

# 基于改进型双正切变换的高阶 近奇异性精确积分方法研究

任 仪<sup>1</sup>, 罗 伟<sup>1</sup>, 胡 浩<sup>2</sup>

(1. 重庆邮电大学光电工程学院, 重庆 400065; 2. 北京控制与电子技术研究所, 北京 100038)

**摘 要:** 电磁场表面积分方程方法(SIE)中的高阶近奇异性积分是 SIE 精确求解的关键技术之一, 但现有方法主要是处理平面单元建模中的低阶近奇异性问题, 目前还没有一种可用于高阶曲面建模中 3 阶近奇异性的精确稳定积分方法. 本文在前期提出的双正切变换方法(DAT)的基础上, 针对高阶曲面建模中含有  $\mathbf{RR}/R^5$ 、 $\mathbf{R}/R^4$  和  $1/R^3$  等形式积分核的近奇异性问题, 通过引入指数变换解决了 DAT 算法在近奇异点与源单元非常接近时算法不稳定的问题, 并通过引入形函数变换解决了 DAT 近奇异点与源单元边界靠近时积分不稳定的问题, 形成改进型双正切变换方法(IDAT). 相对于 DAT, 所提 IDAT 更稳定高效. 所提 IDAT 不仅可用于曲面单元中的高阶近奇异性问题的精确积分, 同时也适用于低阶近奇异积分问题. 理论分析与数值算例验证了本文所提方法的精确性与稳定性.

**关键词:** 表面积分方程方法; 高阶几何建模; 近奇异性积分; 双正切变换

**中图分类号:** TP391.4

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112 (2020)10-1873-10

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2020.10.001

## Research on the Accurate Evaluation of Higher Order Nearly Singular Integrals Based on the Improved Double-Arctan Transformation

REN Yi<sup>1</sup>, LUO Wei<sup>1</sup>, HU Hao<sup>2</sup>

(1. Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China;

2. Beijing Institute of Control and Electric Technology, Beijing 100038, China)

**Abstract:** The accurate evaluation of higher order nearly singular integrals is one of the key technologies in accurate simulation by electromagnetic surface integral equations (SIE). However, the present methods mainly focus on low order nearly singular integrals for the planar element modeling, rather than on 3-order nearly singular integrals in higher order geometry modeling. Based on the former research of the Double Arctan-Transformation (DAT), the Improved Double Arctan-Transformation (IDAT) is proposed to improve the stability and accuracy of the nearly singular integrals with singular kernel  $\mathbf{RR}/R^5$ ,  $\mathbf{R}/R^4$  and  $1/R^3$  for higher order geometry modeling. Specifically, the exponential transformation is utilized to stabilize the integrals when the field points are extremely close to the source surface. Furthermore, the shape-function transformation is adopted to stabilize the integrals when the projection point approaches to the border of source surface. The proposed IDAT is also effective for the lower orders of the nearly singular integral kernels. With theoretical analysis and typical testing cases, the accuracy and stability performance of IDAT is fairly evaluated.

**Key words:** surface integral equations; higher order geometry modeling; singular integral; double-Arctan Transformation

## 1 引言

电磁场表面积分方程方法(Surface Integral Equation, SIE)因具有精确高效的特点而成为当前计算电磁

学最主要的方法之一<sup>[1]</sup>. 然而, 在 SIE 中, 若奇异性 and 近奇异性积分处理不当, 很容易造成阻抗矩阵或散射场的计算精度降低. 通常, 当采用并矢格林函数计算散射场或阻抗矩阵时, 积分核中会包含以下三类奇异性积

分核:(1)  $1/R$  形式的弱奇异性积分核;(2)  $1/R^2$  形式的强奇异性积分核;(3)  $1/R^3$  形式的超奇异性积分核. 当场点与源曲面很接近或重合时,这三类奇异性积分核通常难以采用数值方法精确积分<sup>[2]</sup>. 尤其是对于第三类超近奇异性或超奇异性问题,在曲面建模时目前还没有精确可靠的积分方法,使得高阶奇异性的近奇异性问题成为当前 SIE 精确计算中需要解决的关键问题之一<sup>[3-14]</sup>.

考虑到奇异性积分的重要性,奇异性积分和近奇异性精确积分技术近年来被广泛研究,并提出了若干新型奇异性积分方法. 如 Klockner 等人提出将高阶奇异性积分核进行二维展开再求积分的方法,解决强奇异性积分和强近奇异性积分<sup>[8]</sup>. Khayat 等人基于极坐标变换,提出一种自动求积的方法,实现奇异性积分和近奇异性积分<sup>[9,10]</sup>. Polimeridis 等人提出 DIFECTFN 方法对  $1/R$  和  $1/R^2$  类积分核进行奇异性处理,实现了较高的积分精度<sup>[11]</sup>. Botha 提出一种推广 Duffy 变换方法实现第三类近奇异性积分的消除<sup>[12]</sup>. Li 等人提出一种新的极坐标变换方法处理  $1/R^2$  型近奇异性积分核<sup>[13]</sup>. Seleuk 和 Koc 采用 Hadamard 有限项插值的方法实现  $1/R^2$  型奇异性积分<sup>[14]</sup>. 但是通过调研可看出,当前的奇异性积分和近奇异性积分技术主要存在以下问题:(1) 大多数技术都是针对平面单元建模的情况,很少考虑曲面单元应用场景;(2) 大多数方法都只适用于弱奇异性积分和强奇异性积分,很少是针对超奇异性积分的;(3) 大多数方法都是针对奇异性问题而非近奇异性问题;(4) 部分文献中所谓的超奇异性积分仅是针对  $R/R^3$ ,而不是本文所提的  $1/R^3$ . 因此,目前公开文献中并没有关于曲面建模中的超近奇异性积分处理技术的介绍.

为解决此问题,作者前期提出一种双正切变换方法(Double-Arctan Transformation, DAT)<sup>[15]</sup>,实现了在曲面单元建模时的超近奇异性积分. 该方法在极坐标变换的基础上,对矢径方向变量引入正切变换,从而在理论上消除了 3 阶近奇异性. 所提 DAT 方法可在大多数场合下消除 3 阶近奇异性,满足实际工程和理论分析的要求. 然而,实测分析发现原 DAT 仍存在以下问题:① 该方法的计算精度将随近奇异点与源曲面的投影距离的减小而降低,如当投影距离小于  $1.0 \times 10^{-4}$  时,该方法存在明显误差;② 当曲面单元扭曲较大,并且投影点接近曲面单元的边缘时,由于极坐标变换所引起的形函数和矢径等变量将成为角度的快变函数,造成了数值积分的不稳定. 因此,仍需要进一步研究 DAT 的改进方法,提高 DAT 算法的稳定性.

针对 DAT 所存在的上述问题,本文理论分析其形成原因,提出:(1) 在极半径方向上引入指数变换,通过重新规划高斯积分点的分布,使得在投影距离很小时

实现稳定积分,解决问题①;(2) 在角度方向上,增加形函数变换,根据形函数重新规划角度维方向上的高斯积分点分布,提高该算法在高度扭曲的源单元上积分的稳定性,解决问题②. 为区别原 DAT 算法,此处将引入指数变换和形函数变换的 DAT 算法记为改进型双正切变换方法(Improved Double-Arctan Transformation, IDAT).

