

# 同轴不连续性等效网络中变分电容上、下限值的物理实质

张文政<sup>1,2</sup>, 张晓娟<sup>1</sup>

(1. 中国科学院电子学研究所, 北京 100190; 2. 中国科学院研究生院, 北京 100049)

**摘 要:** 应用泛函近似方法求解了一类同轴阶梯不连续性结构等效变分电容下限值; 证明了几类常见同轴不连续性等效网络中变分电容上、下限值的同一性, 并据此从本征模式函数的角度给出了该上、下限值的物理解释.

**关键词:** 同轴不连续性; 等效网络; 泛函近似方法; 变分电容上、下限值的实质

**中图分类号:** TN813      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2011) 07-1645-06

## Essence of the Upper and Lower Bound to the Variational Capacitances in the Equivalent Networks of Coaxial Discontinuities

ZHANG Wen-zheng<sup>1,2</sup>, ZHANG Xiao-juan<sup>1</sup>

(1. Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** The lower bound to the equivalent variational capacitance of a coaxial step discontinuity was solved with Functional Approximation Methods; the identity between the upper bound and lower bound to the equivalent networks' variational capacitances was proved for several common coaxial discontinuities, basing upon the identity essence of the upper bound and lower bound to the variational capacitance was obtained from the standpoint of eigen mode function.

**Key words:** coaxial discontinuity; equivalent network; Functional Approximation Method; essence of the upper bound and lower bound to the variational capacitance

## 1 引言

传输线不连续性是微波工程中一类基本问题. 就同轴不连续性而言: Somlo<sup>[1]</sup>和 Whinnery 等<sup>[2]</sup>以公式和图表的形式给出了图 1(a) 的阶梯不连续性等效电容低频值及其高频修正因子, 而后 Gogioso 等<sup>[3]</sup>用 Ritz 变分法分析得出了该变分电容上限值; Risley<sup>[4,5]</sup>用 Ritz 法求得了图 1(b) 的同轴终止于圆波导的等效变分电容上、下限值, 该类问题在有耗情况下的 Ritz 法分析则由谢拥军等<sup>[6]</sup>完成; Marcuvitz<sup>[7]</sup>给出了计算图 1(c) 的不连续性等效电容的准静态公式, 事实上也可由 Ritz 法求解图 1(c) 的等效变分电容上、下限值, 此时短路面对区域 II 中各模式的反射系数为 -1; 而图 1(d) 的不连续性结构应等效为如图 1(D) 的  $\Pi$  型电容网络<sup>[8]</sup>, 各电容参数则可通过在  $SS'$  面上规定电壁和磁壁来分解而求得, 分解后的求解与对图 1(c) 和 1(b) 的求解类似, 因此也可分别得到这些电容参数的上、下限值.

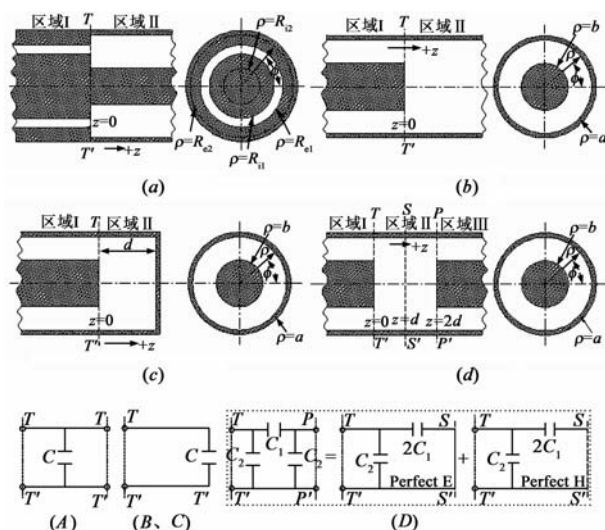


图1 四类同轴不连续性结构a,b,c,d及其等效网络A,B,C,D

本文联合 Galerkin 法和 Ritz 法求解了图 1(a) 的阶梯不连续性等效变分电容下限值以完善 Gogioso 等人的工作;证明了图 1 中各不连续性等效网络中变分电容参数上、下限值是同一个值,进而分析得出了该同一值分别为上、下限值的物理条件.

## 2 同轴阶梯不连续性等效变分电容下限值

### 2.1 同轴阶梯等效电容下限值泛函近似方法求解

为了求解图 1(b) 的等效电容上、下限值, Risley<sup>[4,5]</sup> 根据模式展开法及连续性边界条件建立了归一化输入电(导)纳  $y_{in}$ 、输入电(阻)抗  $z_{in}$  分别关于横向电场分量  $\mathbf{E}$ 、横向磁场分量  $\mathbf{H}$  的稳定泛函(其余符号的物理意义及表达式可参阅文献[4,5]),即:

$$\begin{cases} \frac{(-i)y_{in}y_0}{k^2} = (-i)k^{-2} \frac{1-R}{1+R} y_0 = \frac{(G'\mathbf{E}, \mathbf{E})_{A_1}}{(\mathbf{E}, \phi_0)_{A_1}^2} = \frac{y_0 Z_{oI} \omega C}{k^2} \\ \frac{iz_{in}}{y_0 k^2} = -i \frac{(\mathbf{H}, K\mathbf{H})_{A_2}}{(\mathbf{H}, \phi_0)_{A_1}^2} = \frac{(\mathbf{H}, K'\mathbf{H})_{A_2}}{-(\mathbf{H}, \phi_0)_{A_1}^2} = \frac{1}{y_0 k^2 Z_{oI} \omega C} \end{cases} \quad (1)$$

