

# 乘性和加性噪声相关背景下的二维谐波频率估计

窦慧晶, 王树勋, 汪飞

(吉林大学通信工程学院, 吉林长春 130025)

**摘要:** 本文利用二维循环统计量方法对乘性噪声之间相关、乘性噪声和加性噪声之间也相关这种复杂噪声背景下的谐波恢复问题进行了研究。首先, 提出了二维噪声互可混的概念, 用它来体现多个二维噪声之间的关系; 然后, 在乘性噪声为非零均值时, 定义了二维循环均值来估计信号频率。在乘性噪声和加性噪声为零均值时, 定义特殊的二维六阶时间平均多矩谱切片来估计信号频率。仿真实验证明了算法的有效性。

**关键词:** 二维谐波恢复; 互可混; 二维循环均值; 时间平均多矩谱

**中图分类号:** TN911. 72      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2004) 01-0082-04

## Two-Dimensional Frequency Estimation in Correlative Multiplicative and Additive Noise

DOU Huijing, WANG Shuxun, WANG Fei

(Communication Engineering College, Jilin University, Changchun, Jilin 130025, China)

**Abstract:** In this paper, the problem of frequency estimation of two-dimensional (2D) harmonics in the presence of correlative multiplicative and additive noise is presented. We propose a 2D cyclic statistic-based approach to this problem, and 2D cyclic mean is employed to estimate frequency in nonzero mean multiplicative noise. A special 2D slice of the sixth-order time-average moment spectrum is defined to estimate frequency in zero mean multiplicative and additive noise. The effectiveness of our methods is demonstrated through some simulation examples.

**Key words:** 2D frequency estimation; 2D cross-mixing; 2D cyclic mean and time-average moment spectrum

## 1 引言

谐波恢复在现代信号处理中占有重要地位, 二维谐波恢复问题是近年来出现的新研究热点, 并且在雷达、声纳、地球物理、无线通信和生物医学等众多领域得到了广泛的应用。围绕这一热点问题, 国内外学者进行了大量的研究, MEMP<sup>[1]</sup>、MUSIC<sup>[2]</sup>、ESPRIT<sup>[3]</sup>、MLE<sup>[4]</sup>、PRONY<sup>[5]</sup>等方法对于处理仅含加性高斯白噪声的二维谐波恢复问题, 取得了显著的效果。鉴于高阶累积量对任何高斯噪声的不敏感性, 利用高阶累积量的方法<sup>[6]</sup>解决高斯噪声背景下的二维谐波恢复问题亦取得了明显的效果。

然而, 岂今为止, 多数二维谐波恢复方法只考虑存在加性噪声的情况, 实际上, 乘性噪声大量存在, 对于乘性噪声与加性噪声共存的情况, 目前在一维情况下, 多是利用循环统计量方法进行频率和相位估计<sup>[7~9]</sup>, 文[7, 8]中算法的一项重要假设就是要求乘性噪声之间、乘性噪声和加性噪声之间相互独立, 并且噪声必须满足可混的条件。由于循环平稳理论在一维循环平稳过程的频率和相位估计中被证明是一种有效的方法, 因此, 自从 V. G. Aleksiev 在高斯场中定义了二维循环平稳过程之后, 二维循环统计量方法越来越受到广泛的的关注。

考虑在实际环境中, 噪声的相关性不容忽视。在一维情况下, 徐景在文[9]中假设乘性噪声之间相关、乘性噪声和加性噪声之间也相关, 他所提出的循环统计量方法在估计频率时取得了很好的效果。同样, 在噪声相关条件下的二维谐波频率估计问题的研究也具有实际意义和必要性。本文利用二维循环统计量方法对这一问题进行了研究, 取得了显著的效果。

本文在第二部分为了体现多个二维噪声之间的关系, 首先提出了二维噪声互可混的概念, 来描述噪声之间的关系。第三部分, 首先定义二维循环均值来估计乘性噪声为非零均值时的信号频率。然后, 定义了特殊的六阶时间平均多矩谱切片, 用它估计乘性噪声为零均值时的谐波信号频率; 第四部分的仿真实验证明了算法的有效性。