## 2 双正切变换方法(DAT)

对于时谐电磁场,在自由空间中的电场和磁场可由电场积分方程和磁场积分方程得到,表示为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mu \langle \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{J}(\mathbf{r}') \rangle - \langle \mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{M}(\mathbf{r}') \rangle \quad (1)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \varepsilon \langle \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{M}(\mathbf{r}') \rangle + \langle \mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{J}(\mathbf{r}') \rangle \quad (2)$$

其中,  $\mathcal{L}$  算子和  $\mathcal{K}$  算子分别表示为

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\omega \int d\mathbf{r}' \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3)$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d\mathbf{r}' \nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (4)$$

其中,  $\bar{\mathbf{G}}$  和  $\nabla \times \bar{\mathbf{G}}$  为并矢格林函数及其旋度,其显示表达式为

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left[ (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}) + (\mathbf{I} - 3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}) \frac{ikR - 1}{k^2 R^2} \right] \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \quad (5)$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \mathbf{I} \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{I}$  是单位矩阵,  $R = |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|$ ,  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$ . 通常电流  $\mathbf{J}$  和磁流  $\mathbf{M}$  采用基函数展开,使得式(1)和(2)的积分变得非常复杂,通常没有解析积分表达式,只能通过数值积分精确计算. 不失一般性,式(1)和(2)中的积分核可展开为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^3 \mathbf{I}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=0}^3 \int_{S'} \frac{\mathbf{F}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{R^n} d\mathbf{r}' \quad (7)$$

其中  $S'$  表示源曲面,  $\mathbf{F}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  为展开多项式. 由于被积函数的复杂性,  $\mathbf{F}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  通常无法得到解析的表达式. 式(2)的积分转化与式(1)类似,此处将不再重复. 在式(7)的积分中,当  $\mathbf{r}$  无限接近于  $\mathbf{r}'$  (源曲面  $S'$ ) 时,则产生近奇异性;当  $\mathbf{r}$  与  $\mathbf{r}'$  可以重合时,则产生奇异性. 当  $\mathbf{F}_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \neq 0$  时,则存在超奇异性;当  $\mathbf{F}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \neq 0$ ,  $\mathbf{F}_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ , 则存在强奇异性;当  $\mathbf{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \neq 0$ ,  $\mathbf{F}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{F}_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ , 则存在弱奇异性. 本文主要研究曲面建模情况下的超近奇异性问题,即式(7)中的  $\mathbf{I}_3$ .

图 1 给出了典型曲面四边形单元建模情况下的近奇异性模型. 场点  $P$  非常接近于源曲面  $S'$ , 其在  $S'$  上的投影点为  $O$ , 投影距离为  $h$ . 当采用高斯积分计算该奇异性问题时,高斯积分点(或源点)  $Q$  到场点  $P$  的距离为  $R = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . 当采用曲面四边形单元建模时,所有的计

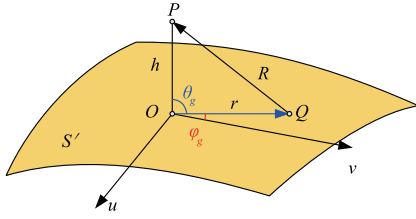


图1 典型曲面单元及其近奇异点模型

算均在参数曲面上进行. 关于参数曲面建模请参考文献[16], 此处不再详细介绍. 得到近奇异投影点  $O$  在参数坐标系下的坐标  $(u_0, v_0)$  后, 以该投影点为原点将待积区域分解为 4 个子三角形, 每个三角形内都进行一次极坐标转化, 如图 2 所示. 投影点到每条边的距离为  $d$ , 即对应的子三角形的高度为  $d$ . 则在 DAT 算法中, 首先以投影点为原心, 将参数坐标系下的变量  $u, v$  与极坐标系下的变量  $\rho, \varphi$  进行转换, 即

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}, \\ \varphi &= \arctan[(v - v_0)/(u - u_0)] \end{aligned} \quad (8)$$

于是  $I_3$  表示为

$$I_3 = \sum_{i=1}^4 I_3^i = \sum_{i=1}^4 \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} \frac{F_3^i(R)}{R^3} \rho d\rho d\varphi \quad (9)$$

其中,  $I_3^i$  表示在第  $i$  个子三角形内的极坐标积分结果. 需要注意的是, 近奇异情况分为两种, 即投影点满足  $-1 \leq u_0, v_0 \leq 1$  (图 2(a)), 和  $|u_0| \geq 1$  和/或  $|v_0| \geq 1$  (图 2(b)). 对于这两种场景, DAT 的处理过程是完全相同的, 差别仅在于(b)中的蓝色子三角形上关于  $\varphi$  的积分上下限满足关系  $\varphi_{\max} < \varphi_{\min}$ .

在 DAT 中, 定义

$$R_T = \sqrt{A^2(\varphi)\rho^2 + h^2} \quad (10)$$

其中,  $A(\varphi)$  为形函数, 表示为<sup>[17]</sup>

$$A(\varphi) = |\mathbf{a}_u \cos \varphi + \mathbf{a}_v \sin \varphi| \quad (11)$$

$\mathbf{a}_u$  和  $\mathbf{a}_v$  是参数坐标系下的协方向矢量<sup>[16]</sup>. 令  $\bar{F}_3^i(R) = F_3^i(R)R_T^2/\rho^3$ , 式(9)中的子积分改写为

$$I_3^i = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} \bar{F}_3^i(R) \frac{1}{R_T^2} d\rho d\varphi \quad (12)$$

可见, 原关于  $R$  的 3 阶近奇异性积分转化为关于  $R_T$  的 2 阶奇异性积分. 为抵消该奇异性, 做数学变换

$$\rho = \frac{h}{A(\varphi) \tan(\xi h)} \quad (13)$$

该变换对应的雅可比因子为  $\eta_\xi = R_T^2/A(\varphi)$ , 于是式(12)重新表示为

$$I_3^i = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{\bar{F}_3^i(R)}{A(\varphi)} d\xi d\varphi \quad (14)$$

可见, 上述变换最终抵消了 3 阶近奇异性.

需要说明的是, 此处虽然是以曲面四边形为例说明 DAT 的操作过程, 但对于曲面三角形建模的情况, 其

过程是基本相同的, 差别仅在于以投影点为参考点将曲三角形分解成 3 个子三角形, 而在各子三角形中的操作与前述过程是相同的.

