

波导缝隙外部半空间场矩阵元素的计算方法

邸英杰¹, 章日荣², 张淑娥¹

(1. 华北电力大学电子与通信工程系, 河北保定 071003; 2. 信息产业部电子第54研究所, 河北石家庄 050081)

摘 要: 本文证明了用 Galerkin 法对波导缝隙特性分析时, Fourier 变换法导出的缝隙外部半空间场的矩阵元素公式与一般积分法导出的公式是等价的. 同时把这两种方法中含有二重积分的公式简化为一重积分形式. 并描述了利用简化公式的优点.

关键词: 波导缝隙; Galerkin 法; 半空间并矢 Green 函数

中图分类号: TN823.24; TM154.1

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2002)05-0702-03

Approaches Computing the Matrix Elements of the Half Space Field on the Exterior Surface of the Waveguide Slot

DI Ying-jie¹, ZHANG Ri-rong², ZHANG Shu-e¹

(1. Dept. of Electronic and Communicate Engineering, the North China Electric Power University, Baoding, Hebei 071003, China;

2. The 54th Electronic Research Institute, the Ministry of Information Industry, Shijiazhuang, Hebei 050081, China)

Abstract: This paper demonstrates that in the Galerkin method analysis of waveguide slot's characteristics the matrix element expression, obtained by the Fourier method, of the half space field on the exterior surface of the waveguide slot is equivalent to that obtained by the general integral method. The double integrals in these expressions are reduced to single integrals. The advantages using the simplified expression are described.

Key words: waveguide slot; galerkin method; half space dyadic green function

1 引言

波导缝隙特性的理论分析在波导缝隙天线和馈源设计中具有十分重要的意义. 通过计算, 可以给出缝隙的设计参数, 如谐振长度、S 参数等. 虽然过去采用过其它数值方法进行研究, 但目前多数研究者采用 Galerkin 法^[1~4], 并且在该方法中选用的基函数、权函数为三角函数, 这样使计算公式更为简单.

对于波导宽壁上的缝隙问题的研究, 一般认为波导壁为无限大的导电平面^[1~4], 这样可以避免研究的困难. 所以缝隙向外部空间的辐射为半空间辐射. 在用 Galerkin 法研究波导宽壁上的缝隙时, 求解外部半空间对应的矩阵元素通常有两种方法: 一般积分法^[1~3], 和 Fourier 变换法^[4]. 这两种方法给出的矩阵元素计算公式都是二重积分形式. 我们在研究中发现, 由于被积函数有伪奇异点, 二重积分收敛较慢, 计算时间较长. 特别是 Fourier 法给出的积分公式, 是含有伪奇异点的无穷限积分, 计算时间更长. 这对波导缝隙特性的快速分析带来一定困难. 如果通过降低计算精度来减少计算时间, 将会导致理论计算结果误差的增大.

为了解决上述问题, 本文导出了半空间矩阵元素的一重积分形式的计算公式, 并证明了上述两种方法给出的计算公式是等价的. 这里给出的证明同时也是如何把 Fourier 法中的计算公式化为一重积分形式时的步骤. 通过实际计算发现, 采用一重积分形式的公式计算半空间场矩阵元素, 可以使计算

时间大大缩短.

2 两种计算方法

如图 1 所示, 对于波导宽壁上的缝隙, 一般假设波导壁为无限大平面, 并且假设缝隙上的场为:

$$E_z^s = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^s \sin\left(\frac{n\pi}{2l}(z+l)\right) \hat{x} \quad (1)$$

那么, 波导外部空间磁场的 z 分量为:

$$H_z^{\text{III}}(x, y, z) = j\omega\epsilon_0 \iiint_{\Sigma} G_{e2zz}^{\text{III}}(r, r') \hat{z} \cdot (n_2 \times E_2^s) ds' \quad (2)$$

其中, n_2 是缝隙表面法线矢量; G_{e2zz}^{III} 是满足边界条件 $n_2 \times \nabla \times \bar{G}_{e2}^{\text{III}} = 0$ 的半空间并矢 Green 函数 $\bar{G}_{e2}^{\text{III}}$ 的 zz 分量^[5].

