

# 基于 Grassmann 流形的非相干空时码设计

彭秋平, 彭立, 杨玲玲

(华中科技大学电信系, 武汉光电国家实验室, 湖北武汉 430074)

**摘要:** 本文研究在 Grassmann 流形上构造非相干酉空时码的代数方法. 首先提出一类发射天线数和相干时间都为任意大小的满速率满分集相干空时码, 然后采用非线性指数映射方式, 将该相干空时码映射到 Grassmann 流形上, 生成 Grassmann 非相干酉空时码. 新构造的 Grassmann 酉空时码比其它相同发射天线的酉空时码具有更高的频谱效率和更优的误码率性能.

**关键词:** 空时码; Grassmann 流形; 酉矩阵; 指数映射; 自由度

**中图分类号:** TN929.5      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2011) 07-1497-05

## Noncoherent Space-Time Codes Based on Grassmannian

PENG Qiu-ping, PENG Li, YANG Ling-ling

(Department of Electronic and Information Engineering, Huazhong University of Science and Technology,  
Wuhan National Laboratory for Optoelectronics, Wuhan, Hubei 430074, China)

**Abstract:** We mainly study on the design of noncoherent space-time code based on Grassmannian with algebraic method. First of all, we present a new family of full-rate and full-diversity coherent space-time codes with arbitrary number of transmit antennas and coherent time. Then our noncoherent space-time codes can be built from the coherent space-time codes via a non linear map called exponential map. With the same number of transmit antennas, the new noncoherent space-time code have better performance than the present code.

**Key words:** space-time code; Grassmann manifold; unitary matrix; exponential map; degree of freedom

### 1 引言

为了在衰落环境中实现高效可靠的信息传输, 基于多输入多输出(MIMO)系统的空时码成为无线通信领域的研究热点. 传统的 MIMO 空时码, 又称为相干空时码, 需要接收端事先知道信道状态信息(CSI), 通常采取的方法是发射端发射导频信号, 接收端利用导频信号估计信道状态信息. 但在信道状态信息变化很快的快衰落信道上, 如高速移动环境, 需要耗时估计信道状态信息的相干空时码并不可取. 为此文献[1]提出接收端不需要知道信道状态信息的非相干酉空时调制解调系统, 并对其信道容量和误码率性能进行了研究. 文献[2]研究了具体非相干酉空时调制技术, 此后, 非相干酉空时码引起了广泛关注.

文献[3]把 Grassmann 流形  $G_{T, M}^C$  这一数学工具引入非相干空时码设计, 并且计算出在高信噪比情况下的近似信道容量. 文献[4]研究了用计算机搜索的方法设计 Grassmann 星座图, 文献[5]用代数的方法提出了一种 Grassmann 非相干空时编码方案.

本文提出的 Grassmann 非相干酉空时码是对文献[5]设计方法的发展. 每一个酉空时码字对应 Grassmann 流形上的一个点, 设计准则是使得 Grassmann 流形上各酉空时码字点之间的最小弦距离达到最大. 而 Grassmann 流形上任意一点与该点的切空间具有一一对应的指数映射关系<sup>[5-7]</sup>, 利用这个性质本文在 Grassmann 流形的切空间中设计相干空时码, 然后再通过指数映射构造出 Grassmann 流形上的非相干酉空时码.

文中利用代数对 BPSK 或 QPSK 的调制符号进行线性组合和旋转操作<sup>[8-10]</sup>, 在此基础上, 本文提出一种发射天线  $m$  和相干时间  $t$  的相干空时码类  $B_{m \times t}$ , 并将这类相干空时码映射到 Grassmann 流形上, 生成了一类发射天线  $M = m$ , 相干时间  $T = m + t$  的 Grassmann 非相干酉空时码  $X_{T \times M}$ . 为了使非线性指数映射的逆映射存在, 需对变换矩阵  $B_{m \times t}$  的奇异值施加约束条件, 为此, 引入缩放因子  $\alpha$ , 并讨论了  $\alpha$  的选取问题. 所构造的非相干酉空时码能够完全利用 Grassmann 流形的自由度 (degree of freedom)<sup>[3]</sup>, 从而使得频谱利用率达到最大化, 与现有非相干酉空时码相比, 误码率性能得到改善.