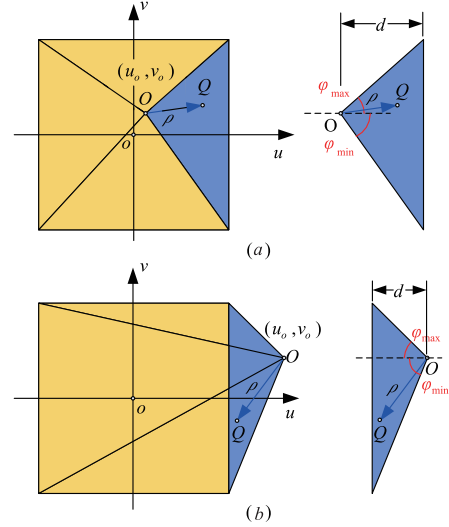


图2 近奇异处理中的两类子三角形离散场景

### 3 改进型 DAT 变换方法

在 DAT 中, 通过对变量  $\rho$  进行正切函数变换, 消除了 3 阶近奇异性. 但是, 在通过参数变换消除近奇异性时, 其数值积分的收敛速度主要取决于: (1) 被积函数随自变量变化的快慢; (2) 被积函数计算的精度. 其中, 在 DAT 中导致被积函数计算精度较差的原因主要包括两点: (1) 计算过程中存在大数据引起的明显绝对计算误差; (2) 变换过程将原大数据变换成小数据, 使得变换前后的积分结果产生较大的变换误差. 上述原因严重影响了 DAT 的稳定性.

#### 3.1 指数变换

当近奇异点非常接近源曲面时, 采用 DAT 变换处理近奇异性积分, 在每个子三角形上是对变量  $\varphi$  和  $\xi$  分别进行高斯积分, 即二维高斯积分. 其中内层为对  $\xi$  的积分, 外层为对  $\varphi$  的积分. 当投影距离  $h$  很小时, 会使得关于  $\xi$  的高斯积分点向近奇异投影点  $O$  聚集, 增大了误差, 并且对离  $O$  点较远处的源信息提取不够充分. 为说明此问题, 不妨将积分区域分成两部分, 如图 3 所示, 即以  $O$  点为中心的一个完整圆形 (图 3 中蓝色部分) 和剩下的白色区域. 对于白色区域, 仍采用原 DAT 在 4 个子区域中进行处理, 而对于蓝色区域, 则可以当成一个完整的积分区域进行积分, 而不再是 4 个子块. 则在该蓝色区域内, 仍对变量  $\varphi$  和  $\xi$  分别进行高斯积分, 但此处调整积分顺序, 内层为对  $\varphi$  的积分, 而外层为  $\xi$ . 并且, 假定  $\varphi$  方向高斯积分点都非常密集, 使得内层积分误差很小. 图 3 中蓝色圆内的虚线圆环表示当取 10 个高斯积分点时, 关于  $\xi$  的高斯积分点的位置. 对于不同的

$\xi$  (或  $\rho$ ) 值, 对于  $\varphi$  在圆周上的积分误差记为  $\delta$ . 此时, 假设有  $n$  个  $\xi$  取值, 则各  $\xi$  值下的误差记为  $\delta_j (j=1, 2, \dots, n)$ . 需要说明的是  $\delta_j$  为相对值, 即

$$\delta_j = \left| \left[ \int_0^{2\pi} \frac{\bar{F}_3(R|\xi_j)}{A(\varphi)} d\varphi - I(R|\xi_j) \right] / I(R|\xi_j) \right| \quad (15)$$

其中  $I(R|\xi_j)$  为当  $\xi$  取第  $j$  个高斯点  $\xi_j$  时  $I$  的精确值. 然而, 需要强调的是, 即使高斯积分可使所有  $\delta_j$  误差都很小, 但当  $\xi_j$  取值很大时, 则  $\rho$  和  $R$  相应的取值很大, 使得  $\bar{F}_3(R)$  也非常大, 最终  $I(R|\xi_j)$  也非常大, 导致在  $\xi_j$  取值很大时的绝对误差将很大. 同理, 在  $\xi_j$  取值较小时, 其  $I(R|\xi_j)$  较小, 绝对误差也较小. 同时, 由于高斯积分点是向圆心汇集的, 使得图 3 中内层圆环上的大数据累积的绝对误差相对较大, 有时甚至大于外层圆环上的小数据的积分结果. 最终, 在  $\xi$  (或  $\rho$ ) 方向进行高斯积分时, 则会使得该积分误差累积, 造成整体积分的误差较高. 需要说明的是, 虽然高斯积分点向圆心汇集, 但是圆心点处的积分结果对整体积分结果贡献并不大, 具体原因可参考文献 [17] 中的主值项分析部分, 此处限于篇幅将不再赘述. 事实上, 根据数值分析结果表明, 当  $\xi$  方向取 10 个高斯点时, 其最内层圆环上的积分结果  $I(R|\xi_{10})$  与最外层的圆环上的积分结果  $I(R|\xi_1)$  最大可相差 10 个数量级, 则对于最内层积分, 即使高斯积分采样点足够密集, 使得积分精度达到  $1.0e-6$ , 也会产生足够大的绝对误差并最终累积明显的数值误差, 造成积分结果不稳定.

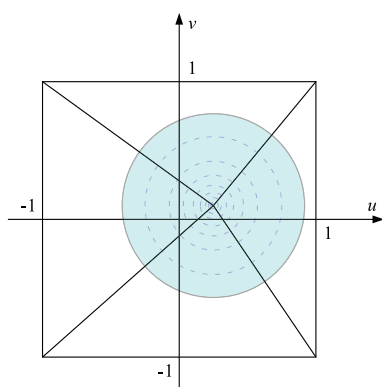


图3 当  $h$  很小时  $\rho$  (或  $\xi$ ) 向高斯积分点分布

为解决上述问题, 可行的方法即是通过二次变换, 将高斯积分点向远离圆心的方向疏散. 目前, 针对该类问题, 常用的方向是采用双曲变换, 即通过采用适当的变换参数将高斯积分点向积分区域两端或中间汇集 [15, 18, 19]. 但该方法的变换参数并不固定, 需要根据模型选择最佳参数. 此外, 双曲变换是同时增大或减小高斯积分点在积分区域两端的采样密度, 而本文需要的是单向增加高斯积分点密度, 因此, 双曲变换不适用于

本文. 为此, 本文提出指数变换

$$\xi = \exp(\zeta) \quad (16)$$

其相应雅可比因子为  $\eta_\zeta = 1/\xi$ , 则式 (14) 的积分改写为

$$I_3^i = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{\bar{F}_3^i(R)}{\xi A(\varphi)} d\zeta d\varphi \quad (17)$$

其积分上下限分别为

$$\zeta_{\min} = \ln\left(\frac{1}{h} \arctan\left(\frac{h}{A(\varphi)\rho_{\max}}\right)\right), \zeta_{\max} = \ln\left(\frac{\pi}{2h}\right) \quad (18)$$

通过指数变换可显著地将高斯积分点向远离圆心的方向移动, 并且不会明显增加被积函数的复杂度, 从而减少了因高斯积分点过于靠近近奇点所引起的数值误差. 本文将通过后续数值算例说明该指数变换的有效性.