其中  $Z_{oI}$  为同轴区域 I 的特性阻抗,取近似横向场分量  $\mathbf{E}^{[N]} = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(\rho)$ 、 $\mathbf{H}^{[M]} = \sum_{m=1}^M b_m \psi_m(\rho)$ , 由 Ritz 法(亦称上限值法<sup>[9]</sup>)分别求解上述两稳定泛函可得:

$$\begin{cases} C^{[N]} \geq C \\ \frac{1}{C^{[M]}} \geq \frac{1}{C} \Rightarrow C^{[N]} \geq C \geq C^{[M]} \end{cases} \quad (2)$$

易见  $C^{[N]}$ 、 $C^{[M]}$  的上、下限特性源于 Ritz 法的数学意义,而第 3 节将从物理角度解释此上、下限值.

对于图 1(a) 可类似地建立归一化输入导纳  $y_{in}$ 、归一化输入阻抗  $z_{in}$  的泛函,其中积分区域  $A_1$ 、 $A_2$  分别为  $R_{I1} \leq \rho \leq R_{e1}$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ ;  $R_{I2} \leq \rho \leq R_{e2}$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ :

$$\begin{cases} y_{in} = \frac{(\mathbf{E}, \Psi_0)_{A_1}^2}{(\mathbf{E}, \phi_0)_{A_1}^2} - \frac{k^2 (G\mathbf{E}, \mathbf{E})_{A_1}}{y_0 (\mathbf{E}, \phi_0)_{A_1}^2} = \frac{Z_{oI}}{Z_{oII}} - \frac{k^2 (G\mathbf{E}, \mathbf{E})_{A_1}}{y_0 (\mathbf{E}, \phi_0)_{A_1}^2} \\ = y'_{in} + y''_{in} \\ z_{in} = \frac{1+R}{1-R} = \frac{(\mathbf{H}, \psi_0)_{A_2}^2 - y_0 k^2 (\mathbf{H}, K\mathbf{H})_{A_2}}{(\mathbf{H}, \phi_0)_{A_1}^2} \end{cases} \quad (3)$$

可从式(3)第一式  $y_{in}$  中分离出电纳  $y''_{in}$  关于  $\mathbf{E}$  的泛函即泛函式(1),故其等效电容上限值的 Ritz 法求解过程及表达式均与文献[4]相同;但无法从  $z_{in}$  中分离出电抗  $z''_{in}$  关于  $\mathbf{H}$  的泛函,因此不能直接应用 Ritz 法求解其下限值.由于尚无其解见诸文献,本文联合 Galerkin 法和 Ritz 法导出了其下限值(附录 A),其表达式与图 1(b) 的不连续性等效电容下限值相同.

故图 1 中四类不连续性等效网络中各电容参数上、

下限值均拥有相同的表达式,即:

$$\begin{cases} \text{上限值: } C_U^{[N]} = \epsilon \frac{2\pi}{\ln(a/b)} \frac{\mathbf{II}'_{N+1}}{\mathbf{II}_N} \\ \text{下限值: } C_L^{[M]} = -\epsilon \frac{2\pi}{\ln(a/b)} \frac{\Delta'_{M+1}}{\Delta_M} \end{cases} \quad (4)$$

其中  $\epsilon$  为填充介质的相对介电常数,  $b, a$  为图 1 各不连续性结构中同轴区域 I 的内、外径,而对称矩阵  $\mathbf{II}_N$ 、 $\mathbf{II}'_{N+1}$  分别为:

$$\mathbf{II}_N = \begin{vmatrix} Z_{11} + X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1N} \\ X_{21} & Z_{22} + X_{22} & \cdots & X_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N1} & X_{N2} & \cdots & Z_{NN} + X_{NN} \end{vmatrix}_{N \times N},$$

$$\mathbf{II}'_{N+1} = \begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & \cdots & X_{0N} \\ X_{10} & Z_{11} + X_{11} & \cdots & X_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N0} & X_{N1} & \cdots & Z_{NN} + X_{NN} \end{vmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

其中

$$\begin{cases} X_{00} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mII}^{-1}(\phi_0, \psi_m)^2 L_m; \\ X_{0n} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mII}^{-1}(\phi_0, \psi_m)(\psi_m, \phi_n) L_m \\ X_{nk} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mII}^{-1}(\phi_n, \psi_m)(\psi_m, \phi_k) L_m \\ Z_{kk} = \alpha_{kI}^{-1}(\phi_k, \phi_k)^2 = \alpha_{kI}^{-1} \end{cases}$$