## 2 预备知识

### 2.1 建立在 Grassmann 流形上的 MIMO 系统模型

本文采用的信道模型是 Marzetta 和 Hochwald 提出的准静态平坦瑞利衰落信道,即在  $T$  个发射符号间隔内,信道衰落系数维持不变<sup>[1]</sup>.发射天线数目为  $M$ ,接收天线数目为  $N$ ,信道模型为:

$$\mathbf{Y}_{T \times N} = \mathbf{X}_{T \times M} \mathbf{H}_{M \times N} + \sqrt{\frac{M}{\rho T}} \mathbf{W}_{T \times N} \quad (1)$$

其中下标代表各自的矩阵维数.  $\mathbf{H}$  是信道衰落系数矩阵,其  $MN$  个元素是服从  $CN(0,1)$  的独立同分布复高斯变量;  $\mathbf{W}$  是加性噪声矩阵,其  $TN$  个元素也是服从  $CN(0,1)$  的独立同分布复高斯变量.  $\mathbf{X}$  是发射信号矩阵,它是满足条件  $\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} = \mathbf{I}_M$  的酉矩阵,  $\mathbf{Y}$  是接收信号矩阵,  $\rho$  代表每根接收天线处的信噪比(SNR),  $\mathbf{I}_M$  是  $M \times M$  的单位矩阵,  $(\cdot)^\dagger$  代表共轭转置.

文献[3]证明了容量可达的非相干酉空时矩阵  $\mathbf{X}$  是由一个酉子空间  $\Omega_X$  与一个独立的对角线矩阵的乘积构成的,并且未知的衰落信道系数矩阵  $\mathbf{H}$  只会干扰对角线矩阵,不会影响  $\Omega_X$ .换句话说,由  $\mathbf{X}$  的  $M$  个  $T$  维列矢量所张成的复数域空间  $\Omega_X$  不会因  $\mathbf{H}$  的影响而改变,  $\Omega_X$  实际上是  $T$  维复数域空间  $\mathbf{C}^T$  的一个  $M$  维子空间<sup>[3]</sup>.若把需要发射的信息以发射矩阵  $\mathbf{X}$  的形式传输,就意味着将信息映射到  $\mathbf{X}$  的列向量所张成的子空间  $\Omega_X$  上,那么接收端不需要知道信道状态信息  $\mathbf{H}$  就能从接收信号矩阵解码出发射的信息.研究表明非相干酉空时码的  $M$  维线性子空间集合等效于 Grassmann 流形,或者说每一个  $T \times M$  酉矩阵等效于 Grassmann 流形上的一个点.因此可以采用 Grassmann 流形的数学分析方法来设计发射信号矩阵  $\mathbf{X}$ .

### 2.2 Grassmann 流形基础知识

流形(Manifold)是局部同胚于欧几里得空间的拓扑空间.在流形上每个点的邻域内,一个同胚将该点映射成欧几里得空间的  $n$  维球  $\mathbf{R}^n$ ,此时流形的维数为  $n$ .本文涉及的  $T$  维复数域空间  $\mathbf{C}^T$  中的所有  $M$  维线性子空间组成的集合,具有流形结构,称之为 Grassmann 流形,用符号  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  表示,定义为:

$$\mathbf{G}_{T,M}^C \triangleq \{ \langle \Phi \rangle \mid \Phi^\dagger \Phi = \mathbf{I}_M \} \quad (2)$$

其中  $\langle \Phi \rangle$  表示由酉矩阵  $\Phi$  的列向量张成的子空间,或满足条件  $\Phi^\dagger \Phi = \mathbf{I}_M$  所有  $\Phi$  矩阵构成的集合.  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  可用酉群  $U(n)$  的商空间表示<sup>[7]</sup>:

$$\mathbf{G}_{T,M}^C = U(T) / (U(M) \times U(T-M)) \quad (3)$$

由于酉群  $U(n)$  的实维度为  $\dim_{\mathbf{R}} U(n) = n^2$ ,根据  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  的商空间表达式(3),可得  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  实维度为:

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{G}_{T,M}^C = T^2 - M^2 - (T-M)^2 = 2M(T-M) \quad (4)$$

由此可知  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  的复数域维度为  $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{G}_{T,M}^C = M(T-M)$ ,这意味着  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  上非相干酉空时码可以利用的自由度为  $M(T-M)$ ,因此可以达到的最大符号传输率为  $M(1 - (M/T))$ .