### 3.2 形函数变换

对于较为扭曲的高阶曲面单元, 当投影点与源单元的边界非常接近时, 原 DAT 仍然是不稳定的, 表现为积分精度随  $\varphi$  向高斯积分点个数的增加而缓慢增加. 为分析该原因, 我们分析式 (12) 中的积分  $\int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} (1/R_r^2) d\varphi$ , 并考虑  $\rho = \rho_{\max}$  的情形. 此时, 通常  $\rho \ll h$ . 以图 2(a) 中蓝色三角形子块为例, 则  $\rho_{\max} = d/\cos\varphi$ , 于是有

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \frac{1}{R_r^2} d\varphi &= \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \frac{1}{A^2(\varphi)\rho_{\max}^2 + h^2} d\varphi \\ &\approx \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \frac{1}{A^2(\varphi)\rho_{\max}^2} d\varphi = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \frac{\cos^2\varphi}{A^2(\varphi)d^2} d\varphi \quad (19) \end{aligned}$$

由式 (11) 知  $A^2(\varphi)$  为椭圆函数, 其轴比和取向取决于  $\mathbf{a}_u$  和  $\mathbf{a}_v$  的大小和方向, 因此, 当  $A^2(\varphi)$  对应的椭圆长短轴之比很大时,  $1/A^2(\varphi)$  会随  $\varphi$  的变化而快速变化. 并且, 对于曲面单元,  $A^2(\varphi)$  的极值点 (最大值或最小值) 与  $\cos^2\varphi$  的极值点通常是不重合的, 当且仅当  $\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_v = 0$  时才是重合的. 该特点使得在高阶曲面单元建模时, 被积函数  $1/R_r^2$  将是自变量  $\varphi$  的复杂函数, 并且  $|\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_v|$  的取值越大,  $1/R_r^2$  随  $\varphi$  的关系也将更复杂, 因此增加了数值积分的难度. 此外, 当投影点与边的距离  $d$  很小时, 将有  $\varphi_{\max} \rightarrow \pi/2, \varphi_{\min} \rightarrow -\pi/2$ , 使得  $\cos^2\varphi$  的最小值接近于 0, 将近一步使得被积函数  $\cos^2\varphi/(A^2(\varphi)d^2)$  在积分区域内快速变化, 导致高斯积分不稳定. 同时, 根据该分析可见, 当  $d$  较大时, 由形函数的影响引起的被积函数  $\cos^2\varphi/(A^2(\varphi)d^2)$  在积分区域内的变化不会太复杂, 高斯积分仍然较为稳定.

为解决此问题, 此处研究形函数  $A^2(\varphi)$  的代数表达式, 则由式 (11) 展开有

$$\begin{aligned} A^2(\varphi) &= \frac{1}{2} (|\mathbf{a}_u|^2 - |\mathbf{a}_v|^2) \sin(2\varphi) \\ &\quad + \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_v \cos(2\varphi) + \frac{1}{2} (|\mathbf{a}_u|^2 + |\mathbf{a}_v|^2) \quad (20) \end{aligned}$$

为方便起见,令  $x = 0.5(|\mathbf{a}_u|^2 - |\mathbf{a}_v|^2)$ ,  $y = \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_v$ ,  $z = 0.5(|\mathbf{a}_u|^2 + |\mathbf{a}_v|^2)$ ,  $t = \sqrt{x^2 + y^2}$  和  $\sin\varphi_{\max} = x/t$ , 并且显然有  $c > t$ , 式(20)可改写为

$$A^2(\varphi) = t \cdot \sin(2\varphi + \varphi_{\max}) + c \quad (21)$$

考虑基本恒等式

$$\int \frac{d\varphi}{a + b\sin\varphi} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \frac{a \tan \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + c (a^2 > b^2) \quad (22)$$

可得

$$\int \frac{1}{A^2(\varphi)} d\varphi = \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{(z/t)^2 - 1}} \cdot \arctan \frac{\frac{z}{t} \tan \frac{2\varphi + \varphi_{\max}}{2} + 1.0}{\sqrt{(z/t)^2 - 1}} \quad (23)$$

因此,定义参数变换

$$\phi = \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{(z/t)^2 - 1}} \arctan \frac{\frac{z}{t} \tan \frac{2\varphi + \varphi_{\max}}{2} + 1.0}{\sqrt{(z/t)^2 - 1}} \quad (24)$$

则显然有

$$d\varphi = A^2(\varphi) d\phi \quad (25)$$

于是,式(12)改写为

$$\mathbf{I}_3^i = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} \bar{F}_3^i(R) \frac{A^2(\varphi)}{A^2(\varphi)\rho^2 + h^2} d\rho d\varphi \quad (26)$$

其中  $\phi_{\max}$  和  $\phi_{\min}$  为积分上下限,可由式(23)得到

$$\phi_{\min} = \int_0^{\varphi_{\min}} \frac{1}{A^2(\varphi)} d\varphi, \quad \phi_{\max} = \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{1}{A^2(\varphi)} d\varphi \quad (27)$$

显然,式(26)中的积分核因子  $A^2(\varphi)/(A^2(\varphi)\rho^2 + h^2)$  是随  $\varphi$  的缓变函数,从而解决了因单元扭曲造成的数值积分不稳定的问题。

#### 4 数值算例

为证明本文所提 IDAT 方法的有效性,此处首先采用一高度扭曲的 9 点曲面四边形单元为源单元进行分析验证. 所采用 9 点曲面单元的 9 个控制点坐标分别为  $\mathbf{r}_1 = (-0.7, -1.0, -0.2)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (0.0, -0.75, -0.0)$ ,  $\mathbf{r}_3 = (0.4, -1.0, 0.1)$ ,  $\mathbf{r}_4 = (-1.0, 0.0, -0.0)$ ,  $\mathbf{r}_5 = (0.0, 0.0, 0.2)$ ,  $\mathbf{r}_6 = (1.0, 0.0, -0.0)$ ,  $\mathbf{r}_7 = (-1.0, 1.0, 0.2)$ ,  $\mathbf{r}_8 = (0.0, 0.65, -0.0)$ ,  $\mathbf{r}_9 = (1.8, 1.0, -0.1)$ . 本文所有关于长度的参量均以米为单位. 所对应曲面如图 4 所示,所研究近奇异投影点约为图中 A 所示位置,即对应图 2(b). 图 A 点对应参数坐标为  $(u = 1.2, v = 0.4)$ . 所研究被积函数为

