

矩量法中阻抗矩阵的稀疏化研究

任 仪, 聂在平, 赵延文, 马文敏

(电子科技大学电子工程学院, 四川成都 610054)

摘 要: 将高阶叠层矢量基函数及最大正交高阶矢量基函数应用于电磁场积分方程方法, 提出将阻抗矩阵按稀疏化处理的方法. 通过文中的处理, 使得存储阻抗矩阵的内存需求量和求解矩阵方程的迭代求解时间大为降低. 本文还结合适当算例, 分析了判断门限的选取对阻抗矩阵的存储量与迭代法求解的计算量的影响.

关键词: 电磁场积分方程; 高阶矢量基函数; 最大正交化; 稀疏矩阵

中图分类号: TN **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 12-2354-05

Sparsification of the Impedance Matrix in MoM

REN Yi, NIE Zai-ping, ZHAO Yan-wen, MA Wen-min

(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

Abstract: A method to achieve the sparsification of the impedance matrix is proposed when the higher order hierarchical vector basis functions and the maximally orthogonalized higher order vector basis functions are applied to electromagnetic integral equations. Both the theory analysis and the numerical experiment demonstrate that this method will decrease the memory requirement for storing the impedance matrix and the CPU time consumed in solving the matrix equation when using an iterative method. Moreover, some numerical results have been given to study the different effects on the requirements for the memory and CPU time caused by different thresholds.

Key words: electromagnetic integral equations; higher order vector basis functions; maximally orthogonalization; sparse impedance matrix

1 引言

求解金属目标的电磁散射通常采用电磁场积分方程数值方法. 该方法首先采用矩量法 (Method of Moment)^[1] 计算出散射体表面的感应电流分布, 然后再通过与格林函数的卷积得到散射电场. 矩量法具有精度高、相对于微分方法未知量少等优点, 是计算电磁学的基本分析方法之一. 但是, 积分方程方法需要选用适当的基函数对感应电流进行离散, 并通过积分得到阻抗矩阵的阻抗元素, 而且, 所得到的阻抗矩阵为满阵, 对内存需求量较大. 当未知量增加时, 阻抗矩阵的内存需求量会随未知量的个数成 2 次方快速增加. 而计算机的硬件条件总是有限的, 也就限制了所能计算的未知量个数. 因此如何使用有限的存储资源计算电大尺寸目标的电磁散射问题, 一直是计算电磁学领域研究的热点. 90 年代, 有人提出使用高阶基函数可以用较少的未知量得到更高的计算精度, 也即可以使用较少的存储量和计算

量^[2]. 但是高阶基函数普遍存在阻抗矩阵的条件数差, 当阶数较高时用迭代法求解矩阵方程收敛速度慢等缺点. 同时, A. F Peterson 等提出采用正交的基函数可有效降低阻抗矩阵条件数^[3], 因此, 随后有学者提出了正交的全域基^[4], 正交的小波基函数^[5], 并对 FEM 中的高阶基函数进行正交化^[6], 降低阻抗矩阵的条件数. 近年来, 有学者提出了一种基于修正勒让德多项式的准正交的高阶叠层矢量基函数^[7, 11]. 这种基函数不仅可以大幅度减少未知量的个数, 而且可以得到条件数很好的阻抗矩阵. 最近, 又有学者在这种准正交的高阶叠层矢量基函数的基础上提出了一种最大正交化的高阶矢量基函数^[12]. 与其它的正交基函数相比, 这种最大正交的高阶矢量基函数可以使得除最低阶以外的不同阶基函数之间完全正交, 因而具有最佳的正交性. 该性质大大降低了阻抗矩阵的条件数, 并使得增加基函数阶数时阻抗矩阵的条件数缓慢增加.