文献[7]给出了  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  上任意一点  $\mathbf{Q}$  处的切空间是由下列矩阵构成的集合:

$$\Delta = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

其中  $\mathbf{B} \in \mathbf{C}^{M \times (T-M)}$ ,点  $\mathbf{Q}$  的选取完全是任意的,为了简化计算,选取  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_{T,M} = [\mathbf{I}_M, \mathbf{0}_{T-M}]^\dagger$  作为  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  上的参照子空间.式(5)定义的切空间的维度与  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  的维度一致,也是  $M(T-M)$ .根据李群理论,  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  切空间上的点通过指数映射可以投影成  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  上的点<sup>[5]</sup>.所以可以用切空间的指数形式表示  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  上的点:

$$\mathbf{X} = \left[ \exp \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \right] \mathbf{I}_{T,M} \quad (6)$$

下面采用矩阵的奇异值分解(SVD)技术来简化式(6)的计算.对复矩阵  $\mathbf{B}$  进行奇异值分解:

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}_{M \times M} \mathbf{\Lambda}_{M \times (T-M)} \mathbf{V}_{(T-M) \times (T-M)}^\dagger \quad (7)$$

其中  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  是酉矩阵,  $\mathbf{\Lambda}$  的值为:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_M & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  是矩阵  $\mathbf{B}$  的奇异值.把式(7)代入式(6)可以得出  $\mathbf{X}$  的简化计算表达式:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{UCU}^\dagger \\ \mathbf{VSU}^\dagger \end{pmatrix}_{T \times M} \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \cos \lambda_M \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sin \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sin \lambda_M \end{pmatrix}^\dagger.$$

## 3 Grassmann 非相干酉空时码的设计

### 3.1 设计准则

文献[5]给出了 Grassmann 空时码的设计准则.设  $\Omega_i, \Omega_j$  分别表示由  $\mathbf{X}_i$  和  $\mathbf{X}_j$  的列向量所张成的子空间,且  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M)$  代表  $\Omega_i$  和  $\Omega_j$  之间的主角<sup>[6]</sup>,那么  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  上两个点之间的弦乘积距离为:

$$\Theta_{i,j} = \prod_{m=1}^M \sin^2 \theta_m \quad (9)$$

Grassmann 空时码设计准则为  $\max_C \min_{\mathbf{X}_i \neq \mathbf{X}_j \in C} \Theta_{i,j}$ ,要求最小弦乘积距离达到最大.为了尽可能增大频谱利用率,本文设计的非相干酉空时码集由较多的码字构成,在发射天线数和相干时间相同的情况下,增加码字数量意

味着码字之间的最小距离减小,故两个码字之间的主角也随之减小,所以式(9)可以简化为:

$$\Theta_{i,j} = \prod_{m=1}^M \sin^2 \theta_m \approx \prod_{m=1}^M \theta_m^2 \quad (10)$$

由式(6)可知,子空间  $\Omega_i$  和参考子空间  $\Omega_0$  之间的弦乘积距离  $\Theta_{i,0}$  等于矩阵  $\mathbf{B}_i$  所有奇异值的乘积.而相干空时码<sup>[8]</sup>的设计原则是最大化编码增益,也就是最大化最小奇异值的乘积.因而可以利用相干空时码来替代矩阵  $\mathbf{B}$ ,再利用式(6)来设计  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  上的非相干空时码.

### 3.2 相干空时码 $\mathbf{B}$ 的设计

相干空时码  $\mathbf{B}_{m \times t}$  的编码过程就是把传统的调制符号序列  $\mathbf{s} = (s_1 \ s_2 \ \dots \ s_{mt})$  中的  $mt$  个符号映射到矩阵  $\mathbf{B}_{m \times t}$  的过程,其中  $s_i (i = 1, 2, \dots, mt)$ , 可以是 BPSK 或 QPSK 调制符号.由任意二进制信源调制映射成复数符号,然后按照先后顺序截取  $mt$  个符号组成  $\mathbf{s}$ .也就是说,每发射一个相干空时码字  $\mathbf{B}_{m \times t}$ ,就发射了  $mt$  个调制符号.