$$f_1 = \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} \quad (28)$$

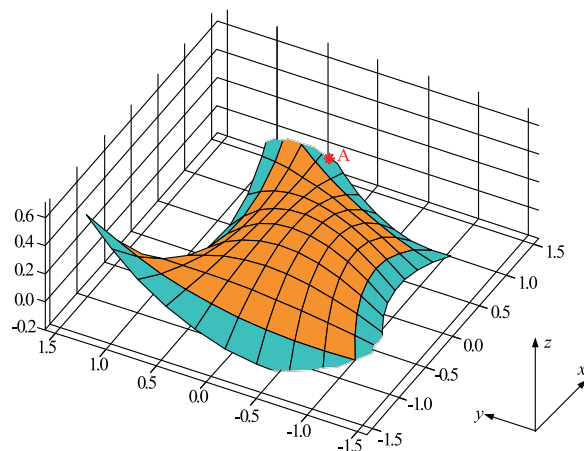


图4 典型9点参数曲面

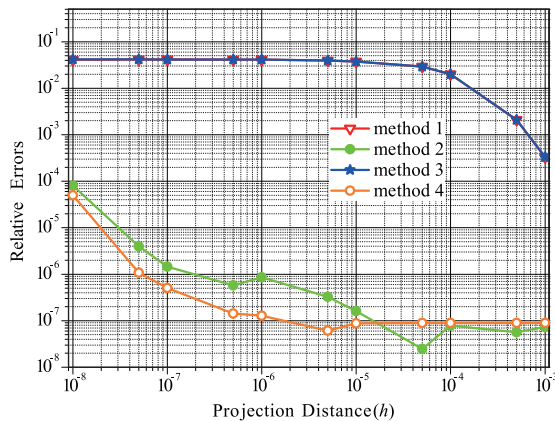
以及

$$f_2 = \frac{y - y'}{R^4} + \frac{(x - x')(y - y')}{R^5} \quad (29)$$

需要说明的是,目前的公开文献和软件中还没有类似的高效数值算法可实现高阶曲面建模下的高阶近奇异性精确积分,因此该算例的参考结果由 Matlab 采用辛普森积分计算所得,所设定计算精度为  $1.0\text{e-}8$ . 但需要强调的是,对于图 2(a),当投影距离  $h$  非常靠近源曲面时(如  $h < 1.0\text{e-}4$ ),Matlab 中的辛普森积分会因为出现奇异性而报错,无法提供精确的参考结果;而当投影距离  $h$  离源曲面较远时,所提 IDAT 算法与原 DAT 算法的性能差别不大. 因此,为保证参考结果的可靠性,该算例仅对图 2(b)进行对比分析研究,而更为一般的对比将在算例 2 中进行分析研究. 对于(a)和(b),本文所提算法在处理方式上是相同的,但对于(b),若投影点距离源单元及其边界较远,辛普森积分不会产生奇异,Matlab 可得到可靠的参考结果. 为方便进行比较,本文研究不同的 DAT 算法的性能,并将原 DAT 标记为 method 1,将加入指数变换的 DAT 记为 method 2,将加入形函数变换的 DAT 记为 method 3,将加入了指数变换和形函数变换的 DAT(即 IDAT)记为 method 4. 对于(12)所示的二维积分,分别将  $\rho$ (或 DAT 中的  $\xi$ ,或指数变换中的  $\zeta$ )方向的高斯积分点个数记为  $n_1$ ,而关于  $\varphi$ (或形函数变换中的  $\phi$ )方向的高斯积分点个数记为  $n_2$ .

首先研究点 A( $u = 1.2, v = 0.4$ ),对于被积函数  $f_1$ ,不同算法的积分精度随投影距离  $h$  的变化. 此时,为保证高斯积分精度,  $n_1$  和  $n_2$  均取为 100. 对于 method 1,当投影距离小于  $1.0\text{e-}4$  时,其积分结果明显变差,并恒定于  $1.0\text{e-}2$ ,而对于采用了指数变换的 method 2 和 method 4,计算精度可以达到  $1.0\text{e-}6$  以下. 需要说明的是,当投影距离进一步减小,如  $h = 1.0\text{e-}8$ ,即使采用了指数变换,精度仍然变差,这是因为此时近奇异点已经非常接

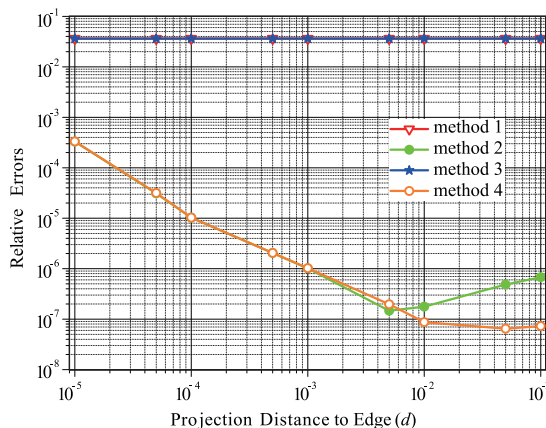


图5 点A处不同方法的积分精度随投影距离 $h$ 的变化

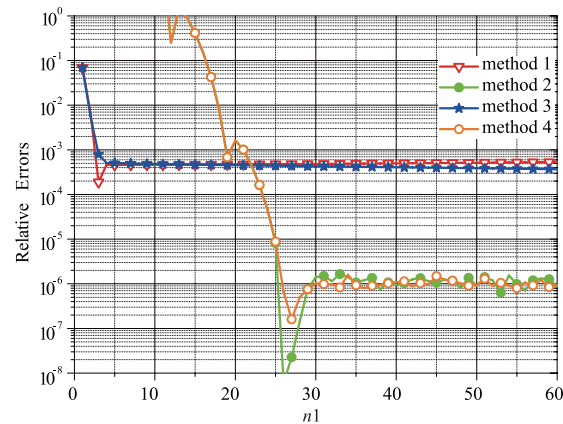
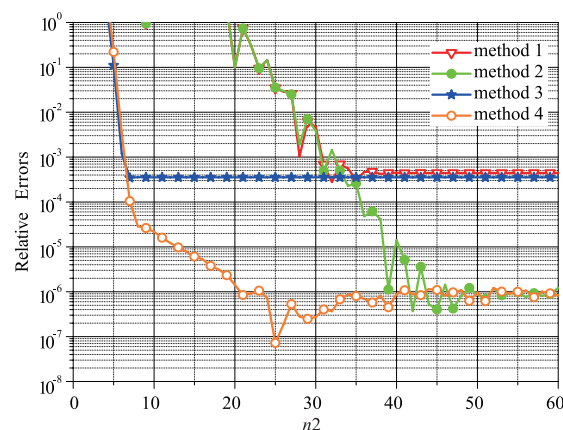
近于源单元,此时该问题已经非常接近于奇异性问题,而本文所提算法暂不适合用于奇异性处理.由该图还可看出,此时的投影点离参数单元的边界较远,加入形函数变换的 method 3 与 method 1 效果几乎一致,与 3.2 中的分析一致.

图6给出了当投影距离 $h$ 固定为 $1.0 \times 10^{-6}$ 时,对于被积函数 $f_1$ ,积分精度随投影点与边的距离 $d$ 的变化.即,投影点为 $u = 1.0 + d, v = 0.4$ .从图6中可看出 method 1 在该情况下几乎失效,但 method 2 和 method 4 则可以得到精确的结果.需要说明的是虽然 method 3 中加入了形函数变换,但因为 method 3 中没有指数变换,因此当投影距离为 $1.0 \times 10^{-6}$ 时,method 3 的积分精度几乎没有改善.此外,由于 $n_1$ 和 $n_2$ 均为100,保证了较高的积分精度,使得 method 2 和 method 4 有非常接近的积分效果.