本文在充分研究了准正交高阶叠层矢量基函数和

最大正交高阶矢量基函数性质的基础上,提出了一种稀疏化这两种基函数所对应的阻抗矩阵的处理方法,使得存储量大幅度降低,而迭代求解的计算量也相应大幅减少;然后结合计算实例,对比分析了使用准正交高阶叠层矢量基函数与使用最大正交高阶矢量基函数所得到的阻抗矩阵的稀疏特性,并进一步分析了采用不同的判断门限对阻抗矩阵的存储量与迭代求解时间的影响。

2 准正交的高阶叠层矢量基函数及其最大正交化过程

假设散射体表面由曲面四边形单元进行拟合,并且每个单元的局部参数坐标定义在区间 $-1 \leq u, v \leq 1$ 上,则单元上任一点的电流可表示为^[7]

$$J_s = J_{su}a_u + J_{sv}a_v \quad (1)$$

其中 a_u 和 a_v 为协变单位矢量, $a_u = \partial r / \partial u$, $a_v = \partial r / \partial v$. (u, v) 为参数坐标, $r(x, y, z)$ 为与 (u, v) 相对应的空间坐标。

对于 u 方向的电流,可展开表示为

$$J_{su} = \frac{1}{s(u, v)} \sum_{m=0}^{M_u} \sum_{n=0}^{N_v} b_{mn}^u C_m \tilde{P}_m(u) C_n P_n(v) \quad (2)$$

其中 b_{mn}^u 为未知系数. M_u 与 N_v 分别是电流分量方向与其横向上的电流展开阶数, \tilde{P}_m 与 P_n 分别对应两个方向的展开多项式, C_m 和 C_n 是与 \tilde{P}_m 和 P_n 相对应的尺度因子, $s(u, v) = |a_u \times a_v|$ 为曲面四边形的雅可比因子 (Jacobian Factor). 式(2)中

$$\tilde{P}_m(u) = \begin{cases} 1 - u, & m = 0 \\ 1 + u, & m = 1 \\ P_m(u) - P_{m-2}(u), & m \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

其中 P_m 为勒让德多项式

$$P_m(u) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{du^m} (u^2 - 1)^m \quad (4)$$

式(3)为修正勒让德多项式,其高阶项 $m \geq 2$ 在 $u = \pm 1$ 为 0, 而低阶项保证了边界法向电流的连续性. $\tilde{P}_m(u)$ 与 $P_n(v)$ 组合为单元内部的基函数。

C_m 和 C_n 为尺度因子,其作用是使得展开多项式在单位单元上的欧几里德范数单位归一. 需要说明的是,在数值实验中发现,将所有的基函数都进行单位归一得不到最佳的效果,因而需要对尺度因子做适当的修正,定义为

$$C_m = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4}, & m = 0, 1 \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2m-3)(2m+1)}{2m-1}}, & m \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

近两年,有学者在这种准正交高阶叠层矢量基函数的基础上提出了一种最大正交的高阶矢量基函

数^[12]. 这种基函数在自动满足电流连续性的条件下,使得不同基函数之间最大正交. 其定义为

$$J_{su} = \frac{1}{s(u, v)} \sum_{m=0}^{M_u} \sum_{n=0}^{N_v} b_{mn}^u C_m Q_m(u) C_n P_n(v) \quad (6)$$

其中参量 $s(u, v)$, b_{mn}^u , C_n 和 P_n 与式(2)相同。

对于 $m \geq 2$, Q_m 定义为

$$Q_m(u) = \begin{cases} \tilde{P}_m(u), & m = 2 \\ \tilde{P}_m(u) + \sum_{k=2}^{m-1} C_{km} \tilde{P}_k(u), & m > 2 \end{cases} \quad (7)$$

其正交化系数 C_{km} 可通过解下列线性方程组得到

$$\int_{-1}^1 Q_m(u) Q_i(u) du = 0, \quad i = 2, \dots, m-1 (m > 2) \quad (8)$$

对于 $m = 0, 1$, Q_m 定义为

$$Q_m(u) = \begin{cases} 1 - u + \sum_{k=2}^{M_u} C_{k0} \tilde{P}_k(u), & m = 0 \\ 1 + u + \sum_{k=2}^{M_u} C_{k1} \tilde{P}_k(u), & m = 1 \end{cases} \quad (9)$$