文献[8]给出如下相干空时码的设计准则:

**行列式准则** 对于所有不同的符号向量对  $(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ , 令  $\mathbf{A} \triangleq \mathbf{B}(\mathbf{s}) - \mathbf{B}(\mathbf{s}')$ , 矩阵  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$  的非零特征值为  $\lambda_j (j = 1, \dots, r)$ , 那么对于所有的  $\mathbf{A}$ , 最小的  $(\prod_{j=1}^r \lambda_j)^{1/r}$  是这个空时码  $\mathbf{B}$  的编码增益,应当使其最大化.

满足上述设计准则,意味着寻找最优空时码矩阵

$\mathbf{B}$ , 使编码增益(即最小  $(\prod_{j=1}^r \lambda_j)^{1/r}$ ) 达到最大.受文献

$$\mathbf{Z}_{m \times t} = \mathbf{L}_{m \times m} \mathbf{U}_{m \times t} \mathbf{R}_{t \times t} = \begin{bmatrix} 1 & \theta & \theta^2 & \dots & \theta^{m-1} \\ 1 & j\theta & j^2\theta^2 & \dots & j^{m-1}\theta^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & j^{m-1}\theta & j\theta^2 & \dots & j^{m-2}\theta^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & s_{m+1} & \dots & s_{(t-1)m+1} \\ s_2 & s_{m+2} & \dots & s_{(t-1)m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_m & s_{2m} & \dots & s_{mt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \phi^{t-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$= \begin{bmatrix} s_1 + \theta s_2 + \dots + \theta^{m-1} s_m & \phi(s_{m+1} + \theta s_{m+2} + \dots + \theta^{m-1} s_{2m}) & \dots & \phi^{t-1}(s_{(t-1)m+1} + \theta s_{(t-1)m+2} + \dots + \theta^{m-1} s_{mt}) \\ s_1 + j\theta s_2 + \dots + j^{m-1}\theta^{m-1} s_m & \phi(s_{m+1} + j\theta s_{m+2} + \dots + j^{m-1}\theta^{m-1} s_{2m}) & \dots & \phi^{t-1}(s_{(t-1)m+1} + j\theta s_{(t-1)m+2} + \dots + j^{m-1}\theta^{m-1} s_{mt}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 + j^{m-1}\theta s_2 + \dots + j^{m-2}\theta^{m-1} s_m & \phi(s_{m+1} + j^{m-1}\theta s_{m+2} + \dots + j^{m-2}\theta^{m-1} s_{2m}) & \dots & \phi^{t-1}(s_{(t-1)m+1} + j^{m-1}\theta s_{(t-1)m+2} + \dots + j^{m-2}\theta^{m-1} s_{mt}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

(c) 从矩阵  $\mathbf{Z}_{m \times t}$  的第二行开始,逐行向右移动一位,最终得到相干码字矩阵  $\mathbf{B}_{m \times t}$ .

$$\mathbf{B}_{mt} = \begin{bmatrix} s_1 + \theta s_2 + \dots + \theta^{m-1} s_m & \phi(s_{m+1} + \theta s_{m+2} + \dots + \theta^{m-1} s_{2m}) & \dots & \phi^{t-1}(s_{(t-1)m+1} + \theta s_{(t-1)m+2} + \dots + \theta^{m-1} s_{mt}) \\ \phi^{t-1}(s_{(t-1)m+1} + j\theta s_{(t-1)m+2} + \dots + j^{m-1}\theta^{m-1} s_{mt}) & s_1 + j\theta s_2 + \dots + j^{m-1}\theta^{m-1} s_m & \dots & \phi^{t-2}(s_{(t-2)m+1} + j\theta s_{(t-2)m+2} + \dots + j^{m-1}\theta^{m-1} s_{(t-1)m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots \phi^{t-1}(s_{(t-1)m+1} + j^{m-1}\theta s_{(t-1)m+2} + \dots + j^{m-2}\theta^{m-1} s_{mt}) & s_1 + j^{m-1}\theta s_2 + \dots + j^{m-2}\theta^{m-1} s_m & \dots & \phi(s_{m+1} + j^{m-1}\theta s_{m+2} + \dots + j^{m-2}\theta^{m-1} s_{2m}) \dots \end{bmatrix} \quad (12)$$