## 2 二维随机过程的自可混与互可混

设  $s(m, n) = \{s_0(m, n), \dots, s_L(m, n)\}$  是一个二维平稳随机过程, 则  $s(m, n)$  随机过程的  $k+1$  阶互累积量为:

$$C_{\frac{s_1}{s_1}, \frac{s_2}{s_2}, \dots, \frac{s_{k+1}}{s_{k+1}}}^{(p)}(m, n; \underline{S}, \underline{N}) > \text{cum} \left\{ S_1^{(p_0)}(m, n), S_2^{(p_1)}(m + S_1, n + N), \dots, S_{k+1}^{(p_k)}(m + S_k, n + N) \right\} \quad (1)$$

其中,  $k$  为正整数,  $\underline{s} = (s_0, s_1, \dots, s_k)$ ,  $s_i = 1 \text{ or } -1$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ,  $\underline{S} = (S_1, \dots, S_k)$ ,  $\underline{N} = (N_1, N_2, \dots, N_k)$ ,  $l_1, l_2, \dots, l_{k+1} = 0, 1, \dots, L$ .  $s^{(1)}(m, n) > s(m, n)$ ,  $s^{(-1)}(m, n) > s^*(m, n)$ . 当  $s_{l_1}(m, n) = s(m, n)$ ,  $s_{l_2}(m, n) = s(m, n), \dots, s_{l_{k+1}}(m, n) = s(m, n)$  时, 式(1)化为:

$$\begin{aligned} C_{(k+1)s}^{(p)}(m, n; \underline{S}, \underline{N}) &= \text{cum}\left(S^{(p_0)}(m, n), \right. \\ &\quad \left. S^{(p_1)}(m+S_1, n+N_1), \dots, S^{(p_k)}(m+S_k, n+N_k)\right) \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)称为随机过程  $\underline{s}(m, n)$  的  $k+1$  阶自累积量.

若随机过程  $\underline{s}(m, n)$  的自累积量绝对可和, 则称随机过程  $\underline{s}(m, n)$  是可混的, 也可称为自可混. 即满足

$$\mathbb{E}_{\substack{S_1, \dots, S_k = -1 \\ N_1, \dots, N_k = -1}} \mathbb{E}_{\substack{m, n}} \sup_{m, n} |C_{(k+1)s}^{(p)}(m, n; \underline{S}, \underline{N})| < \infty \quad (3)$$

噪声可混的研究对象为单元素, 刻划了噪声在时间上的近似不相关性. 为了研究乘性噪声之间相关、乘性噪声和加性噪声之间也相关情况下的频率估计, 本文定义了互可混的概念, 用它表明噪声之间的相关性.

**定义 1 二维随机过程的互可混** 若二维随机过程  $\underline{s}(m, n)$  的自累积量和互累积量都绝对可和, 则称二维随机过程  $\underline{s}(m, n)$  是互可混的. 即同时满足式(3)和下式:

$$\mathbb{E}_{\substack{S_1, \dots, S_k = -1 \\ N_1, \dots, N_k = -1}} \mathbb{E}_{\substack{m, n}} \sup_{m, n} |C_{s_1, s_2, \dots, s_{k+1}s}^{(p)}(m, n; \underline{S}, \underline{N})| < \infty \quad (4)$$

其中,  $l_1, l_2, \dots, l_{k+1} = 0, 1, \dots, L$ .

互可混的研究对象为多个元素组成的集合, 互可混不但刻划了元素自身的特性, 而且还刻划了元素与元素之间的关系. 在本文中, 集合可以看作由多个乘性噪声和加性噪声组成. 互可混刻划了噪声之间的相互关系.