$n, k = 1, 2, \dots, N$ ;  $\phi_0(\rho) = \left( \rho \sqrt{2\pi \ln(\frac{a}{b})} \right)^{-1}$ ;  $\phi_n, \psi_m$  比文献[4]中的  $\phi_n, \psi_m$  分别少因子  $ih_{nI}, ih_{mII}$ ;若区域 II 有电、磁壁(图 1(c)及 1(d)),则  $L_n (n = 1, 2, \dots)$  及下文的  $L'_n = L_n^{-1}$  表征了电、磁壁对区域 II 中各模式的反射,否则  $L_n = L'_n = 1$ (图 1(a)及 1(b));而对称矩阵  $\Delta_M, \Delta'_{M+1}$  分别为:

$$\Delta_M = \begin{vmatrix} Y_{11} + W_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1M} \\ Y_{21} & Y_{22} + W_{22} & \cdots & Y_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{M1} & Y_{M2} & \cdots & Y_{MM} + W_{MM} \end{vmatrix}_{M \times M},$$

$$\Delta'_{M+1} = \begin{vmatrix} 0 & Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_M \\ Y_1 & Y_{11} + W_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1M} \\ Y_2 & Y_{21} & Y_{22} + W_{22} & \cdots & Y_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_M & Y_{M1} & Y_{M2} & \cdots & Y_{MM} + W_{MM} \end{vmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$\begin{cases} Y_m = (\phi_0, \psi_m), Y_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nI}(\psi_m, \phi_n)(\phi_n, \psi_k) \\ W_{mm} = \alpha_{mII} L'_m, (m = 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, \dots, M) \end{cases}$$

## 2.2 数值验证

算例  $R_{e1} = R_{e2} = 45\text{mm}$ ,  $R_{i1} = 25\text{mm}$ ,  $R_{i2} = 12.5\text{mm}$ ,  $\epsilon = 1$  的求解表明:变分电容上、下限值具有良好的上、下限特性,同 HFSS 仿真值相对误差分别在 3%, -2% 以内(图 2)。

## 3 同轴不连续性等效网络中变分电容上、下限值的物理实质

### 3.1 同轴不连续性等效电容上、下限值同一性

由模式函数正交性及内积定义可知式(4)导出过程中的近似场分量及格林函数<sup>[10]</sup>如式(5)。其中下标 U, L, G, I, II 分别表示对应物理量与上(Upper)限值、下(Lower)限值、格林函数(Green's function)、区域 I 及 II 相关。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \mathbf{I}\mathbf{I}'_{N+1} = \begin{vmatrix} \frac{(0,1)^2}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(0,2)^2}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(0,M)^2}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} & \frac{(0,1)(1,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(0,2)(1,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(0,M)(1,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} & \cdots & \frac{(0,1)(N,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(0,2)(N,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(0,M)(N,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} \\ \frac{(0,1)(1,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(0,2)(1,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(0,M)(1,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} & \frac{(1,1)(1,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(1,2)(1,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(1,M)(1,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} + \alpha_{11}^{-1} & \cdots & \frac{(1,1)(N,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(1,2)(N,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(1,M)(N,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(0,1)(N,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(0,2)(N,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(0,M)(N,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} & \frac{(N,1)(1,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(N,2)(1,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,M)(1,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} & \cdots & \frac{(N,1)(N,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(N,2)(N,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,M)(N,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} + \alpha_{N1}^{-1} \end{vmatrix} \\
 \mathbf{B} &= \mathbf{I}\mathbf{I}'_N = \begin{vmatrix} \frac{(1,1)(1,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(1,2)(1,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(1,M)(1,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} + \alpha_{11}^{-1} & \frac{(1,1)(2,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(1,2)(2,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(1,M)(2,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} & \cdots & \frac{(1,1)(N,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(1,2)(N,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(1,M)(N,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} \\ \frac{(2,1)(1,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,2)(1,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(2,M)(1,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} & \frac{(2,1)(2,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,2)(2,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(2,M)(2,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} + \alpha_{21}^{-1} & \cdots & \frac{(2,1)(N,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,2)(N,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(2,M)(N,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(N,1)(1,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(N,2)(1,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,M)(1,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} & \frac{(N,1)(2,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(N,2)(2,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,M)(2,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} & \cdots & \frac{(N,1)(N,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(N,2)(N,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,M)(N,M)}{\alpha_{M11}\mathbf{L}_M^{-1}} + \alpha_{N1}^{-1} \end{vmatrix} \\
 \mathbf{C} &= \mathbf{A}\mathbf{I}'_{M+1} = \begin{vmatrix} 0 & (0,1) & \cdots & (0,M) \\ (0,1) & \frac{(1,1)(1,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,1)(2,1)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,1)(N,1)}{\alpha_{N11}\mathbf{L}_1^{-1}} + \alpha_{11}\mathbf{L}_1' & \cdots & \frac{(1,1)(1,M)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,1)(2,M)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,1)(N,M)}{\alpha_{N11}\mathbf{L}_1^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (0,M) & \frac{(1,M)(1,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,M)(2,1)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,M)(N,1)}{\alpha_{N11}\mathbf{L}_1^{-1}} & \cdots & \frac{(1,M)(1,M)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,M)(2,M)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,M)(N,M)}{\alpha_{N11}\mathbf{L}_1^{-1}} + \alpha_{M1}\mathbf{L}_M' \end{vmatrix} \\
 \mathbf{D} &= \mathbf{A}\mathbf{I}'_M = \begin{vmatrix} \frac{(1,1)(1,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,1)(2,1)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,1)(N,1)}{\alpha_{N11}\mathbf{L}_1^{-1}} + \alpha_{11}\mathbf{L}_1' & \frac{(1,1)(1,2)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,1)(2,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,1)(N,2)}{\alpha_{N11}\mathbf{L}_1^{-1}} & \cdots & \frac{(1,1)(1,M)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,1)(2,M)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,1)(N,M)}{\alpha_{N11}\mathbf{L}_1^{-1}} \\ \frac{(1,2)(1,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,2)(2,1)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,2)(N,1)}{\alpha_{N11}\mathbf{L}_1^{-1}} & \frac{(1,2)(1,2)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,2)(2,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,2)(N,2)}{\alpha_{N11}\mathbf{L}_1^{-1}} + \alpha_{21}\mathbf{L}_2' & \cdots & \frac{(1,2)(1,M)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,2)(2,M)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,2)(N,M)}{\alpha_{N11}\mathbf{L}_1^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(1,M)(1,1)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,M)(2,1)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,M)(N,1)}{\alpha_{N11}\mathbf{L}_1^{-1}} & \frac{(1,M)(1,2)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,M)(2,2)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,M)(N,2)}{\alpha_{N11}\mathbf{L}_1^{-1}} & \cdots & \frac{(1,M)(1,M)}{\alpha_{111}\mathbf{L}_1^{-1}} + \frac{(2,M)(2,M)}{\alpha_{211}\mathbf{L}_2^{-1}} + \cdots + \frac{(N,M)(N,M)}{\alpha_{N11}\mathbf{L}_1^{-1}} + \alpha_{M1}\mathbf{L}_M' \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

