmonic balance [J]. Journal of Sound Vibration, 1984, 94(3): 456 – 460
- [18] Huang Bing-hua, Huang Xin-min, Li Hui. Main components of harmonic solutions of nonlinear oscillations [J]. Procedia Engineering, 2011, (16): 325 – 332 .
- [19] 黄炳华, 周珊, 林晓东. 非自治振荡电路的功率平衡 [J]. 固体电子学研究和进展, 2018, 38(5): 333 – 342.
- [21] 梁永清, 黄炳华. 非线性电路频域的功率平衡 [J]. 太原理工大学学报, 2014, 45(3): 328 – 333.
- [22] Binghua Huang, Xiaoyang He. Power balance of multi-harmonic components in nonlinear network [J]. Journal of Modern Physics, 2014. 37(5): 1321 – 1331.
- [23] 梁永清, 黄炳华. 用功率平衡原理分析超外差接收电路 [J]. 太原理工大学学报, 2015, 46(2): 201 – 205.

作者简介



黄炳华 男, 1940 年生于福建省, 教授, 当前主要研究非线性电路含多谐波成分的功率计算; 混频理论在非自治电路中的应用; 用功率平衡理论研究非线性振荡与混沌; 用主谐波的概念研究非自治电路的振荡解; 用新的坐标体系研究非线性系统的动态特性.

E-mail: gxuhbh@163.com

黄昌琴 女, 1982 年生于福建省, 讲师, 工学硕士. 近年主要从事研究: 智能控制系统设计及其应用.

E-mail: cqinhuang@163.com

蔡义明 男, 1976 年生于广西, 讲师, 工学硕士. 近年主要从事研究: 电力系统控制, 电路分析及应用.

E-mail: 42682799@qq.com