**性质 1** 若离散随机过程集合  $\{s_l(m, n)\}_{l=0}^L$ , 其各个元素满足自可混的条件且相互之间独立, 那么该集合的元素又是互可混的.

在研究乘性噪声背景下的谐波恢复时, 若假设噪声满足自可混和相互独立这两个条件, 由性质 1 可得出如下结论: 满足自可混和相互独立的噪声必定是互可混的; 反之满足互可混的噪声不一定是相互独立的.

### 3 乘性和加性噪声相关背景下的二维谐波频率估计

定义二维谐波信号的观测模型为

$$x(m, n) = \sum_{l=1}^L w_l(m, n) e^{j(X_l m + X_{2l} n + \gamma_l)} + v(m, n) \quad (5)$$

其中,  $m, n$  代表二维时间坐标,  $m = 0, 1, \dots, T_1 - 1$ ,  $n = 0, 1, \dots, T_2 - 1$ .  $L$  代表信号个数,  $(X_{1l}, X_{2l})$  代表第  $l$  个信号频率对,  $\gamma_l$  代表第  $l$  个信号相位.  $w_l(m, n)$  为乘性噪声,  $v(m, n)$  为加性噪声.

假设: (A1) 各频率对互不相等, 不存在非线性谐波耦合,  $X_{kl} \neq (0, 2P/3)$ ,  $k = 1, 2; l = 1, \dots, L$ . (A2)  $\gamma_l$  为确定性常数,  $\gamma_l \in I \subset [0, P]$ . (A3) 乘性噪声  $w_l(m, n)$  和  $v(m, n)$  加性噪声是

二维平稳随机过程, 乘性噪声之间相关, 乘性噪声与加性噪声之间也相关. (A4) 噪声满足互可混条件(3)和(4)式.

为便于分析问题, 对上述信号的观测模型作如下变形

$$x(m, n) = \sum_{l=0}^L s_l(m, n) e^{j(X_{1l} m + X_{2l} n)} \quad (6)$$

其中,  $s_l(m, n) = w_l(m, n) e^{j\gamma_l}$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ ,  $s_0(m, n) = v(m, n)$ ,  $(X_{10}, X_{20}) = (0, 0)$ .

#### 3.1 基于二维循环均值的二维谐波频率估计

在式(5)中, 若  $w_l(m, n)$  的均值  $m_{w_l} > E[w_l(m, n)] \times 0$ , 则定义  $x(m, n)$  的均值,

$$m_{lx}(m, n) = E[x(m, n)] > \sum_{l=1}^L m_{w_l} e^{j(X_{1l} m + X_{2l} n + \gamma_l)} + m_v \quad (7)$$

由式(7)可得出如下结论: 当  $m_{w_l} \neq 0$  时, 二维谐波信号的均值含有信号的频率和相位信息.

由于  $m_{lx}(m, n)$  是周期时变的, 称  $m_{lx}(m, n)$  的付立叶级数系数为二维循环均值. 二维循环均值的离散形式为

$$\begin{aligned} M_{lx}(A, B) &> \lim_{T_1 \rightarrow 1} \lim_{T_2 \rightarrow 1} \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{m=0}^{T_1-1} \sum_{n=0}^{T_2-1} m_{lx}(m, n) e^{-jA m} e^{-jB n} \\ &= \sum_{l=1}^L m_{w_l} e^{j\gamma_l} D(A - X_{1l}) D(B - X_{2l}) + m_v D(A) D(B) \end{aligned} \quad (8)$$

由式(8)可知, 当  $(A, B) = (X_{1l}, X_{2l})$  ( $l = 1 \sim L$ ), 或频率  $(0, 0)$  时, 式(8)有峰值, 由于假设谐波信号不包括  $(0, 0)$  频率点, 故可求得二维谐波信号频率.

由文献[12], 可以用式(9)估计式(8)

$$M_{lx}(A, B) = \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{m=0}^{T_1-1} \sum_{n=0}^{T_2-1} x(m, n) e^{-jA m} e^{-jB n} \quad (9)$$

#### 3.2 基于特殊六阶时间平均多矩谱的二维谐波频率估计

若乘性噪声和加性噪声的均值为零, 即  $m_{w_l} > E[w_l(m, n)] = 0$ ,  $m_v > E[v(m, n)] = 0$ , 则式(9)不能估计出信号的频率, 这里通过进行如下定义, 得出利用特殊六阶时间平均多矩谱来估计谐波信号频率的方法.