其中  $(n, m)$  为内积  $(\phi_n(\rho), \psi_m(\rho))$  的简记, 而其中  $n = 0, 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, M$ 。若  $\mathbf{A}/\mathbf{B} = -\mathbf{C}/\mathbf{D}$  成立, 则有

$$C_U^{[N]} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(a/b)} \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{-2\pi\epsilon}{\ln(a/b)} \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}} = C_L^{[M]} = C \quad (6)$$

成立也即同一性得证, 本文称  $C$  为变分电容同一值。附录 B 证明了当不存在电、磁壁(图 1(a)、(b))时, 即当

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{[N_U]} = \sum_{n=0}^{N_U} a_n \phi_n(\rho), \\ G' = iG = \sum_{n=1}^{N_U} \frac{\omega\epsilon}{\alpha_{n1}} \phi_n(\rho) \phi_n(\rho') + \sum_{m=1}^{M_{GU}} \frac{\omega\epsilon}{\alpha_{m11}} \psi_m(\rho) \psi_m(\rho') \\ \mathbf{H}^{[M_L]} = \sum_{m=1}^{M_L} b_m \gamma_{m11} \psi_m(\rho), \\ K' = iK = \sum_{n=1}^{N_{GL}} \frac{\alpha_{n1}}{\omega\epsilon h_{n1}^2} \phi_n(\rho) \phi_n(\rho') + \sum_{m=1}^{M_L} \frac{\alpha_{m11}}{\omega\epsilon h_{m11}^2} \psi_m(\rho) \psi_m(\rho') \end{cases} \quad (5)$$

下面证明当区域 I, II 的横向场分量模式函数  $\{\phi_n(\rho)\}$ ,  $\{\psi_m(\rho)\}$  中消逝模式数分别为  $N, M$  即  $N_U = N_{GL} = N$ ,  $M_{GU} = M_L = M$  时, 式(4)中的  $C_U^{[N]} = C_L^{[M]}$  成立, 令

$\mathbf{L}'_n = \mathbf{L}_n^{-1} = 1 (n = 1, 2, \dots)$  时式(6)成立, 而当存在电、磁壁时(图 1(c)、(d))可利用  $\mathbf{L}'_n = \mathbf{L}_n^{-1} (n = 1, 2, \dots)$  进行类似的证明。

### 3.2 变分电容上、下限值的物理解释

上节证明了当区域 I 和 II 的消逝模式数分别为  $N, M$  时  $C_U^{[N]} = C_L^{[M]} = C$ 。图 3 给出了算例中的不连续性结构在四组频率参数下当  $M, N$  分别为 18 时, 同一值  $C$

分别与  $N, M$  的关系. 事实上当  $M = 18$  时,  $C$  与  $N$  的关系就是 2.2 节数值计算中当  $M_{GU} = 18$  时变分电容上限值  $C_U^{[N]}$  的收敛特性曲线, 收敛性分析表明当  $N_U = 8$  时四组频率下对应的  $C_U^{[N]}$  均收敛了, 故当  $M = M_{GU} = 18 \geq N = N_U = 8$  时,  $C$  为上限值  $C_U^{[N]}$ ; 同理当  $M \leq N = 18$  时,  $C$  则为下限值  $C_L^{[M]}$ , 即:

$$\text{同一值 } C = \begin{cases} C_U^{[N]}, & \text{当 } N \leq M \\ C_L^{[M]}, & \text{当 } N \geq M \end{cases} \quad (7)$$

必须指出的是: 一方面利用式(4)计算上(下)限值时需满足  $N \leq (\geq) M$ , 否则计算结果将是下(上)限值; 另一方面只要  $N \geq M$  也可根据上、下限值同一性由式(4)的计算上限值的公式计算其下限值, 这在下限值公式未知情况下无疑是便利的, 反之亦然.