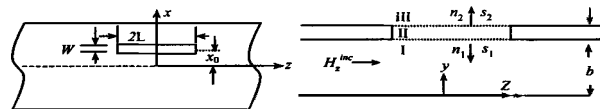


图 1 (a) 波导宽壁上缝隙的顶视; (b) 波导宽壁上缝隙的截面

用 Galerkin 法求解式(1)中的系数 E_n^s 时, 对于波导缝隙外部空间的切向磁场 $H_z^{\text{III}}(x, y, z)$, 其乘 $\sin(m\pi(z+l)/2l)$ 后在 s_2 上积分^[1~4,6], 结果称为波导缝隙外部半空间场的矩阵元素公式 $[H_z^{\text{III}}]_{mn} \cdot [H_z^{\text{III}}]_{mn}$ 表达式是四重积分, 其中含有伪奇异点, 但积分是收敛的. 为了缩短计算时间, 用数值方法计算它时, 常用的方法是把它化为二重积分. 这里简单地描述化为二重积分的通常方法.

2.1 一般积分法

在矩阵元素 $[H_z^{\text{III}}]$ 的公式中做变量替换: $z - z' = \xi$, $x - x' = \eta$, 然后对变量 x 和 z 积分, 使四重积分化为以下二重积分,

则矩阵元素的表达式为^[6]:

$$[H_z^{\text{III}}]_{mn} = -\frac{2j\omega\epsilon_0}{k_0} \begin{cases} (1 - (\frac{n\lambda_0}{2L})^2) \frac{1}{\lambda_0} f_c(n) + (1 + (\frac{n\lambda_0}{2L})^2) \frac{2L}{\lambda_0} \frac{1}{n} f_s(n), & n = m \\ \frac{1 + (-1)^{n+m} \frac{2L}{\lambda_0}}{(n^2 - m^2)\pi} \left[-m(1 - (\frac{n\lambda_0}{2L})^2) f_s(n) + n(1 - (\frac{m\lambda_0}{2L})^2) f_s(m) \right], & n \neq m \end{cases} \quad (3a)$$

其中,

$$f_c(n) = \int_0^w (w - \eta) d\eta \int_0^{2L} \frac{(2L - \xi) \cos(n\pi\xi/2L)}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}} e^{-jk_0 \sqrt{\eta^2 + \xi^2}} d\xi \quad (3b)$$

$$f_s(n) = \int_0^w (w - \eta) d\eta \int_0^{2L} \frac{\sin(n\pi\xi/2L)}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}} e^{-jk_0 \sqrt{\eta^2 + \xi^2}} d\xi \quad (3c)$$

2.2 Fourier 变换法

当 $y = y'$ 时, 式(2)中的函数 $\bar{G}_{e2z}^{\text{III}}$ 关于 x, z 的二维 Fourier 变换为^[7]:

$$F(k_x, k_z) = \frac{j}{4\pi^2 k_0^2} \frac{k_0^2 - k_z^2}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_z^2}} \cdot e^{-j(k_x x' + k_z z')} + f_0(k_x, k_z, x', z') \quad (4)$$

其中, 奇异项 $f_0(k_x, k_z, x', z')$ 满足:

$$\iint |f_0(k_x, k_z, x', z')| dx' dz' = 0$$

在 $[H_z^{\text{III}}]_{mn}$ 中 G_{e2z}^{III} 用 Fourier 反变换表示, 同时对 x', z' 积分,

$$\text{得到}^{[4]}: [H_z^{\text{III}}]_{mn} = -\frac{\omega\epsilon_0 w^2}{4k_0^2 l^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(k_z^2 - k_0^2) mn}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_z^2} (k_z^2 - (\frac{m\pi}{2L})^2) (k_z^2 - (\frac{n\pi}{2L})^2)} \right. \\ \left. \cdot \frac{\sin^2(k_x w/2)}{(k_x w/2)^2} \begin{cases} \cos^2(k_z l), & m, n = \text{odd} \\ \sin^2(k_z l), & m, n = \text{even} \\ 0, & (-1)^m + (-1)^n = 0 \end{cases} \right] dk_x dk_z \quad (5)$$

2.3 等价的两种计算方法

虽然以上两种方法得到的公式(3)和(5)在形式上不同, 但可以证明, 它们的计算结果是相同的. 以下证明由式(5)可以推出式(3). 因为不能用通常复变函数的方法化简式(5)中的积分, 所以, 这里给出的证明也是如何把 Fourier 法中的计算公式(5)简化为一重积分形式时的重要步骤.