**定义 2** 令  $x(m, n)$  的特殊六阶矩为

$$\begin{aligned} m_{6x}(m, n; \underline{S}, \underline{N}) &= E\{(x^*(m, n))^2 x(m+S_1, n+N_1) \\ &\quad x^*(m+S_1, n+N_1) x(m+S_2, n+N_2) \\ &\quad x^*(m+S_2, n+N_2)\} \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $\underline{S} = (0, S_1, S_1, S_2, S_2)$ ,  $\underline{N} = (0, N_1, N_1, N_2, N_2)$ .

$x(m, n)$  对应式(10)的特殊六阶时间平均矩为

$$\begin{aligned} m_{6x}(\underline{S}, \underline{N}) &> \lim_{T_1 \rightarrow 1} \lim_{T_2 \rightarrow 1} \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{m=0}^{T_1-1} \sum_{n=0}^{T_2-1} m_{6x}(m, n; \underline{S}, \underline{N}) \\ &= \lim_{T_1 \rightarrow 1} \lim_{T_2 \rightarrow 1} \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{m=0}^{T_1-1} \sum_{n=0}^{T_2-1} E\{(x^*(m, n))^2 \\ &\quad x(m+S_1, n+N_1) x^*(m+S_1, n+N_1) \\ &\quad x(m+S_2, n+N_2) x^*(m+S_2, n+N_2)\} \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $\underline{S} = (0, S_1, S_1, S_2, S_2)$ ,  $\underline{N} = (0, N_1, N_1, N_2, N_2)$ .

**定义 3** 定义式(11)对应的特殊六阶时间平均多矩谱为

$$M_{6x}(A, B) > \lim_{T_1 \rightarrow 1} \lim_{T_2 \rightarrow 1} \frac{1}{T_1^3 T_2^3} \sum_{S=0}^{T_1-1} \sum_{N=0}^{T_2-1} m_{6x}(\underline{S}, \underline{N}) \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 & e^{-jA_1S_1}e^{-jA_2S_2}e^{-jB_1N_1}e^{-jB_2N_2} \\
 = & \lim_{T_1 \rightarrow 1} \lim_{T_2 \rightarrow 1} \frac{1}{T_1^3 T_2^3} E \left[ E \left[ E \left[ E \left\{ (x^*(m, n))^2 \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & x(m+S_1, n+N_1)x^*(m+S_1, n+N_1) \\
 & x(m+S_2, n+N_2)x^*(m+S_2, n+N_2) \} \\
 & e^{-jA_1S_1}e^{-jA_2S_2}e^{-jB_1N_1}e^{-jB_2N_2} \quad (12)
 \end{aligned}$$

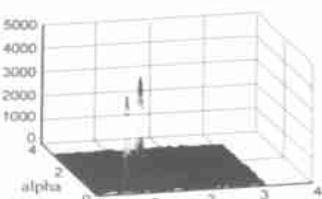
则观测信号的六阶时间平均多矩谱切片为

$$\begin{aligned}
 M_{6x}(\Delta, B) \Big|_{\substack{A_1=0 \\ B_1=0}} &= \sum_{l_3=0}^L E \{ s_0^*(m, n) s_0^*(m, n) \} E \{ s_{l_3}^*(m, n) \\
 & s_{l_3}(m, n) \} E \{ s_0(m, n) s_0^*(m, n) \} D(A_2) D(B_2) \\
 & + \sum_{l_5=1}^L \sum_{l_3=0}^L E \{ s_0^*(m, n) s_0^*(m, n) \} E \{ s_{l_3}^*(m, n) \\
 & s_{l_3}(m, n) \} E \{ s_{l_5}(m, n) s_{l_5}(m, n) \} D(A_2) D(B_2) \\
 & + 2 \sum_{l_1=1}^L \sum_{l_3=0}^L E \{ s_{l_1}^*(m, n) s_0^*(m, n) \} \\
 & E \{ s_{l_3}^*(m, n) s_{l_3}(m, n) \} E \{ s_{l_1}(m, n) \\
 & s_0^*(m, n) \} D(A_2 - X_{l_1}) D(B_2 - X_{l_1}) \quad (13)
 \end{aligned}$$