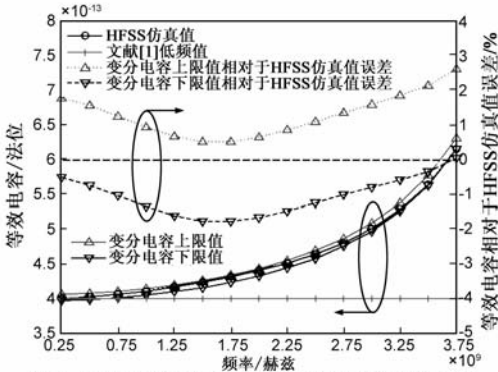


图2 算例中的不连续性等效电容与频率的关系

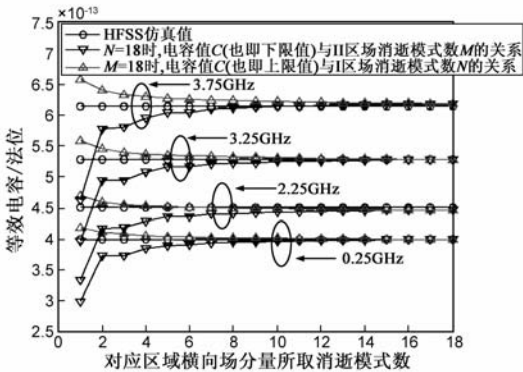


图3 算例中的不连续性等效电容与横向场分量消逝模式数的关系

## 4 结论

文中所述四类同轴不连续性等效网络中变分电容上、下限值分别为变分电容同一值在区域 I 的横向场分量消逝模式数目小于、大于区域 II 的横向场分量消逝模式数目条件下的值.

## 附录 A 同轴阶梯不连续性等效变分电容下限值推导

由模式展开法及边界条件可得到以归一化输入阻

抗  $z_{in}$  为广义本征值的广义本征值方程:

$$z_{in} \phi_0 \int_{A_1} \mathbf{H} \phi_0 dA - \phi_0 \int_{A_2} \mathbf{H} \phi_0 dA + y_0 k^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n \int_{A_1} \mathbf{H} \phi_n dA}{y_{nI} h_{nI}^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi_m \int_{A_2} \mathbf{H} \phi_m dA}{y_{mII} h_{mII}^2} \right) = 0 \quad (8)$$

令近似横向磁场分量为  $\mathbf{H}^{[M]} = \sum_{m=0}^M b_m y_{mII} \psi_m(\rho)$ ,

由 Galerkin 法求解上式, 可得齐次方程组:

$$\begin{bmatrix} z_{in} \Omega_0 \Omega_0 - k^4 & z_{in} \Omega_0 \Omega_1 & z_{in} \Omega_0 \Omega_2 & \cdots & z_{in} \Omega_0 \Omega_M \\ z_{in} \Omega_1 \Omega_0 & z_{in} \Omega_1 \Omega_1 + \Omega_{11} & z_{in} \Omega_1 \Omega_2 + \Omega_{12} & \cdots & z_{in} \Omega_1 \Omega_M + \Omega_{1M} \\ z_{in} \Omega_2 \Omega_0 & z_{in} \Omega_2 \Omega_1 + \Omega_{21} & z_{in} \Omega_2 \Omega_2 + \Omega_{22} & \cdots & z_{in} \Omega_2 \Omega_M + \Omega_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{in} \Omega_M \Omega_0 & z_{in} \Omega_M \Omega_1 + \Omega_{M1} & z_{in} \Omega_M \Omega_2 + \Omega_{M2} & \cdots & z_{in} \Omega_M \Omega_M + \Omega_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 y_{0II} \\ b_1 y_{1II} \\ b_2 y_{2II} \\ \vdots \\ b_M y_{MII} \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

其中  $\Omega_i = (\phi_0, \phi_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, M$ ,

$$\Omega_{jk} = \frac{iy_0 k^2}{\omega \epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\phi_j, \phi_n)(\phi_n, \phi_k)}{\alpha_{nI}} + \delta_{jk} \alpha_{nII}^3 \right\};$$

$j, k = 1, 2, \dots, M$ .

欲使关于  $\{b_m y_{mII} | m = 0, 1, 2, \dots, M\}$  的齐次方程组有解, 其系数行列式必为 0, 由此可以解出:

$$z_{in} = - \frac{-k^4 \mathbf{O}_M}{k^4 \frac{\ln(R_{e1}/R_{i1})}{\ln(R_{e2}/R_{i2})} \mathbf{O}_M - k^4 \sum_{i=1}^M \Omega_i \mathbf{O}_{iM}} = \frac{Z_{oI}^{-1} Z_{oII}}{1 - \frac{Z_{oII}}{Z_{oI} \mathbf{O}_M} \sum_{i=1}^M \Omega_i \mathbf{O}_{iM}} \quad (10)$$

$$\text{其中 } \mathbf{O}_M = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \cdots & \Omega_{1M} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \cdots & \Omega_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{M1} & \Omega_{M2} & \cdots & \Omega_{MM} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O}_{iM} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \cdots & \Omega_{1(i-1)} & \Omega_1 & \Omega_{1(i+1)} & \cdots & \Omega_{1M} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \cdots & \Omega_{2(i-1)} & \Omega_2 & \Omega_{2(i+1)} & \cdots & \Omega_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{M1} & \Omega_{M2} & \cdots & \Omega_{M(i-1)} & \Omega_M & \Omega_{M(i+1)} & \cdots & \Omega_{MM} \end{bmatrix}.$$