本文提出的相干空时码  $\mathbf{B}_{m \times t}$ , 其编码增益为:

$\delta_{B_{m \times t}(\omega)} = \min[\det(\mathbf{B}_{m \times t} \mathbf{B}_{m \times t}^\dagger)]^{1/2}$ . 对 BPSK 或 QPSK 调

[9,10]利用代数数设计相干空时码的启发,本文提出一种发射天线  $m$  和相干时间  $t$  的满速率相干空时码  $\mathbf{B}_{m \times t}$ , 其中  $m$  和  $t$  可以是任意正整数.具体设计步骤如下:

(a) 首先,本文创建了三种类型的矩阵:未编码符号矩阵  $\mathbf{U}_{m \times t}$ , 线性组合矩阵  $\mathbf{L}_{m \times m}$  以及旋转矩阵  $\mathbf{R}_{t \times t}$ , 这三种矩阵分别具有以下形式:

$$\mathbf{U}_{m \times t} = \begin{bmatrix} s_1 & s_{m+1} & \dots & s_{(t-1)m+1} \\ s_2 & s_{m+2} & \dots & s_{(t-1)m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_m & s_{2m} & \dots & s_{mt} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{m \times m} = \begin{bmatrix} 1 & \theta & \theta^2 & \dots & \theta^{m-1} \\ 1 & j\theta & j^2\theta^2 & \dots & j^{m-1}\theta^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & j^{m-1}\theta & j\theta^2 & \dots & j^{m-2}\theta^{m-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{t \times t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \phi^{t-1} \end{bmatrix}$$

未编码矩阵  $\mathbf{U}_{m \times t}$  是由符号向量  $\mathbf{s}$  中的元素按列依次排列而成.其中  $\phi^i = \theta, \theta = e^{i\omega}$  是一个代数数,这里  $i = \sqrt{-1}$ , 而  $\omega$  是一个待优化的参数.参数  $j$  的取值条件为确保矩阵  $\mathbf{L}_{m \times m}$  的行列式不为 0.

(b) 对未编码矩阵  $\mathbf{U}_{m \times t}$ , 先左乘线性组合矩阵  $\mathbf{L}_{m \times m}$ , 再右乘旋转矩阵  $\mathbf{R}_{t \times t}$ , 得到矩阵  $\mathbf{Z}_{m \times t}$ :

制符号序列  $\mathbf{s} = (s_1 \ s_2 \ \dots \ s_{mt})$  进行线性组合,以编码增益最大为目标,在范围  $(0, \pi/2)$  内,利用计算机搜索最优  $\omega$ .

### 3.3 Grassmann 非相干酉空时码设计

从相干空时矩阵  $\mathbf{B}$  到  $\mathbf{G}_{T,M}^C$  上非相干酉空时矩阵  $\mathbf{X}$  的代数映射必须是单值可逆映射,这要求式(6)的指数映射存在逆映射,也即式(6)的简化运算式(8)存在逆矩阵,由此推出式(8)中的  $\cos\lambda_m$  和  $\sin\lambda_m$  应该是单调函数,所以  $\lambda_m$  的约束条件为:

$$\max_m \lambda_m(\mathbf{B}_i) \leq \frac{\pi}{2}, \forall i \quad (13)$$

和  $m=0, 1, \dots, M-1$

其中  $\lambda_m(\mathbf{B}_i)$  是任意相干码字  $\mathbf{B}_i$  的第  $m$  个奇异值,等于子空间  $\Omega_i$  和参考空间  $\Omega_0$  的第  $m$  个主角.这意味着必须对相干码字  $\mathbf{B}$  乘以一个缩放因子  $\alpha$ ,才能保证映射是可逆单射,于是式(6)变为:

$$\mathbf{X} = \left[ \exp \begin{pmatrix} 0 & \alpha\mathbf{B} \\ -(\alpha\mathbf{B})^\dagger & 0 \end{pmatrix} \right] \mathbf{I}_{T,M} \quad (14)$$