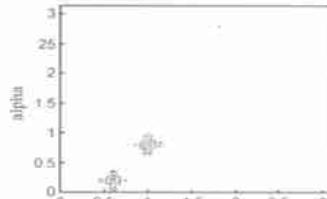
显然, 在式(13)中, 只有当  $(A_2, B_2) = (X_{l_1}, X_{l_2}), l_1 = 1, 2, \dots, L$  或在  $(0, 0)$  频率时, 观测信号的六阶时间平均多矩谱切片的值不为零, 而假设条件(A1)规定信号频率不包括  $(0, 0)$  频率点, 因此可根据六阶时间平均多矩谱切片的谱峰来进行谐波频率估计. 并且用此六阶时间平均多矩谱切片进行谐波恢复不需对噪声的分布、颜色和独立性作任何限制. 式(13)的证明可参考文献[9].

由文献[12]知, 可以用式(14)作为式(12)的估计子.

$$\hat{M}_{6x}^{(TT^2)}(\Delta, B) = \frac{1}{T_1^3 T_2^3} \sum_{l_3=0}^L E \left[ E \left[ E \left[ E \left\{ (x^*(m, n))^2 \right. \right. \right. \right. \right.$$



(a) 循环均值立体图



(b) 循环均值等高图

$$\begin{aligned}
 & x(m+S_1, n+N_1)x^*(m+S_1, n+N_1) \\
 & x(m+S_2, n+N_2)x^*(m+S_2, n+N_2) \\
 & e^{-jA_1S_1}e^{-jA_2S_2}e^{-jB_1N_1}e^{-jB_2N_2} \quad (14)
 \end{aligned}$$

其中,  $\underline{S} = (0, S_1, S_1, S_2, S_2), \underline{N} = (0, N_1, N_1, N_2, N_2), \underline{A} = (A_1, A_2), \underline{B} = (B_1, B_2)$ .

#### 4 仿真实验

##### 实验 1 用式(9)估计二维谐波频率

(1) 乘性噪声为非零均值. 设观测信号中含有两个谐波成分,  $L = 2$ , 频率分别为  $(X_{11}, X_{21}) = (0.12, 0.16)$ ;  $(X_{12}, X_{22}) = (0.18, 0.10)$ , 相位分别为  $\angle_1 = 0.15, \angle_2 = 0.2, m_{w_1} \propto 0$ ,  $e(m, n)$  为 iid 指数分布的白噪声,  $E(e) = 0.15$ . 相关的乘性噪声和加性噪声由下列系统产生:

$$w_1(m, n) = e(m, n) + 0.15e(m-1, n) + 0.15e(m-2, n)$$

$$w_2(m, n) = e(m, n) + 0.13e(m-1, n) + 0.19e(m-2, n)$$

$$v(m, n) = e(m, n) - 0.14e(m-1, n) - 0.16e(m-2, n)$$

$E(w_1) = 1, E(w_2) = 1.1, E(v) = 0$ , 实验数据长度为  $64@64$ ; 实验结果如图 1(a)(b) 所示. 由图 1(a)(b) 可以明显看到, 估计频率的谱峰正好积聚在假设频率  $(X_{11}, X_{21}) = (0.12, 0.16)$ ,  $(X_{12}, X_{22}) = (0.18, 0.10)$  的位置.