而根据该不连续性等效网络(图 1(A))可得其归一化输入阻抗为:

$$z_{in} = Z_{oI}^{-1} \frac{(i\omega C)^{-1} Z_{oII}}{(i\omega C)^{-1} + Z_{oII}} = \frac{Z_{oI}^{-1} Z_{oII}}{1 + i\omega C Z_{oII}} \quad (11)$$

对比式(10)与式(11)可得:

$$\begin{cases} i\omega CZ_{oII} = -Z_{oI}^{-1}Z_{oII}\mathbf{O}_M^{-1}\sum_{i=1}^M\Omega_i\mathbf{O}_{iM} \\ \text{或} \quad -\frac{\mathbf{O}_M'}{\sum_{i=1}^M\Omega_i\mathbf{O}_{iM}'} = \frac{1}{i\omega CZ_{oI}Y_0k^2} \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{O}_M', \mathbf{O}_{iM}'$  为  $\mathbf{O}_M, \mathbf{O}_{iM}$  中  $\Omega_{jk}$  被  $\Omega'_{jk}$  替代所得, 而  $\Omega'_{jk} = \frac{i}{\omega\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\psi_j, \phi_n)(\phi_n, \psi_k)}{\alpha_{n1}} + \delta_{jnk}\alpha_{nII}^3 \right\}$ , 化简式(12)可知其与式(4)第二式完全相同。

若令横向磁场分量(注意此处角标  $m$  从 1 而非从 0 计):

$$\mathbf{H}'^{[M]} = \sum_{m=1}^M b_m \gamma_{mII} \psi_m(\rho), \text{ 或 } \mathbf{H}' = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \gamma_{mII} \psi_m(\rho) \quad (13)$$

将式(13)代入式(3)中  $z_{in}$  的泛函式可得与求解图 1(b)不连续性电容下限值<sup>[5]</sup>相同的稳定泛函式:

$$z_{in} = -\frac{y_0 k^2 (\mathbf{H}', K\mathbf{H}')_{A_2}^2}{(\mathbf{H}', \phi_0)_{A_1}^2} = \frac{1}{Z_{oI} i\omega C} = z_{in}'' \quad (14)$$

类似文献[5]由 Ritz 法求解式(14)可得式(12), 可见模式函数  $b_0 y_{0II} \psi_0$  与  $C$  的计算无关, 将式(13)代入式(8)由 Galerkin 法求解而同样得到式(12)也可验证这一点。这之前的求解(主要是对式(8)的 Galerkin 法求解)实现了从式(3)分离出电抗  $z_{in}''$  关于  $\mathbf{H}'$  (而非  $\mathbf{H}$ ) 的稳定泛函式(14)以便利用 Ritz 法对  $C$  的下限值进行求解。

## 附录 B 同轴不连续性等效网络中变分电容上、下限值同一性的证明

### B.1 当 $M \geq N+1$ 时等效变分电容上、下限值同一性的证明

行列式  $A$  可分裂为  $M \times (M+1)^N$  个子行列式  $A_i$ , 其中  $A_i$  的列为  $A$  对应列椭圆所圈的子列。任取行列式  $A, B$  不等于零的子行列式  $A_i, B_j$ , 若能对应地分别找到  $C, D$  的子行列式  $C_i, D_j$  使  $A_i \times D_j + C_i \times B_j = 0$  成立, 则  $A \times D + C \times B = 0$  得证, 即  $A/B = -C/D$  成立。任取如式(15)和(16)的  $A_i, B_j$ , 且不妨令全集  $I, \hat{I}$  为:

$$\begin{cases} I = \{1, 2, 3, \dots, M\} = H \cup \bar{H} \\ \quad = \{c_0, c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_N\} \cup \{d_2, c_i\} \\ \hat{I} = \{1, 2, 3, \dots, M\} = \hat{H} \cup \bar{\hat{H}} \\ \quad = \{a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_N\} \cup \{1, b_1, b_2, a_j\} \end{cases}$$

其元素满足如下任意假定却又不失一般性的关系:

$$\begin{cases} c_1 > c_0 > c_i > \dots > c_{i+1} > d_2 > c_{i-1} > \dots > c_N = 1 > 0 \\ a_1 > a_j > b_1 > \dots > a_{j-1} > b_2 > a_{j+1} > \dots > a_N = 2 > 1 \end{cases}$$

则可从  $C, D$  中找到对应于  $A_i, B_j$  的如式(17)和(18)的  $C_i, D_j$ 。

对  $A_i, B_j, C_i$  及  $D_j$  进行行列式变换后代入  $A_i \times D_j + C_i \times B_j$  可得  $A_i \times D_j + C_i \times B_j = 0$ , 得证结论。

### B.2 当 $M < N+1$ 时等效变分电容上、下限值同一性的证明

类似地, 任取行列式  $C, D$  的非 0 子行列式  $C_k, D_l$  可从  $A, B$  中找到与  $C_k, D_l$  对应的子行列式  $A_k, B_l$ , 满足  $A_k \times D_l + C_k \times B_l = 0$ , 不另赘述。