本文所提 IDAT 算法除可解决问题①和②中出现的的不稳定外,同时具有快速收敛的特性.为说明此特征,此处设近奇异点 B,对应参数坐标为 $(u = 1.01, v = 0.4)$ ,投影距离为 $h = 1.0 \times 10^{-6}$ ,对应物理坐标为 $(1.310273247, 0.402572687, -0.043573842)$ ,被积函数为 $f_2$ .当采用辛普森积分计算参考值时,积分精度为

图6 积分精度随投影点与边的距离 $d$ 的变化

$1.0 \times 10^{-8}$ ,对应的参考值为 $-121.1477433360931$ .此外,分别研究不同算法的积分精度随 $n_1$ 和 $n_2$ 的变化情况,如图7和图8所示.对于图7,固定 $n_2 = 100$ ,研究积分精度随 $n_1$ 的变化,而对于图8,固定 $n_1 = 100$ ,研究积分精度随 $n_2$ 的变化.从图7和图8中可见,当采用指数变换和形函数变化时,method 4 随 $n_1$ 和 $n_2$ 快速收敛,并可收敛至更高精度,而原 DAT 则随着 $n_1$ 和 $n_2$ 的增加,积分精度收敛至一定水平后几乎保持恒定,不再随高斯积分点的增加而发生变化.因此,通过以上分析可看出,所提 IDAT 算法可极大地提高原 DAT 算法的稳定性,在近奇异点非常接近源曲面,以及源曲面边界时,均可实现精确积分和快速收敛.需要说明的是,所提 DAT 和 IDAT 算法仅是当前 SIE 算法中的关键技术之一,对 SIE 的总体计算复杂度无影响,而 DAT 和 IDAT 本身的算法复杂度为 $O(n_1 \cdot n_2)$ ,并且与频率无关.

图7 积分精度随 $n_1$ 的变化图8 积分精度随 $n_2$ 的变化

为进一步展示所提 IDAT 的效果,在第2个算例中建立一单位球面,并采用24个二阶曲面四边形单元拟合该球面.在球内放置一电偶极子,偶极子位置坐标为 $(0.3, 0.2, -0.5)$ ,极化角为 $\theta = 45^\circ, \varphi = 45^\circ$ ,频率为 $1.0 \text{ MHz}$ .现假设球内外介质均为空气,则由惠更斯原

理,球外的场可由球表面的感应电流和磁流通过式(1)和(2)计算得到.而感应电流  $\mathbf{J}$  和感应磁流  $\mathbf{M}$  可由下式得到

$$\mathbf{J} = -\hat{n} \times \mathbf{H}^{inc}, \mathbf{M} = \hat{n} \times \mathbf{E}^{inc} \quad (30)$$

其中  $\hat{n}$  为球面的单位外法向,  $\mathbf{E}^{inc}$  和  $\mathbf{H}^{inc}$  为偶极子在球面上产生的入射场.对于该模型,在球面以外区域,通过式(1)和(2)计算得到的场(记为  $\mathbf{E}^{Hug}$  和  $\mathbf{H}^{Hug}$ )应当与自由空间中偶极子产生的场( $\mathbf{E}^{inc}$  和  $\mathbf{H}^{inc}$ )相同.然而,实际上,当场点与球面很接近时,由于近奇异性的影响而使得上述方法得到的  $\mathbf{E}^{Hug}$  (或  $\mathbf{H}^{Hug}$ ) 与偶极子产生的真实场  $\mathbf{E}^{inc}$  (或  $\mathbf{H}^{inc}$ ) 存在误差.并且,对于传统方法,场点与球面越接近,近奇异性越强,误差越大.由于式(1)和(2)对等,此处只对式(1)所得电场进行分析研究.针对该特殊模型,需要说明的是:①该算例选择空气球面为目标,则其理论上不会产生附加散射,便于获得精确的参考结果;②该算例直接采用惠更斯等效源,避免了 SIE 算法中的基函数展开和矩阵方程求解所引入的附加误差,保证了此处 IDAT 算法性能分析的可信度.

为便于分析,图 9 所示单位球面被均匀分割成 24 个曲面单元,即该 24 个单元具有完全相同的几何形状,仅是空间位置和方位不同.显然,该单位球面采用 24 个曲面四边形拟合是很粗糙的,即几何建模精度较低.因此,此处所提的球面投影距离实际上是在曲面单元上的投影距离.不失一般性,选择该球面上的第 23 号单元进行分析研究,其 9 个控制点的物理坐标为  $\mathbf{r}_1 = (0.70711, 0.0, -0.70711)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (0.67389, 0.30291, -0.67389)$ ,  $\mathbf{r}_3 = (0.57735, 0.57735, -0.57735)$ ,  $\mathbf{r}_4 = (0.92388, 0.0, -0.38268)$ ,  $\mathbf{r}_5 = (0.8498759133, 0.358623845983, -0.358623846377)$ ,  $\mathbf{r}_6 = (0.67389, 0.67389, -0.30291)$ ,  $\mathbf{r}_7 = (1.0, 0.0, 0.0)$ ,  $\mathbf{r}_8 = (0.92388, 0.38268, 0.0)$ ,  $\mathbf{r}_9 = (0.70711, 0.70711, 0.0)$ , 如图中的黄色区域所示.同时,为典型分析所提 IDAT 的性能,选择图中的典型位置进行研究,即取近奇异性投影点为如图所示的 A 点( $u = -0.2, v = 0.4$ ), B 点( $u = -1.0, v = -0.6$ )和 C 点( $u = 1.0, v = -1.0$ ).误差定义为

$$\text{error} = |(\hat{n} \cdot \mathbf{E}^{Hug} - \hat{n} \cdot \mathbf{E}^{inc}) / \hat{n} \cdot \mathbf{E}^{inc}| \quad (31)$$

其中  $\hat{n}$  为投影点处参数单元上的单位外法向矢量.

首先,研究在投影点 A 处计算精度随投影距离  $h$  的变化,如图 10 所示.此时,  $n_1 = n_2 = 100$ , 可保证数值积分的高精度.从图中可见,对于 method 1 和 method 3,因为未使用指数变换,当投影距离较小时,其积分精度明显较差,并趋于恒定,而采用了指数变换的 method 2 和 method 4 则可以收敛至  $1.0 \times 10^{-9}$  的精度.与图 5 相似,当投影距离非常小,使得  $h$  趋近于 0 时,该近奇异性积

分趋近于奇异性积分,所提 IDAT 的效果也将变差,但仍然可达到  $1.0 \times 10^{-4}$  的积分精度.可见,采用指数变换极大地提高了近奇异性处理能力.