其中 C_{k0} , C_{k1} 类似前面,可通过解方程组得到

$$\int_{-1}^1 Q_m(u) Q_i(u) du = 0, \quad i = 2, \dots, M_u (m = 0, 1) \quad (10)$$

与 Q_m 相对应的尺度因子定义为

$$C_m = \begin{cases} 1/2 \sqrt{\int_{-1}^1 (Q_m(u))^2 du}, & m = 0, 1 \\ 1/\sqrt{\int_{-1}^1 (Q_m(u))^2 du}, & m \geq 2 \end{cases} \quad (11)$$

式(2)和式(6)中的 C_n 表示为

$$C_n = \sqrt{n+0.5}, \quad n = 0, 1, \dots, N_v \quad (12)$$

考虑到电流展开与电荷展开的完备性,基函数的阶数选取需要满足 Nedelec 约束^[13],也即电流分量方向的阶数 M_u 与横向阶数 N_v 应当满足 $M_u = N_v + 1$.

对于 v 向电流,只需将上述表达式中的 u 与 v 互换即可得到。

3 阻抗矩阵的稀疏化处理

当使用曲面四边形单元拟合散射目标表面并考虑使用修正勒让德多项式作为基函数描述散射电流的分布时,曲面 S_m 上的 u 向基函数所描述的电流产生的远区场矢量位可描述为

$$\begin{aligned} A_{(m, n)}^u(r_0 + dr) &= \frac{\mu}{4} \int_{S_m} a_u J_{(m, n)}^u(u, v) g(r_0 + dr) ds \\ &= C_m C_n \frac{\mu}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a_u P_n(v) \tilde{P}_m(u) g(r_0 + dr) \\ &\quad du dv \end{aligned} \quad (13)$$

其中 a_u 为电流的方向矢量, r_0 为单元中心与场点的相对位置, dr 为单元中心点与源点的距离矢量, $g(r_0 + dr)$ 为格林函数, (m, n) 表示基函数的阶数. 当考虑该

电流源对远区场的贡献时,可在远区将缓变的格林函数做一阶泰勒展开并近似表示为^[14]

$$A_{(m,n)}^u(r_0 + dr) = C_m C_n \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a_u P_n(v) \tilde{P}_m(u) [g(r_0) + \nabla g(r_0) \cdot dr] dudv \quad (14)$$

其中 $g(r_0) = e^{-jk_0 r_0}/4r_0$, $\nabla g(r_0) = -g(r_0)(1 + jkr_0)r_0/r_0^2$. 为了分析的方便,首先假设基函数定义在平面单元或曲率很小的单元上. 当考虑远区辐射场时,几何建模中的高阶量较小,因而 a_u 为 v 的一阶函数, u 的零阶函数, dr 为 u 和 v 的一阶函数. 考虑到此关系,式(14)的积分可看成是 $\int_{-1}^1 P_n(v) dv$ 、 $\int_{-1}^1 v P_n(v) dv$ 、 $\int_{-1}^1 \tilde{P}_m(u)$

du 、 $\int_{-1}^1 u \tilde{P}_m(v) du$ 的组合. 对勒让德多项式,有

$$\int_{-1}^1 P_n(v) dv = 0, n > 0 \quad (15a)$$

$$\int_{-1}^1 v P_n(v) dv = 0, n > 1 \quad (15b)$$

而对修正勒让德多项式满足

$$\int_{-1}^1 \tilde{P}_m(v) du = 0, m \geq 2 \quad (16a)$$

$$\int_{-1}^1 u \tilde{P}_m(v) du = 0, n > 3 \quad (16b)$$

因而,式(14)所描述的积分满足式(15)与(16). 对于 v 向基函数所描述的电流源产生的远区场也满足上述分析. 从上面的推导可以看出,对于电大尺寸目标, $m > 3$ 和 $n > 1$ 的基函数对远区场的贡献是很小的,对应的阻抗矩阵元素模值也相应很小. 最大正交化的高阶矢量基函数与此类似. 以上分析虽然以平面单元为基础,但此结论同样适用于曲面单元上的高阶基函数.