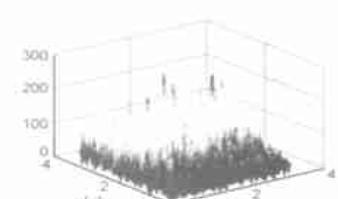
(2) 乘性噪声零均值. 噪声由下列系统产生:

$$w_1(m, n) = e(m, n) - 0.15e(m-1, n) - 0.15e(m-2, n)$$

$$w_2(m, n) = e(m, n) - 0.13e(m-1, n) - 0.17e(m-2, n)$$

$$v(m, n) = e(m, n) - 0.14e(m-1, n) - 0.16e(m-2, n)$$

$E(w_1) = E(w_2) = 0, E(v) = 0$ , 其它条件同上. 实验数据长度为  $64@64$ . 实验结果如图 1(c) 所示. 从图 1(c) 可以看出, 当乘性噪声均值为零时, 用二维循环均值不能估计出谐波频率, 谐波频率淹没在噪声之中.



(c) 循环均值立体图

图 1 用二维循环均值估计谐波频率 (a), (b) 乘性噪声为非零均值; (c) 乘性噪声为零均值

#### 实验 2 零均值乘性噪声时, 用式(14)估计二维谐波频率

(1) 噪声由下列系统产生:

$$w_1(m, n) = e(m, n) - 0.15e(m-1, n) - 0.15e(m-2, n)$$

$$w_2(m, n) = e(m, n) - 0.13e(m-1, n) - 0.17e(m-2, n)$$

$$v(m, n) = e(m, n) - 0.14e(m-1, n) - 0.16e(m-2, n)$$

其中,  $e(m, n)$  为零均值, 方差  $R_e^2 = 1$  的高斯白噪声.  $E(w_1) = 0, E(w_2) = 0, E(v) = 0$  实验数据长度为  $128 * 128$ , 实验结果如图 2 所示.

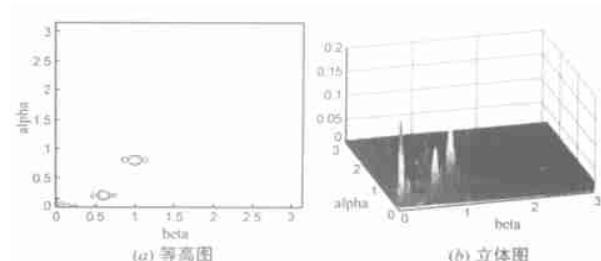


图 2 噪声为高斯白噪声时, 观测信号的六阶时间平均多矩谱切片图

根据式(13), 可知图2中频率(0,0)点的谱峰代表噪声, 其它谱峰处是谐波频率。由图2可以看出六阶时间平均多矩谱切片能够有效地估计谐波频率( $X_{11}, X_{21}$ )=(0.12, 0.16)和( $X_{12}, X_{22}$ )=(0.18, 0.10)。

(2)所有假设条件同上, 只是在噪声产生系统中,  $e(m, n)$ 为 iid 指数分布的白噪声,  $E(e)=0.15$ 。实验结果如图3所示。

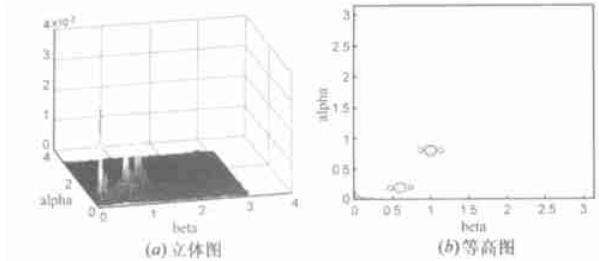


图3 噪声为指数分布的白噪声时, 观测信号的六阶时间平均多矩谱切片图

由图3可以看出, 在噪声源为指数分布的白噪声时, 六阶时间平均多矩谱切片同样能够有效地估计谐波频率( $X_{11}, X_{21}$ )=(0.12, 0.16)和( $X_{12}, X_{22}$ )=(0.18, 0.10)。