显然,  $\alpha$  只影响  $\mathbf{B}$  的奇异值的大小.  $\alpha$  不能选取得太小,否则码字之间的最小弦乘积距离式(9)和(10)的计算值也会变得很小,导致误码率性能变差.  $\alpha$  存在一个取值范围  $(0, \alpha_{\max})$ , 优化搜索方法描述如下: 设  $\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \in \mathbf{G}_{T,M}^C$  为两个不同 Grassmann 酉空时码字, 矩阵  $\mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{X}_j$  的奇异值分解为  $\mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{X}_j = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\dagger$ , 其中  $\mathbf{\Sigma}$  是由奇异值  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  组成的对角线矩阵. 那么由  $\mathbf{X}_i$  和  $\mathbf{X}_j$  分别张成的子空间  $\Omega_i$  和  $\Omega_j$  之间的  $M$  个主角为  $\theta_m = \cos^{-1}\lambda_m (m=0, 1, \dots, M-1)$ , 带入式(9)得:

$$\Theta_{i,j} = \prod_{m=1}^M (1 - \lambda_m^2) \quad (15)$$

至此,就可以通过计算机搜索的方法,搜索出  $\alpha$  在范围  $(0, \alpha_{\max})$  中使得最小弦乘积距离  $\Theta_{i,j}$  最大化的最优  $\alpha_{\text{opt}}$ .

综上所述,相干空时码  $\mathbf{B}_{m \times t}$  映射成 Grassmann 非相干酉空时码  $\mathbf{X}_{T \times M}$  的设计步骤如下:

(a) 先设计相干空时码,根据式(12)设计出相干空时码  $\mathbf{B}_{m \times t}$ .

(b) 将  $\mathbf{B}_{m \times t}$  带入式(14),搜索出最优缩放因子  $\alpha$ , 然后构造指数映射矩阵  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\mathbf{B}_{m \times t} \\ -(\alpha\mathbf{B}_{m \times t})^\dagger & 0 \end{pmatrix}$ .

(c) 构造 Grassmann 非相干酉矩阵(码字)  $\mathbf{X} = \exp(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{I}_{T \times M}$ ,  $\mathbf{I}_{T \times M}$  的列向量展开成子空间  $\Omega_0$ , 这时的非相干酉空时码参数为  $M = m, T = m + t$ . 根据式(7), 对  $\mathbf{B}_{m \times t}$  进行奇异值分解,可求解出对应的式(8),即得到相应的 Grassmann 非相干编码酉矩阵  $\mathbf{X}_{T \times M}$ .

在接收端,解调算法采用如下最大似然解调<sup>[2]</sup>:

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \max_{\mathbf{X} \in \mathcal{C}} p\left(\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X}}\right) = \arg \max_{\mathbf{X} \in \mathcal{C}} \text{tr}(\mathbf{Y}^\dagger \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{Y}) \quad (16)$$

其中  $\mathcal{C}$  代表对调制符号编码后的非相干酉空时码,  $\text{tr}(\cdot)$  表示求矩阵的迹.

## 4 仿真结果与分析

这部分的列举  $\mathbf{X}_{4 \times 2}, \mathbf{X}_{5 \times 2}, \mathbf{X}_{7 \times 2}, \mathbf{X}_{7 \times 3}$  四种 Grassmann 非相干酉空时码作为例子来进行仿真,这四种非相干码字分别由相干码字  $\mathbf{B}_{2 \times 2}, \mathbf{B}_{2 \times 3}, \mathbf{B}_{2 \times 5}, \mathbf{B}_{3 \times 4}$  映射而来,并与文献[5]中的 G42 和 G62 码字进行了比较,接收天线数设为与发射天线相同,即  $N = M$ , 对应的自由度  $D = M(T - M)$ . 若所采用的 M-PSK 调制星座图的大小为  $n$ , 则 Grassmann 非相干空时码的频谱利用率  $\eta = (\log_2(n) \cdot D) / T \text{ bit/s/Hz}$ .