由于,

$$\frac{1}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_z^2}} = \frac{1}{2j\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-j\varphi(k_0^2 - k_x^2 \cos\varphi + k_z^2 \sin\varphi)} d\rho$$

所以, 式(5)可以化为

$$[H_z^{\text{III}}]_{mn} = \frac{jmn\omega\epsilon_0 w^2}{2\pi k_0^2 l^2} \cdot \begin{cases} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-j\varphi I_1(\rho, \varphi) I_2(\rho, \varphi)} d\rho d\varphi, & m, n = \text{odd}, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-j\varphi I_1(\rho, \varphi) I_2(\rho, \varphi)} d\rho d\varphi, & m, n = \text{even}, \\ 0, & (-1)^m + (-1)^n = 0 \end{cases} \quad (6a)$$

$$\text{其中, } I_1(\rho, \varphi) = \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\sin^2(k_x w/2)}{(k_x w/2)^2} e^{-j\varphi k_x \cos\varphi} \right] dk_x \quad (6b)$$

$$I_2(\rho, \varphi) = \int_{-\infty}^\infty \frac{(k_z^2 - k_0^2) e^{-j\varphi k_z \sin\varphi} \begin{cases} \cos^2(k_z l), & m, n = \text{odd} \\ \sin^2(k_z l), & m, n = \text{even} \end{cases}}{(k_z^2 - (\frac{m\pi}{2L})^2) (k_z^2 - (\frac{n\pi}{2L})^2)} dk_z \quad (6c)$$

对于积分 $I_1(\rho, \varphi)$ 引入复变函数,

$$f(z) = \frac{2e^{j\varphi \cos\varphi z} - e^{j\varphi \cos\varphi z} - e^{j\varphi \cos\varphi z} - e^{j\varphi \cos\varphi z}}{z^2}$$

沿图 2 所示的积分路径积分, 当 $R \rightarrow \infty$ 和 $r \rightarrow 0$ 时, 可以得到:

$$I_1 = \begin{cases} \frac{2\pi}{w} (1 - \frac{|r \cos\varphi|}{w}), & |r \cos\varphi| \leq w \\ 0, & |r \cos\varphi| > w \end{cases} \quad (7)$$

在式(6) $I_2(\rho, \varphi)$ 的积分中, 当 $n \neq m$ 时, 引入复变函数,

$$f(z) = \frac{(z^2 - (2\pi \frac{2L}{\lambda_0})^2) \left(2e^{j\varphi \sin\varphi/2L} z \pm e^{j\varphi \sin\varphi/2L} z \pm e^{j\varphi \sin\varphi/2L} z \pm e^{j\varphi \sin\varphi/2L} z \right)}{(z^2 - (m\pi)^2) (z^2 - (n\pi)^2)}$$

其中, 上标号对应 $m, n = \text{odd}$ 下标号对应 $m, n = \text{even}$. 沿图 3 所示积分路径积分, 当 $R \rightarrow \infty$ 和 $r \rightarrow 0$ 时, 可以得到:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \begin{cases} l(g_2(m, n) + g_2(n, m)), & |r \sin\varphi| \leq 2L \\ 0, & |r \sin\varphi| > 2L \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{这里, } g_2(m, n) = \frac{(m^2 - (\frac{4L}{\lambda_0})^2) \sin(|\frac{r \sin\varphi}{2L}| m\pi)}{m(n^2 - m^2)}$$

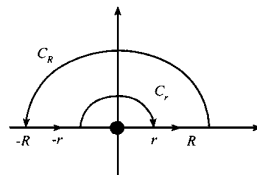


图 2 积分路径

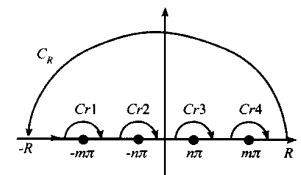


图 3 积分路径

当 $n = m$ 时, I_2 所表示的积分可以化为以下形式,

$$I_2 = \frac{l}{4} \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{(1 + (\frac{4L}{m\lambda_0})^2)}{k_z^2 - (m\pi)^2} g'_1(k_z) + \frac{(1 - (\frac{4L}{m\lambda_0})^2) k_z}{k_z^2 - (m\pi)^2} g'_1(k_z) \right] dk_z \quad (9)$$

其中, $g'_1(k_z)$ 是函数 $g_1(k_z)$ 的导数, 而

$$g_1(k_z) = 2\cos(\frac{r \sin\varphi}{2L} k_z) \pm \cos(\frac{r \sin\varphi}{2L} - 1) k_z \pm \cos(\frac{r \sin\varphi}{2L} + 1) k_z$$

这里, 上标号对应 $m = \text{odd}$ 下标号对应 $m = \text{even}$.