## 5 结论

本文讨论了乘性噪声之间相关、乘性噪声和加性噪声之间也相关这种复杂噪声背景下的二维谐波恢复问题。所提出的二维噪声互可混的概念, 体现了多个噪声之间的关系, 弱化了对噪声的约束条件。仿真实验证明了利用文中定义的二维循环均值能够有效地估计出乘性噪声均值非零时的谐波频率; 利用文中所定义的特殊六阶时间平均多矩谱切片能够有效地估计出乘性噪声均值为零时的二维谐波频率, 并且这种方法不必考虑噪声的分布、颜色。但是, 文中所提出的方法, 数据量相对较大, 运行时间较长, 如何解决这一问题有待进一步研究。

## 参考文献:

- [1] Yi Chu, Wenhsien FANG, Shuhsyung CHANG. A new state space based approach for the estimation of two-dimensional frequencies and its parallel implementations [J]. IEICE Trans. Fundamentals. 1997, 1-E80A(6): 1099- 1108.
- [2] Monson H Hayes, D S Mael, D M Wilkes. 2D constrained harmonic retrieval [Z]. Maple press, 303320250 school of electrical engineering

Georgia Institute of Technology Atlanta, GA. 1998, 762- 766.

- [3] Stephanie Rouquette, Mohamed Najim. Estimation of frequencies and Damping factors by two-dimensional Esprit type method [J]. IEEE, Trans. on Signal Processing. 2001, 49(1): 237- 245.
- [4] C Radhakrishna Rao, Lincheng ZHAO, Bin ZHOU. Maximum likelihood estimation of 2D superimposed exponential signals [J]. IEEE Trans. on Signal Processing. 1994, 42(7): 795- 1802.
- [5] Joseph J Sacchini, William M Steedly, Randolph L Moses. Two-dimensional Prony modeling and parameter estimation [J]. IEEE Trans. On Signal Processing. 1993, 41(11): 3127- 3137.
- [6] Hosny M Ibrahim, Reda R Gharieb. Estimating two-dimensional frequencies by a cumulant-based fblp method [J]. IEEE, Trans. on Signal Processing. 1999, 47(1): 262- 266.
- [7] Georgios B Giannakis, Guotong ZHOU. Harmonics in multiplicative and additive noise: parameter estimation using cyclic statistics [J]. IEEE Trans. on signal Processing. 1995, 43(9): 2217- 2221.
- [8] Mounir Ghogho, Ananthram Swami, Bernhard Garel. Performance analysis of cyclic statistics for the estimation of harmonics in multiplicative and additive noise [J]. IEEE Trans. On signal processing. 1999, 47(12): 3235- 3249.
- [9] 徐景, 王树勋, 王宏志, 程时昕. 复杂噪声背景下的谐波恢复及非线性耦合谐波分析 [J]. 电子学报, 2003, 31(1): 37- 44.
- [10] M Rosenblatt. Stationary Sequences and Random Fields [M]. Basel, Switzerland: Birkhauser, 1985: 30- 38.
- [11] V G Alekseev. On spectral density estimates for a gaussian periodically correlated random field [J]. Probability and mathematical statistics, 1991, 11(2): 157- 167.
- [12] Hongwei LI, Qiansheng CHENG, Baizong YUAN. Strong laws of large numbers for two-dimensional processes [A]. Signal Processing Proceedings, ICSP. 98 [C]. Beijing, 1: 43- 46.

## 作者简介:

窦慧晶 女, 1969 年生于吉林长春, 2001 年毕业于吉林大学通信工程学院, 获工学硕士学位, 并继续在吉林大学通信工程学院攻读博士学位, 现为吉林大学通信工程学院教师, 研究方向为数字信号处理, 主要研究高阶统计量在一维和二维信号处理中的应用。

王树勋 男, 1946 年生于吉林长春, 1970 年毕业于清华大学电机系, 1982 年在吉林工业大学电子工程系获工学硕士学位, 现为吉林大学教授、博士生导师, 主要研究方向为高阶统计量在数字信号处理中的应用及微计算机应用, 已出版著作 3 部, 发表论文 90 余篇。