(1) 对于码字  $\mathbf{X}_{4 \times 2}$ , 由  $\mathbf{B}_{2 \times 2}$  映射而来, 对应参数为  $j = -1, \phi^2 = \theta = e^{i(\pi/4)}$ . 若用 QPSK 调制符号构成  $\mathbf{B}_{2 \times 2}$ , 最优化缩放因子  $\alpha_{\text{opt}} = 0.29$ , 频谱利用率为  $2 \text{ bit/s/Hz}$ , 这种情况即是文献[5]中的 G42 码字; 若用 BPSK 调制符号构成  $\mathbf{B}_{2 \times 2}$ , 最优化缩放因子  $\alpha_{\text{opt}} = 0.41$ , 频谱利用率为  $1 \text{ bit/s/Hz}$ .

(2) 对于码字  $\mathbf{X}_{5 \times 2}$ , 由  $\mathbf{B}_{2 \times 3}$  映射而来, 对应参数为  $j = -1, \phi^3 = \theta = e^{i(\pi/4)}$ . 若用 QPSK 调制符号构成  $\mathbf{B}_{2 \times 3}$ , 最优化缩放因子  $\alpha_{\text{opt}} = 0.25$ , 频谱利用率为  $2.4 \text{ bit/s/Hz}$ ; 若用 BPSK 调制符号构成  $\mathbf{B}_{2 \times 3}$ , 最优化缩放因子  $\alpha_{\text{opt}} = 0.36$ , 频谱利用率为  $1.2 \text{ bit/s/Hz}$ .

(3) 对于码字  $\mathbf{X}_{7 \times 2}$ , 由  $\mathbf{B}_{2 \times 5}$  映射而来, 对应参数为  $j = -1, \phi^5 = \theta = e^{i(\pi/4)}$ . 用 BPSK 调制符号构成  $\mathbf{B}_{2 \times 5}$ , 最优化缩放因子  $\alpha_{\text{opt}} = 0.29$ , 频谱利用率为  $1.43 \text{ bit/s/Hz}$ ; 对于码字  $\mathbf{X}_{7 \times 3}$ , 由  $\mathbf{B}_{3 \times 4}$  映射而来, 对应参数为  $j = e^{i(2\pi/3)}, \phi^4 = \theta = e^{i(\pi/6)}$ . 用 BPSK 调制符号构成  $\mathbf{B}_{3 \times 4}$ , 最优化缩放因子  $\alpha_{\text{opt}} = 0.22$ , 频谱利用率为  $1.71 \text{ bit/s/Hz}$ .

仿真曲线如图 1 所示. 虚线是基于 QPSK 调制符号的酉空时码性能仿真曲线, 实线是基于 BPSK 调制符号的酉空时码性能仿真曲线. 由图 1 可以看出, 在同样的相干时间  $T$  情况下, 采用 BPSK 调制符号构成酉空时码的性能比采用 QPSK 调制符号构成酉空时码的性能要好. 这是因为基于 BPSK 调制符号的非相干酉空时码, 其频谱利用率低, 可以说是以牺牲频谱利用率为代价, 来换取性能上的提升. 对于同样的发射天线数  $M$  与接

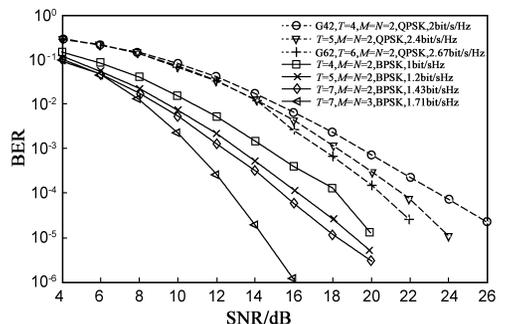


图1 不同结构Grassmann非相干酉空时码的性能比较

收天线数  $N$ , 更长的相干时间  $T$  能得到更好的性能, 这是因为更长的相干时间  $T$  意味着更慢的信道衰落, 更加接近于相干信道, 理应得到更好的性能. 相应的, 在相同相干时间下, 更多的发射天线数目能够带来性能的显著改善.