事实上,当我们采用高阶叠层矢量基函数或最大正交化的高阶矢量基函数时,由于这些基函数中的高阶部分是快速振荡的量,在积分过程中振荡部分会相互抵消,因而使得与高阶基函数相对应的阻抗矩阵元素的模值都较小. 并且随着基函数采用的多项式正交性的改善,这些模值很小的元素所占比例也会相应增加.

对于实际计算的较大尺寸目标,大多数单元都可以看成是远场单元,因而满足式(15)与(16)所描述的关系. 在实际计算中,这些模值很小的元素与对角线元素相比,往往相差几百倍或更多,处理时,可以将这些元素看成零元素,而这样的处理对计算远场产生的影响很小. 图1中描绘了在使用不同阶数的准正交高阶叠层矢量基函数与最大正交高阶矢量基函数情况下,将阻抗矩阵中的模值很小的元素置零后,非零元素在总的元素中所占的比例. 图中所考察目标为理想导体球,由49个曲面四边形单元进行拟合,采用混合场积分方程

方法(CFIE). 表1为其对应的基函数取不同阶数时,球体的电尺寸(以 ka 值表示,其中 k 为波数, a 为球体半径)、未知量个数、平均剖分尺寸. 可以看出,当基函数阶数增加,所考察目标的电尺寸变大时,零元素在阻抗矩阵中所占的比例会相应增加,并且使用最大正交的高阶矢量基函数与准正交高阶叠层矢量基函数之间的差别会逐渐缩小. 而当电尺寸不大,基函数阶数不高时,使用最大正交高阶矢量基函数后得到的非零元素比使用高阶叠层矢量基函数要少的多. 可见,采用最大正交高阶矢量基函数,不仅可以进一步改善阻抗矩阵条件数,还可以增加其稀疏性.

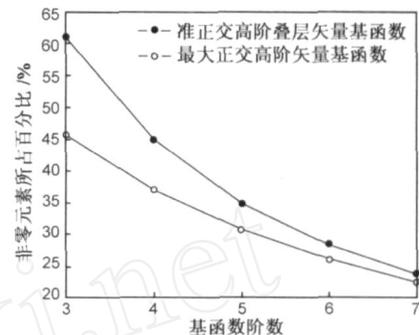


图1 使用准正交高阶叠层矢量基函数与最大正交高阶矢量基函数后阻抗矩阵中非零元素所占比例

表1 不同阶数下的 ka 、平均剖分尺寸与未知量个数

基函数阶数	3	4	5	6	7
ka	6.28	9.42	12.56	15.71	18.85
平均剖分尺寸()	0.75	1.126	1.5	1.88	2.2
未知量个数	882	1568	2450	3528	4802

4 数值算例

图2给出了 $ka = 37.73$ 的理想导体球在使用最大正交高阶矢量基函数的情况下得到的双站归一化 RCS 曲线,并与未进行稀疏化处理得到的结果和 Me 解相比较. 球体表面采用 156 个曲面四边形单元进行拟合,平均剖分尺寸为 2.25. 基函数采用 7 阶,未知量为 15288 个,使用混合场积分方程方法. 当不使用稀疏化处理方法时,阻抗矩阵的内存需求量为 1.78GB. 而图2中所给算例是将每行元素的模值与对角线元素进行对比,当该元素模值为对角线元素的 0.3% 时,将该元素做置零处理. 经处理后所得到的非零元素占总元素的 21.81%. 并且采用行存储方法,实际存储量为原来的 27.27%,内存需求量为 486MB. 从图中可以看出,采用稀疏化处理,对计算精度的影响很小. 当不使用稀疏化方法时,在设置 0.01 的迭代误差限下,采用 CG 迭代时需要 38 次迭代,而使用稀疏化处理需要 39 次迭代. 但是由于稀疏化处理使得大多数元素为零,因而使得总的求解时间大为减少,只为原来的 23%. 从图2中

可以看出, 当使用最大正交化的高阶矢量基函数计算电大尺寸目标的电磁散射问题时, 做稀疏化处理后, 可以在几乎不改变 RCS 计算精度的情况下大幅度降低存储量和迭代求解的计算量。