	第 0 列	第 1 列	...	第 $i-1$ 列	第 $i$ 列	第 $i+1$ 列	...	第 $N$ 列	
$\alpha_{c_0}^{-1} \Pi(0, c_0) \times$	$(0, c_0)$	$(0, c_1)$	...	$(0, c_{i-1})$	0	$(0, c_{i+1})$	...	$(0, c_N)$	第 0 行
$\alpha_{c_1}^{-1} \Pi(1, c_1) \times$	$(1, c_0)$	$(1, c_1)$	...	$(1, c_{i-1})$	0	$(1, c_{i+1})$	...	$(1, c_N)$	第 1 行
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_i = \alpha_{c_{i-1}}^{-1} \Pi(i-1, c_{i-1}) \times$	$(i-1, c_0)$	$(i-1, c_1)$	...	$(i-1, c_{i-1})$	0	$(i-1, c_{i+1})$	...	$(i-1, c_N)$	第 $i-1$ 行
	$(i, c_0)$	$(i, c_1)$	...	$(i, c_{i-1})$	$\alpha_{\bar{d}}^{-1}$	$(i, c_{i+1})$	...	$(i, c_N)$	第 $i$ 行
$\alpha_{c_{i+1}}^{-1} \Pi(i+1, c_{i+1}) \times$	$(i+1, c_0)$	$(i+1, c_1)$	...	$(i+1, c_{i-1})$	0	$(i+1, c_{i+1})$	...	$(i+1, c_N)$	第 $i+1$ 行
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_{c_N}^{-1} \Pi(N, c_N) \times$	$(N, c_0)$	$(N, c_1)$	...	$(N, c_{i-1})$	0	$(N, c_{i+1})$	...	$(N, c_N)$	第 $N$ 行

	第 1 列	...	第 $(j-1)$ 列	第 $j$ 列	第 $(j+1)$ 列	...	第 $N$ 列	
$\alpha_{a_1}^{-1} \Pi(1, a_1) \times$	$(1, a_1)$	...	$(1, a_{j-1})$	0	$(1, a_{j+1})$	...	$(1, a_N)$	第 1 行
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_{a_{j-1}}^{-1} \Pi(j-1, a_{j-1}) \times$	$(j-1, a_1)$	...	$(j-1, a_{j-1})$	0	$(j-1, a_{j+1})$	$\vdots$	$(j-1, a_N)$	第 $j-1$ 行
$B_j = \alpha_{a_j}^{-1} \Pi(j+1, a_{j+1}) \times$	$(j, a_1)$	...	$(j, a_{j-1})$	$\alpha_{\bar{d}}^{-1}$	$(j, a_{j+1})$	$\vdots$	$(j, a_N)$	第 $j$ 行
	$(j+1, a_1)$	...	$(j+1, a_{j-1})$	0	$(j+1, a_{j+1})$	$\vdots$	$(j+1, a_N)$	第 $j+1$ 行
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_{a_N}^{-1} \Pi(N, a_N) \times$	$(N, a_1)$	...	$(N, a_{j-1})$	0	$(N, a_{j+1})$	...	$(N, a_N)$	第 $N$ 行

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 \alpha_{11}(1, c_1) \times \\
 \vdots \\
 \alpha_{i-11}(i-1, c_{i-1}) \times \\
 \alpha_{i+11}(i+1, c_{i+1}) \times \\
 \vdots \\
 \alpha_{N1}(N, c_N) \times
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccc}
 \text{第 } 0 \text{ 列} & \text{第 } c_N \text{ 列} & \cdots & \text{第 } c_{i-1} \text{ 列} & \text{第 } d_2 \text{ 列} & \text{第 } c_{i+1} \text{ 列} & \cdots & \text{第 } c_i \text{ 列} & \text{第 } c_0 \text{ 列} & \text{第 } c_1 \text{ 列}
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 0 & (0, c_N) & \cdots & (0, c_{i-1}) & (0, d_2) & (0, c_{i+1}) & \cdots & (0, c_i) & (0, c_0) & (0, c_1)
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 (0, c_N) & (N, c_N) & \cdots & (N, c_{i-1}) & (N, d_2) & (N, c_{i+1}) & \cdots & (N, c_i) & (N, c_0) & (N, c_1)
 \end{array} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 (0, c_{i-1}) & (i-1, c_N) & \cdots & (i-1, c_{i-1}) & (i-1, d_2) & (i-1, c_{i+1}) & \cdots & (i-1, c_i) & (i-1, c_0) & (i-1, c_1)
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 (0, d_2) & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{d_211} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 (0, c_{i+1}) & (i+1, c_N) & \cdots & (i+1, c_{i-1}) & (i+1, d_2) & (i+1, c_{i+1}) & \cdots & (i+1, c_i) & (i+1, c_0) & (i+1, c_1)
 \end{array} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 (0, c_i) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{c_i11} & 0 & 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 (0, c_0) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 (0, c_1) & (1, c_N) & \cdots & (1, c_{i-1}) & (1, d_2) & (1, c_{i+1}) & \cdots & (1, c_i) & (1, c_0) & (1, c_1)
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{第 } 0 \text{ 行} \\
 \text{第 } c_N \text{ 行} \\
 \vdots \\
 \text{第 } c_{i-1} \text{ 行} \\
 \text{第 } d_2 \text{ 行} \\
 \vdots \\
 \text{第 } c_{i+1} \text{ 行} \\
 \vdots \\
 \text{第 } c_i \text{ 行} \\
 \text{第 } c_0 \text{ 行} \\
 \text{第 } c_1 \text{ 行}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (17)$$