## 5 结论

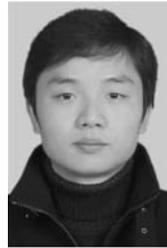
本文构造了一类基于 Grassmann 流形的非相干酉空时码. 在接收端不需要估计信道状态信息的条件下, 这种非相干酉空时码能够正确解调, 因此有利于快衰落信道的信息传输. 该酉空时码类由于相干时间和发射天线的数目具有很大的自主选择性, 故可以根据信道环境的好坏, 选择不同结构的酉空时码. 此外, 所构造的非相干酉空时码类具有充分利用 Grassmann 流形自由度的优势, 致使频谱利用率最大化.

## 参考文献

- [1] T L Marzetta, B M Hochwald. Capacity of a mobile multiple-antenna communication link in Rayleigh flat fading[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 1999, 45(1): 139 – 157.
- [2] B M Hochwald, T L Marzetta. Unitary spacetime modulation for multiple-antenna communication in Rayleigh flat-fading [J]. IEEE Transaction Information Theory, 2000, 46(2): 543 – 564.
- [3] L Zheng, D N C Tse. Communication on the grassmann manifold: A geometric approach to the noncoherent multiple-antenna channel [J]. IEEE Transaction Information Theory, 2002, 48(2): 359 – 383.
- [4] R H Gohary, T N Davidson. Noncoherent MIMO communication: Grassmannian constellations and efficient detection [J]. IEEE Transaction Information Theory, 2009, 55(3): 1176 – 1205.
- [5] I Kammoun, J C Belfiore. A new family of Grassmannian space-time codes for noncoherent MIMO systems [J]. IEEE Communication Letters, 2003, 7(11): 528 – 530.
- [6] J H Conway, R H Hardin, N J A Sloane. Packing lines, planes, etc.: Packings in Grassmannian spaces [J]. Exper Math, 1996, 5(2): 139 – 159.
- [7] A Edelman, T A Arias, S T Smith. The geometry of algorithms with orthogonality constraints [J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1998, 20(2): 303 – 353.

- [8] V Tarokh, N Seshadri, A Calderbank, Space-time codes for high data rate wireless communication: performance criterion and code construction [J]. IEEE Transaction Information Theory, 1998, 44(2): 744 – 765.
- [9] M O Damen, A Tewfik, J C Belfiore. A construction of a space-time code based on the theory of numbers [J]. IEEE Transaction Information Theory, 2002, 48(3): 753 – 760.
- [10] H El Gamal, M O Damen. Universal space-time coding [J]. IEEE Transaction Information Theory, 2003, 49(5): 1097 – 1119.
- [11] I Kammoun, A M Cipriano, J C Belfiore. Non-coherent codes over the Grassmannian [J]. IEEE Transaction Wireless Communication, 2007, 6(10): 3657 – 3667.
- [12] 郭永亮, 朱世华, 张国梅. 基于正交空时分组码的酉空时码设计 [J]. 电子学报, 2006, 34(1): 123 – 126.  
Guo Yongliang, Zhu Shihua, Zhang Guomei. A unitary space-time code based on orthogonal space-time block code [J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(1): 123 – 126. (in Chinese)
- [13] 孙德福, 唐友喜, 邵士海, 马万治. 一种基于准正交空时码的低复杂度 MIMO 差分检测方法 [J]. 电子学报, 2007, 35(10): 1849 – 1853.  
Sun Defu, Tang Youxi, Shao Shihai, Ma Wanzhi. A low computational complexity MIMO differential detection scheme based on quasi-orthogonal space-time block codes [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(10): 1849 – 1853. (in Chinese)

## 作者简介



彭秋平 男, 1987 年 10 月出生, 湖南娄底. 2009 年获得华中科技大学电子与信息工程系学士学位, 同年进入华中科技大学攻读硕士学位. 主要研究方向为 MIMO 通信, 调制技术与信道编码.

E-mail: pengqiuping@gmail.com



彭立 女, 1984 年于华中工学院获工程学士学位, 1990 年于华中理工大学获硕士学位. 2009 年获华中科技大学电子与信息工程系博士学位. 目前是华中科技大学电子与信息工程系副教授. 主要研究方向: 信息论、信道编码、网络编码、无线传输技术.

E-mail: pengli@mail.hust.edu.cn