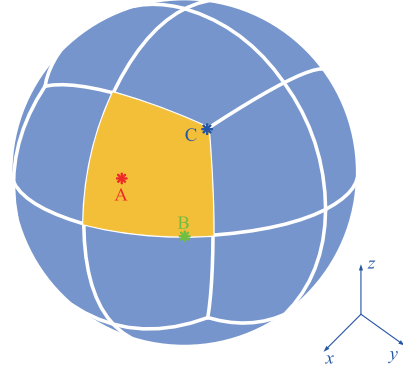


图9 采用24个曲面四边形单元拟合的单位球壳

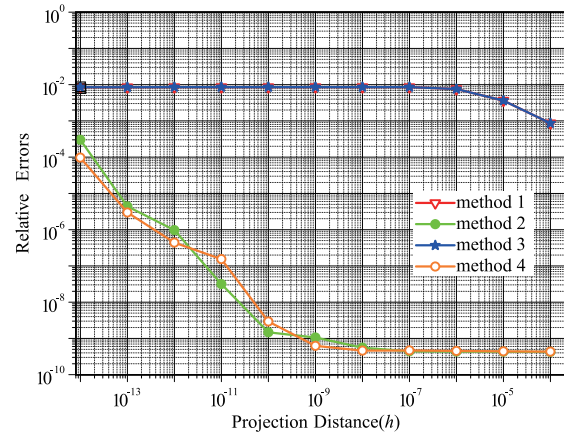


图10 点A处的计算精度随投影距离 $h$ 的变化

图 11 给出了积分精度随投影点与边的距离  $d$  的变化.此时取 B 点,即,  $u = -1.0 + d, v = -0.6, n_1 = n_2 = 100$ , 投影距离  $h$  为  $1.0 \times 10^{-6}$ .与图 6 类似,当投影距离  $d$  与边很接近时, method 1 和 method 3 几乎失效,而 method 2 和 method 4 却可以实现精确积分.为进一步说明指数变换的影响,图 12 给出了 method 1 和 method 2 在 A 和 B 点的积分精度随  $n_1$  的变化.此时,投影距离为  $1.0 \times 10^{-7}$ , A 点坐标为 ( $u = -0.2, v = 0.4$ ), B 点坐标为 ( $u = -1.0 + 1.0 \times 10^{-7}, v = -0.6$ ).由于投影距离  $h$  太小, method 1 是失效的,积分结果几乎恒定.而采用了指数变换的 method 2 则可快速收敛至精确结果.从图中可看出,当  $n_1$  取 25 时,该积分即可收敛至  $1.0 \times 10^{-8}$  的精度.为研究形函数变换对积分精度的影响,图 13 分别给出了在 B 点和 C 点处 method 2 和 method 4 的积分精度随  $n_2$  的变化.此时,投影距离  $h$  为  $1.0 \times 10^{-7}$ , B 点为 ( $u = -1.0 + 1.0 \times 10^{-7}, v = -0.6$ ), C 点为 ( $u = 1.0 - 1.0 \times 10^{-7}, v = -1.0 + 1.0 \times 10^{-3}$ ).从图中可见, method 4 在 B 和 C 点均可快速收敛,而 method 2 在 B 点可快速收敛,在 C 点却收敛很



慢. 这是因为, 在 B 点, 方向矢量  $\mathbf{a}_u$  与  $\mathbf{a}_v$  几乎正交, 而在 C 点则非正交. 实际上, 在 B 点  $|\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_v| = 1.5 \times 10^{-3}$ , 而在 C 点,  $|\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_v| = 5.5 \times 10^{-1}$ , 因此, 在 C 点, 由于形函数的影响, 使得数值积分更难精确积分. 而对于采用了形函数变换的 method 4, 则可以实现快速收敛, 达到精确求解的目的. 这也与前文所分析的形函数对积分结果的影响相符.

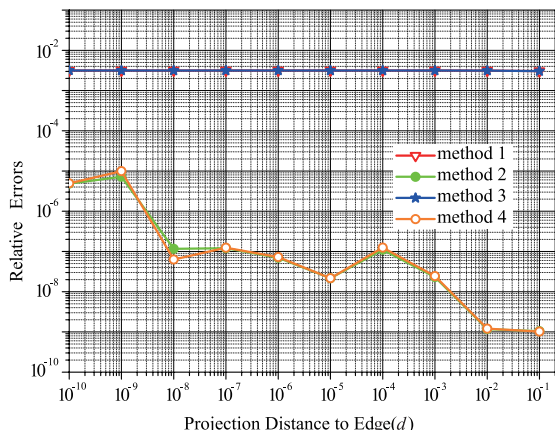


图11 点B处的计算精度随投影点与边的距离 $d$ 的变化

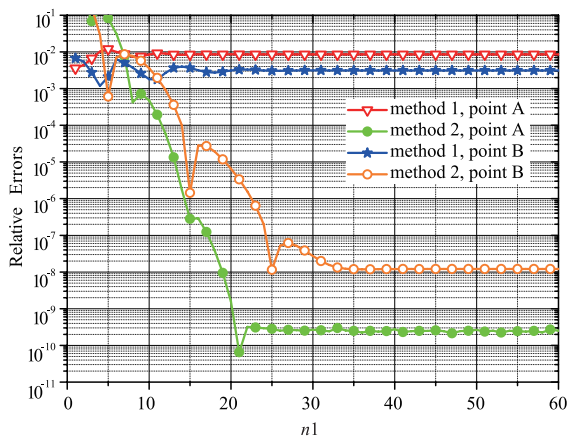


图12 积分精度随 $n1$ 的变化

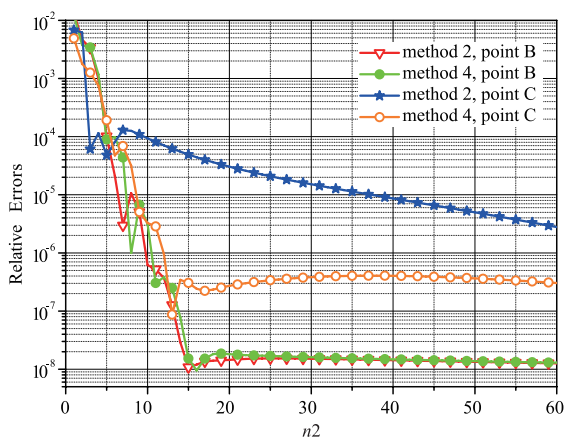


图13 积分精度随 $n2$ 的变化

为进一步说明所提方法用于计算电大尺寸目标表面近场时的有效性, 此处仿真分析了一圆柱体结构的表面电场分布. 所分析圆柱体的直径为 20m, 高度为 5m, 旋转轴为  $z$  轴, 坐标原点为下底面的中心. 采用电偶极子激励, 其位置为  $(10, -15, 20)$ , 而极化角为  $\theta = 90^\circ, \varphi = 60^\circ$ , 工作频率 300MHz. 目标表面采用 9 点的曲面四边形单元进行离散, 共使用了 151232 个单元. 对于此算例, 我们分析距离上顶面  $1.0 \times 10^{-6}$  处的表面近场, 其观察点坐标为  $(-5.0 \sim 5.0, 1.0, 5.0 + 1.0 \times 10^{-6})$ . 与算例 2 类似, 该算例中我们仍然将所计算的圆柱体内填充空气, 即圆柱体表面为一虚拟表面, 而表面感应电流 (由激励场产生的惠更斯源) 可由式 (30) 计算得到. 此时, 在观察点处, 填充了空气的圆柱体表面所产生的散射场理论值为 0. 但由于观察点距离圆柱表面很近, 当采用 (1) 和 (2) 计算表面近场时, 将存在严重的近奇异性, 若不进行处理将无法得到可靠的结果. 对于该算例, 我们将重点研究 DAT 与 IDAT 的计算性能, 即 method 1 和 method 4, 因此, 我们分别采用 DAT 和 IDAT 算法分析计算了观察点处的  $E_z$  场分量, 并与理论值进行对比 (即入射场), 如图 14 所示. 此时根据前述分析结果, 为保证 DAT 和 IDAT 的积分精度, 设定  $n1 = n2 = 50$ . 此处所述场分量是偶极子的直射场与圆柱体表面惠更斯源计算出的二次场之和, 即总场. 此时, 由于观察点是一条直线, 随着  $x$  取值的变化, 需要进行近奇异性处理的单元也将不同, 并且在不同单元上的投影点参数坐标以及单元边界的距离  $d$  也将不同 (如图 2 所示). 如前所述, 考虑到观察点与圆柱面的距离非常小, DAT 算法表现不稳定, 其所计算得到的表面近场与理论解存在明显误差, 尤其是场点位置接近单元边界时, 如图 14 所示. 而本文所提 IDAT 则可以针对不同的情况有效地控制精度, 从而保证了所计算表面近场与理论结果的精确吻合. 需要说明的是, 图 14 仅给出了  $E_z$  分量, 但其它电场和磁场分量的情况与之类似, 此处限于篇幅不再