在式(9)中的第一项积分中引入复变函数,

$$f(z) = 2e^{j\varphi \sin\varphi/2L} z \pm e^{j\varphi \sin\varphi/2L} z \pm e^{j\varphi \sin\varphi/2L} z \pm e^{j\varphi \sin\varphi/2L} z / (z^2 - (m\pi)^2)$$

对于式(9)中的第二项积分, 引入复变函数,

$$f(z) = \frac{g_3(z)}{z^2 - (m\pi)^2}$$

这里,

$$g_3(z) = z - 2 \left| \frac{r \sin \varphi}{2l} \right| e^{j| r \sin \varphi / 2l | z} \mp \left| 1 - \frac{r \sin \varphi}{2l} \right| e^{j| 1 - (r \sin \varphi / 2l) | z} \\ \mp \left| 1 + \frac{r \sin \varphi}{2l} \right| e^{j| 1 + (r \sin \varphi / 2l) | z}$$

其中, $f(z)$ 和 $g_3(z)$ 中上标号对应 $m = \text{odd}$, 下标号对应 $m = \text{even}$. $f(z)$ 沿图 4 所示的路径积分, 当 $R \rightarrow \infty$ 和 $r \rightarrow 0$ 时, 可以得到:

$$I_2 = \frac{l}{2} \begin{cases} \pi (1 - (\frac{4l}{m\lambda_0})^2) (1 - \left| \frac{r \sin \varphi}{2l} \right|) \cos \left(\left| \frac{r \sin \varphi}{2l} \right| m\pi \right) \\ - \frac{1}{m} (1 + (\frac{4l}{m\lambda_0})^2) \sin \left(\left| \frac{r \sin \varphi}{2l} \right| m\pi \right), & |r \sin \varphi| \leq 2l \\ 0, & |r \sin \varphi| > 2l \end{cases} \quad (10)$$

最后, 把式 (7)、(8) 和 (10) 代入 (6a), 并令 $\eta = r \cos \varphi$, $\xi = r \sin \varphi$, 可以得到式 (3).

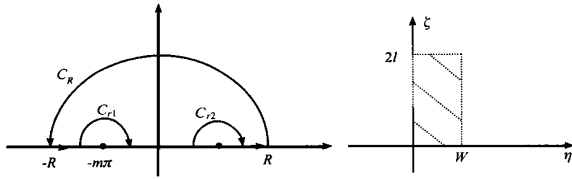


图 4 积分路径

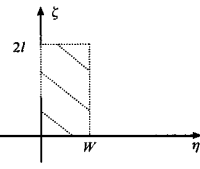


图 5 积分区域

3 矩阵元素的计算

当 n 较大时, 式 (3) 表示的积分 $f_c(n)$ 和 $f_s(n)$ 用数值法计算收敛比较慢. 为了缩短计算时间, 可以化为一重积分. 由于,

$$\int_0^w \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}} e^{-jk_0 \sqrt{\eta^2 + \xi^2}} d\eta = \frac{j}{k_0} (e^{-jk_0 \sqrt{w^2 + \xi^2}} - e^{-jk_0 \xi}) \quad (11a)$$

以及令 $\eta = r \cos \varphi$, $\xi = r \sin \varphi$ (参看图 5) 时, 引入以下函数:

$$f_1(a, r_0) = \int_0^{r_0} (2l - r \cos \varphi) e^{-jk_0 ar} dr \\ = \frac{j2l}{k_0 a} (e^{-jk_0 ar_0} - 1) - \frac{j r_0}{k_0 a} \left(e^{-jk_0 ar_0} + \frac{e^{-jk_0 ar_0} - 1}{jk_0 ar_0} \right) \sin \varphi \quad (11b)$$

$$f_2(a, r_0) = \int_0^{r_0} e^{-jk_0 ar} dr = \frac{j}{k_0 a} (e^{-jk_0 ar_0} - 1) \quad (11c)$$