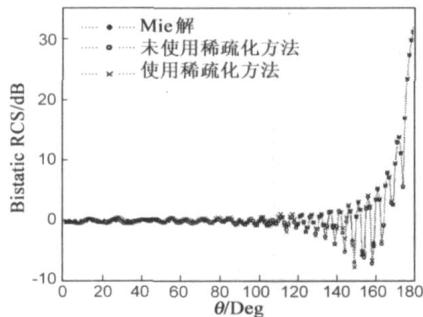


图 2 对阻抗矩阵做稀疏化处理后的结果比较

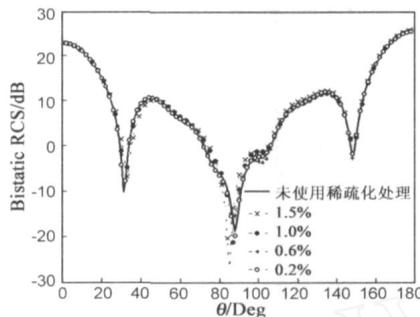


图 3 采用不同判断门限时的结果比较

容易理解, 当选取不同的判断门限时, 会对存储量与迭代计算量有较大影响。图 3 给出了一边长为 2 的理想导体立方体在 300MHz 时的双站 RCS 计算结果。建模采用 96 个四边形单元, 平均剖分尺寸为 0.5。采用最大正交化的高阶矢量基函数, 基函数取 3 阶, 1720 个未知量, 电场积分方程方法 (EFIE), HH 极化。图中分别给出了没有采用稀疏化处理和采用不同判断门限后得到的 RCS 曲线。可以看出当判断门限小于 0.6% 时所得的计算结果与原来的解几乎相同。而当将判断门限设为 0.6% 时, 非零元素为总元素的 30.64%, 存储量只为原来的 38.3%, 迭代时间为原来的 30%。

以上所给算例均采用的是最大正交化的高阶矢量基函数, 而从图 1 中可以看出, 采用最大正交化的高阶矢量基函数得到的阻抗矩阵中非零元素数目比使用准正交的高阶叠层矢量基函数要少。并且, 由于使用最大正交化后的高阶矢量基函数得到的阻抗矩阵条件数优于使用准正交高阶矢量基函数得到的阻抗矩阵, 具有更好的主对角占优性, 因而对其做稀疏化处理后得到的稀疏阻抗矩阵条件数变化不大, 而对使用准正交高阶矢量叠层基函数得到的阻抗矩阵做稀疏化处理则会较大的影响阻抗矩阵的条件数, 使迭代次数增加。但是由于稀疏化处理会将大多数元素置零, 大幅减少单次迭代的计算量, 因而同样可以减少迭代求解的计算

时间。

事实上, 当采用准正交的高阶叠层矢量基函数和最大正交化的高阶矢量基函数时, 对阻抗矩阵进行稀疏化处理, 所得的非零元素的多少不仅与基函数多项式的选取、基函数的阶数、积分方程类型以及判断门限有关, 而且还会与尺度因子的选取、曲面单元的剖分尺寸与形状、目标的形状等有关系。因而, 根据目标的不同选取适当的基函数阶数、剖分尺寸、积分方程类型以及判断门限可以在保持 RCS 计算精度不变的情况下使得阻抗矩阵的存储量最小。

5 结束语

在不增加计算量而保证求解精度的情况下减少存储量一直是电大尺寸目标散射求解的关键环节。本文提出在使用高阶叠层矢量基函数与最大正交高阶矢量基函数的情况下, 对阻抗矩阵做稀疏化处理的方法, 可以使得在计算电大尺寸目标时阻抗矩阵的存储量降为原来的 1/3 以下, 而迭代法求解矩阵方程的时间也会大幅减少。并且阻抗矩阵的计算量与解的精度几乎不变。可以预见, 这种方法在电大尺寸目标的电磁散射问题中将会有很好的应用前景。

参考文献:

- [1] R F Harrington. Field Computation by Moment Methods [M]. New York: Macmillan Press, 1968.
- [2] L R Hamilton, P A Macdonald, et al. Electromagnetic scattering computations using high-order basis functions in the method of moments [A]. IEEE Antennas Propagat Symp Dig [C]. Orlando: IEEE Press, 1994. 2166 - 2169.
- [3] A F Peterson, C F Smith, R Mittra. Eigenvalues of the moment method matrix and their effect on the convergence of the conjugate gradient algorithm [J]. IEEE Antennas and Propagation, 1988, 36(8): 1177 - 1179.
- [4] B M Kolundzija, B D Popovic. Entire-domain Galerkin method for analysis of metallic antennas and scatterers [J]. IEE Microwaves, Antennas and Propagation, 1993, 140(1): 1 - 10.
- [5] H Deng, H Ling. Moment matrix sparsification using adaptive wavelet packet transform [J]. Electronics letters, 1997, 33(13): 1127 - 1128.
- [6] J P Webb. Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements [J]. IEEE Antennas and Propagation, 1999, 47(8): 1244 - 1253.
- [7] E Jorgensen, J L Volakis, P Meincke, and O Breinbjerg. Higher order hierarchical Legendre basis functions for electromagnetic modeling [J]. IEEE Antennas and Propagation, 2004, 52(11): 2985 - 2995.
- [8] E Jorgensen, O S Kim, P Meincke, and O Breinbjerg. Higher

- order hierarchical discretization scheme for surface integral equations for layered media [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing, 2004, 42(4): 764 - 772.
- [9] E Jorgensen, J L Volakis, P Meincke, and O Breinbjerg. Higher order hierarchical Legendre basis functions for iterative integral equation solvers with curvilinear surface modeling [A]. IEEE Antennas Propagat Symp Dig [C]. Orlando: IEEE Press, 2002. 618 - 621.
- [10] E Jorgensen, P Meincke, and O Breinbjerg. A hybrid PO-Higher-order hierarchical MOM formulation using curvilinear geometry modeling [A]. IEEE Antennas Propagat Symp Dig [C]. Orlando: IEEE Press, 2003. 98 - 101.
- [11] K Sertel, J L Volakis. Method of moments solution of volume integral equations using parametric geometry modeling [J]. Radio Science, 2002, 37(1): 1 - 7.
- [12] Drazen S Sumic, Branko M Kolundzija. Efficient iterative solution of surface integral equations based on maximally orthogonalized higher order basis functions [A]. IEEE Antennas Propagat Symp Dig [C]. Orlando: IEEE Press, 2005. 288 - 291.
- [13] J C Nedelec. Mixed finite element in R^3 [J]. Numer. Mathem, 1980, 35: 315 - 342.
- [14] E Jorgensen. Higher order integral equation methods in

computational electromagnetics [D]. Denmark: Technical University of Denmark, 2003.

作者简介:



任 仪 男, 1983 年 1 月出生于安徽, 现为电子科技大学博士研究生. 研究方向为计算电磁学. E-mail: renyi @uestc.edu.cn

聂在平 男, 1946 年 10 月生于陕西西安, 电子科技大学教授, 博士生导师. 1987 ~ 1989 年曾在美国伊利诺依大学电磁实验室从事研究工作. 先后主持并完成 20 余项科研项目, 获国家科技进步二等奖一项, 省、部级一、二、三等科技进步奖七项, 在国内外发表学术论文 300 余篇. 主要研究兴趣: 计算电磁学、电磁散射与逆散射、非均匀介质中的场与波、新一代移动通信中的多天线技术等.

E-mail: zpnie @uestc.edu.com

赵延文 男, 1965 生于四川武胜, 副教授, 1998 年至 1999 年曾在香港城市大学电子工程系作访问学者, 已在国内外发表学术论文 50 余篇, 获国家科技进步二等奖和四川省科技进步一等奖各一项, 主要从事计算电磁学、非均匀介质中的场与波及其在石油电测井中的应用、电磁散射与逆散射及其在生物医学中的应用、时域超宽带电磁场理论及其应用等的研究. E-mail: ywzhao @uestc.edu.com

WWW.CNKI.NET