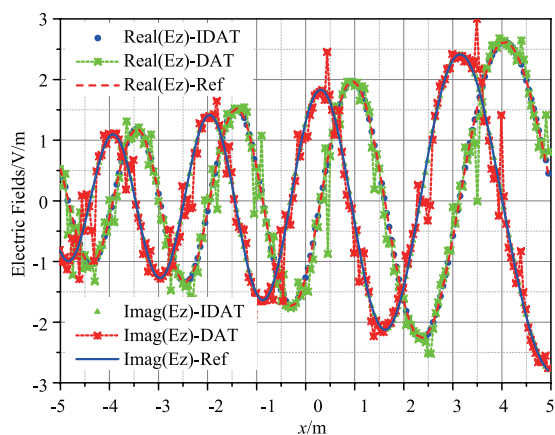


图14 圆柱体表面的近区电场



一一描述。

## 5 总结

本文在前期双正切变换(DAT)的基础上,针对高阶曲面建模中 DAT 在计算 3 阶近奇异性积分时所存在的不稳定问题:①当近奇异点与源曲面投影距离很小时,积分精度较低;②当投影点与源单元边界距离很小时,积分精度和收敛速度对单元扭曲程度高度敏感。本文分析了形成该现象的原因,并针对上述问题分别提出了两种变换方法,即针对问题①提出了指数变换,使得当近奇异点与源曲面投影距离很小时,DAT 算法仍然能精确计算 3 阶近奇异性积分,针对问题②,提出形函数变换,解决了积分精度和收敛速度对单元扭曲过于敏感的问题。所提改进型双正切变换(IDAT)极大地提高了原 DAT 算法的稳定性,实现了在高阶曲面建模时 3 阶近奇异性积分的精确稳定计算。本文最后通过数值算例证明了所提算法的高效性和稳定性。

## 参考文献

- [1] Chew W C, Michielssen E, Song J, Jin J M. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics[M]. Norwood, MA: Artech House, 2001.
- [2] Brown W J, Wilton D R. Singular basis functions and curvilinear triangles in the solution of the electric field integral equation[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 1999, 47(2): 347–353.
- [3] Tong M S, Chew W C. A novel approach for evaluating hypersingular and strongly singular surface integrals in electromagnetics[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2010, 58(11): 3593–3601.
- [4] Karami G, Derakhshan D. An efficient method to evaluate hypersingular and supersingular integrals in boundary integral equations analysis[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1999, 23(4): 317–326.
- [5] Polimeridis A G, Jarvenpaa S, Yla-Oijala P, Gray L J, Kiminki S P, Mosig J R. On the evaluation of hyper-singular double normal derivative kernels in surface integral equation methods[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2013, 37(2): 205–210.
- [6] Fink P W, Wilton D R, Khayat M A. Simple and efficient numerical evaluation of near-hypersingular integrals[J]. IEEE Antennas and Wireless Propag Letters, 2008, 7: 469–472.
- [7] Vipiana F, Wilton D R. Numerical evaluation via singularity cancellation schemes of near-singular integrals involving the gradient of Helmholtz-type potentials[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2013, 61(3): 1255–1265.
- [8] Klockner A, Barnett A, Greengard L, Oneil M. Quadrature by expansion: A new method for the evaluation of layer potentials[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 25(2): 332–349.
- [9] Khayat M A, Wilton D R, Fink P W. An improved transformation and optimized sampling scheme for the numerical evaluation of singular and near-singular potentials[J]. IEEE Antennas and Wireless Propag Letters, 2008, 7(7): 377–380.
- [10] Khayat M A, Wilton D R. Numerical evaluation of singular and near-singular potential integrals[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2005, 53(10): 3180–3190.
- [11] Polimeridis A G, Vipiana F, Mosig J R, Wilton D R. DIRECTFN: Fully numerical algorithms for high precision computation of singular integrals in galerkin sie methods[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2013, 61(6): 3112–3122.
- [12] Botha M M. A family of augmented Duffy transformations for near-singularity cancellation quadrature[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2013, 61(6): 3123–3134.
- [13] Li L, Wang K, Eibert T F. A projection height independent adaptive radial-angular-transformation for singular integrals[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2014, 62(10): 5381–5386.
- [14] Selcuk G, Koc S S. Evaluation of hypersingular integrals on non-planar surfaces[A]. 2014 International Conference on Numerical Electromagnetic Modeling and Optimization for RF, Microwave, and Terahertz Applications (NEMO)[C]. IEEE, 2014. 1–4.
- [15] Ren Y, Huang W F, Niu J, Liu Q H. Nearly hypersingular integrals by double-arctan transformation in higher order geometry modeling[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2016, 64(10): 4493–4498.
- [16] Jorgensen E, Volakis J L, Meincke P. Higher order hierarchical Legendre basis functions for electromagnetic modeling[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2004, 52(11): 2985–2995.
- [17] Guiggiani M, Krishnasamy G, Rudolphi T J. A general algorithm for the numerical solution of hyper-singular boundary integral equations[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1993, 59: 604–614.
- [18] 姚厚朴, 校金友, 文立华. 高阶边界元奇异积分的一种通用高效计算方法[J]. 计算力学学报, 2015, 32(1): 1–6.
- [19] Johnston P R. Application of sigmoidal transformations to weakly singular and near-singular boundary element integrals[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 45(10): 1333–1348.

## 作者简介



任 仪 男,1982 年出生,安徽巢湖人,重庆邮电大学光电工程学院教授,主要研究方向为计算电磁学、电磁法勘探.

E-mail: renyi\_cq@hotmail.com



罗 伟(通信作者) 男,1984 年出生,陕西扶风人,重庆邮电大学光电工程学院副教授,主要研究方向为计算电磁学、无线通信天线与射频设计.

E-mail: luoweil@cqupt.edu.cn



胡 浩 男,1982 年出生,四川江油人,北京控制与电子技术研究所高级工程师,主要研究方向为系统仿真、计算电磁学和电磁兼容.

E-mail: huhao82@163.com