把积分 $f_c(n)$ 和 $f_s(n)$ 化成以下一重积分形式:

$$f_c(n) = - \frac{j}{k_0} \int_0^{2l} (2l - \xi) \cos(n\pi\xi/2l) (e^{-jk_0 \sqrt{w^2 + \xi^2}} - e^{-jk_0 \xi}) d\xi \\ + \frac{w}{2} \int_0^{\tan^{-1} \frac{2l}{w}} \left\{ f_1 \left(1 - \frac{n \sin \varphi}{4l/\lambda_0}, \frac{w}{\cos \varphi} \right) + f_1 \left(1 + \frac{n \sin \varphi}{4l/\lambda_0}, \frac{w}{\cos \varphi} \right) \right\} d\varphi \\ + \frac{w}{2} \int_{\tan^{-1} \frac{2l}{w}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ f_1 \left(1 - \frac{n \sin \varphi}{4l/\lambda_0}, \frac{2l}{\sin \varphi} \right) + f_1 \left(1 + \frac{n \sin \varphi}{4l/\lambda_0}, \frac{2l}{\sin \varphi} \right) \right\} d\varphi \quad (12a)$$

$$f_s(n) = - \frac{j}{k_0} \int_0^{2l} \sin(n\pi\xi/2l) (e^{-jk_0 \sqrt{w^2 + \xi^2}} - e^{-jk_0 \xi}) d\xi \\ - \frac{jw}{2} \int_0^{\tan^{-1} \frac{2l}{w}} \left\{ f_2 \left(1 - \frac{n \sin \varphi}{4l/\lambda_0}, \frac{w}{\cos \varphi} \right) - f_2 \left(1 + \frac{n \sin \varphi}{4l/\lambda_0}, \frac{w}{\cos \varphi} \right) \right\} d\varphi \\ - \frac{jw}{2} \int_{\tan^{-1} \frac{2l}{w}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ f_2 \left(1 - \frac{n \sin \varphi}{4l/\lambda_0}, \frac{2l}{\sin \varphi} \right) - f_2 \left(1 + \frac{n \sin \varphi}{4l/\lambda_0}, \frac{2l}{\sin \varphi} \right) \right\} d\varphi \quad (12b)$$

4 结论

通过以上分析知道, 对于波导缝隙外部空间场的矩阵元素的计算, Fourier 变换法与一般积分法给出的含有二重积分的计算公式是等价的, 它们都可以化为一重积分形式. 利用一重积分公式计算半空间场的矩阵元素, 可使计算时间大大缩短, 更利于对波导缝隙特性的分析.

参考文献:

- [1] Lyon R W, et al. Efficient moment method analysis of radiation slots in a thick walled rectangular waveguide [J]. IEE Proc, 1981, Pt H-128 (4): 197-205.
- [2] Garb Kh, et al. Analysis of Longitudinal slots in ridged waveguides using a hybrid finite element galerkin technique [J]. IEEE Trans, 1994, AP42(6): 833-839.
- [3] Rengarajan S R. Compound radiating slots in rectangular waveguides [J]. IEEE Trans, 1989, AP37(9): 1116-1123.
- [4] Josefsson L G. Analysis of Longitudinal slots in rectangular waveguides [J]. IEEE Trans, 1987, AP35(12): 1351-1357.
- [5] Tai C T. Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory [M]. New York: 2nd ed, IEEE Press, Piscataway, 1993. 313-314.
- [6] 邱英杰. 梯形单脊波导缝隙天线的研究及应有 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 1999.

作者简介:



邱英杰 男, 1962 年生于河北, 1995 年在北京师范大学获无线电物理专业理学硕士学位, 1999 年在西安电子科技大学获电磁场与微波技术专业工学博士学位, 中国电子学会高级会员, 现主要从事天线、毫米波技术及光通信等方面的研究.



章日荣 男, 1931 年出生, 研究员、博士生导师, 电子学会会士, 国家有突出贡献专家, 全国劳动模范, 长期从事通信、遥感、测控和侦察对抗等天线研究工作, 获国家级、部级科技奖 8 项, 著有专著 4 部, 发表论文 105 篇, 获全国优秀图书一等奖一部, 中国电子学会论文奖三篇.