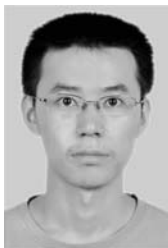
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 \alpha_{11}(1, a_1) \times \\
 \vdots \\
 \alpha_{j-11}(j-1, a_{j-1}) \times \\
 \alpha_{j+11}(j+1, a_{j+1}) \times \\
 \vdots \\
 \alpha_{N1}(N, a_N) \times
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccc}
 \text{第 } 1 \text{ 列} & \text{第 } a_N \text{ 列} & \cdots & \text{第 } a_{j+1} \text{ 列} & \text{第 } b_2 \text{ 列} & \text{第 } a_{j-1} \text{ 列} & \cdots & \text{第 } b_1 \text{ 列} & \text{第 } a_j \text{ 列} & \text{第 } a_1 \text{ 列}
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 \alpha_{111} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 (N, 1) & (N, a_N) & \cdots & (N, a_{j+1}) & (N, b_2) & (N, a_{j-1}) & \cdots & (N, b_1) & (N, a_j) & (N, a_1)
 \end{array} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 (j+1, 1) & (j+1, a_N) & \cdots & (j+1, a_{j+1}) & (j+1, b_2) & (j+1, a_{j-1}) & \cdots & (j+1, b_1) & (j+1, a_j) & (j+1, a_1)
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{b_211} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 (j-1, 1) & (j-1, a_N) & \cdots & (j-1, a_{j+1}) & (j-1, b_2) & (j-1, a_{j-1}) & \cdots & (j-1, b_1) & (j-1, a_j) & (j-1, a_1)
 \end{array} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{b_111} & 0 & 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{a_j11} & 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc}
 (a_1, 1) & (a_1, a_N) & \cdots & (a_1, a_{j+1}) & (a_1, b_2) & (a_1, a_{j-1}) & \cdots & (a_1, b_1) & (a_1, a_j) & (a_1, a_1)
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{第 } 1 \text{ 行} \\
 \text{第 } a_N \text{ 行} \\
 \vdots \\
 \text{第 } a_{j+1} \text{ 行} \\
 \text{第 } b_2 \text{ 行} \\
 \vdots \\
 \text{第 } a_{j-1} \text{ 行} \\
 \vdots \\
 \text{第 } b_1 \text{ 行} \\
 \text{第 } a_j \text{ 行} \\
 \text{第 } a_1 \text{ 行}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (18)$$

## 参考文献

- [1] P Somlo. The computation of coaxial line step capacitances [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1967, 15(1): 48–53.
- [2] J R Whinnery, H W Jamieson, et al. Coaxial line discontinuities [J]. Proceedings of the Institute of Radio Engineers, 1944, 32(11): 695–706.
- [3] L Gogioso, M Marchesi, et al. A variational approach to compute the equivalent capacitance of coaxial line discontinuities [A]. IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest [C]. USA: IEEE Press, 1979. 580–582.
- [4] E W Risley. Discontinuity capacitance of a coaxial line terminated in a circular waveguide [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1969, 17(2): 86–92.
- [5] E W Risley. Discontinuity capacitance of a coaxial line terminated in a circular waveguide (Part II) [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1973, 21(8): 564–566.
- [6] 谢拥军, 梁昌洪, 等. 有耗不连续问题的变分分析 [J]. 电子学报, 1995, 23(9): 95–98.  
Y J Xie, C H Liang, et al. A variational solution of lossy model of waveguide junctions [J]. Acta Electronica Sinica, 1995, 23(9): 95–98. (in Chinese)
- [7] N Marcuvitz. Waveguide Handbook [M]. New York: McGraw-Hill, 1951. 178.
- [8] H N Dawirs. Equivalent circuit of a series gap in the center

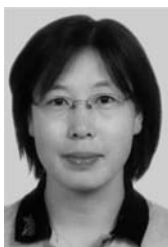
- conductor of a coaxial transmission line [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1969, 17(2): 127–129.
- [9] 钱伟长. 变分法及有限元(上册) [M]. 北京: 科学出版社, 1980. 100–102.
- [10] R E Collin. Field Theory Of Guided Waves [M]. New York: McGraw-Hill, 1960. 314–319.

## 作者简介



张文政 男. 1985 年生, 四川人. 2007 年毕业于电子科技大学, 获学士学位. 现为中国科学院电子学研究所硕士研究生, 主要研究兴趣为微波无源器件.

E-mail: zhangwenzheng.cn@gmail.com



张晓娟(通信作者) 女. 1964 年生, 山西人. 2000 年毕业于中国科学院电子学研究所, 获博士学位. 2001 年–2002 年美国伊利诺伊大学香槟分校博士后; 现为中国科学院电子学研究所研究员. 主要研究兴趣包括: 计算电磁学, 电磁散射与逆散射, 微波成像方法, 天线技术等.

E-mail: xjzhang@mail.ie.ac.cn