

一种基于高阶矢量基函数的叠层预条件技术

班永灵¹, 聂在平¹, 于哲峰²

(1. 电子科技大学电子工程学院, 四川成都 610054; 2. 中国空气动力研究与发展中心, 四川绵阳 621000)

摘要: 基于六面体的高阶叠层基函数, 提出了一种新颖的构造预条件矩阵的方法. 该方法基于叠层基函数特有的嵌套性质, 利用特殊的编号策略, 将由有限元方法导致的系数矩阵分成块矩阵的形式, 最后由不完全 LU 分解 (ILU) 导出近似的预条件矩阵. 结合该预条件技术, 发展了一种叠层预条件 GMRES 算法, 并将该预条件算法用于加速三维腔体散射的矢量有限元/边界积分 (FE BI) 矩阵方程的迭代求解, 讨论了该预条件算法中块矩阵 ILU 分解截断门限 T_d 对算法的影响.

关键词: 预条件技术; 高阶基函数; 矢量有限元/边界积分方法; 散射

中图分类号: TN82 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 09-1739-06

An Efficient Preconditioner Based on Higher Order Hierarchical Basis Functions

BAN Yong-ling, NIE Zai-ping, YU Zhe-feng

(1. School of Electronic Engineering, UEST of China, Chengdu, Sichuan 610054, China;

2. Center of aerodynamics research and development of China, Mianyang, Sichuan 621000 China)

Abstract: A preconditioner is proposed for accelerating solutions of finite element matrix equations. The preconditioner is constructed from a sequence of hierarchical vector spaces spanned by higher order hexahedral basis functions. The preconditioned GMRES algorithm with the preconditioner presented is developed and applied to solve the vector finite element boundary integral (FE BI) matrix equations for simulation of scattering from three dimensional cavities. Numerical results show that the preconditioner for solving the FE BI systems exhibits superior efficiency and reduced the CPU time significantly.

Key words: preconditioner; higher order basis functions; finite element boundary integral method; scattering

1 引言

矢量有限元方法^[1~4] (vector finite element method) 是一种解决电磁场问题的非常有效的数值分析方法. 关于这一方法最新的工作是如何利用高阶基函数 (higher order basis functions) 来提高有限元方法的计算效率. 在各种高阶基函数的研究中, 具有叠层 (hierarchical) 特征的高阶基函数^[5,6] 在应用中表现出非常好的特性. 这种叠层特性表现为高阶的基函数包含低阶的基函数, 比如四面体单元^[5] 中, 2 阶的高阶基函数包含 1 阶的基函数, 六面体单元^[6] 中, 阶数为 $(N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2)$ 的基函数包含低阶 $(N_u, N_v, N_w) = (1, 1, 1)$ 的基函数, 即低阶的基函数嵌套在更高阶的基函数中. 高阶基函数的这种叠层特征导致的一个直接应用是易于实施有限元方法中的 p -型自适应技术, 即通过自适应地优化基函数的阶数, 剖分网格不变, 达到提高求解精度的目的.

高阶叠层基函数的另一个有价值的地方在于, 它易

于构造一种很有效的预条件技术, 用于加速有限元矩阵方程的迭代求解. 有限元矩阵虽然具有高度稀疏的特性, 但同时其条件数也较大, 采用迭代方法求解, 其收敛速度很慢. 因此如何利用有效的预条件技术加速有限元矩阵方程的迭代求解速度是一件非常有意义的工作^[7~11]. 而高阶基函数的这种叠层特征提供了一种新颖的构造预条件矩阵的思路. 只要调整好有限元未知量的编号, 这种预条件矩阵的构造是很自然的. 这种预条件技术具有多层递归的特性. 不像多重网格 (multigrid) 方法, 它的实施基于单一网格, 不需要构造多重的网格. 这也是它极具优势的地方, 因为网格的剖分是个很麻烦并且很难的工作. 在文献 [10] 中, Mitchell 和 Reddy 基于叠层的高阶标量基函数的有限元模型, 提出了一种多层递归的预条件技术, 并结合共轭梯度 (CG) 算法用于解决结构力学中的二维、三维层状结构 (laminated) 的薄平板和厚平板问题. 一个类似的工作出现在文献 [11] 中. 在这篇文献中, 一种称作 pMUS (p-Type Multiplicative

收稿日期: 2006-06-09; 修回日期: 2007-03-21

基金项目: 国家自然科学基金 NSFC 重点项目 (No. 60431010); 国家自然科学基金和中国工程物理研究院联合资助项目 (No. 10476005)

Schwarz Method) 的方法基于四面体的 2 阶高阶基函数的有限元模型, 结合 CG 算法用于三维波导的不连续性问题建模.

基于六面体单元的高阶叠层基函数^[6], 本文发展了一种具有叠层特征的预条件技术(在这里称为叠层预条件技术), 用于加速高阶矢量 FE-BI 矩阵方程迭代求解的速度, 并将其应用于三维腔体的开域散射问题中. 不同于广泛使用的四面体的高阶矢量基函数, 在这里采用六面体的高阶矢量基函数. 另外结合 GMRES 算法, 发展了一种叠层预条件 GMRES 方法用于求解高阶矢量 FE-BI 矩阵方程. 数值结果表明, 这种叠层预条件 GMRES 算法能够有效地求解来自于三维腔体散射的高阶矢量 FE-BI 矩阵方程.

2 六面体的高阶叠层基函数

考虑的三维腔体散射模型如图 1 所示, 在一个半无限大的导电平面里嵌了一个具有任意形状的三维腔体. 基本的矢量有限元/边界积分方法的公式可参考^[1], 这里采用六面体的高阶矢量基函数^[6]离散有限元泛函, 电场用基函数展开为

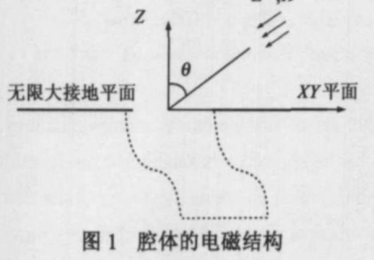


图 1 腔体的电磁结构

$$E = \sum_{i=0}^{N_u-1} \sum_{j=0}^{N_v-1} \sum_{k=0}^{N_w-1} \alpha_{u\bar{ij}} f_{i\bar{ij}k} + \sum_{i=0}^{N_u-1} \sum_{j=0}^{N_v-1} \sum_{k=0}^{N_w-1} \alpha_{v\bar{ij}} f_{i\bar{ij}k} + \sum_{i=0}^{N_u-1} \sum_{j=0}^{N_v-1} \sum_{k=0}^{N_w-1} \alpha_{w\bar{ij}} f_{i\bar{ij}k} \quad (1)$$

其中高阶矢量基函数的形式为

$$\begin{aligned} f_{u\bar{ij}k} &= u^i P_j(v) P_k(w) a_u' \\ 0 \leq i \leq N_u - 1, 0 \leq j \leq N_v, 0 \leq k \leq N_w \\ f_{v\bar{ij}k} &= v^j P_i(u) P_k(w) a_v' \\ 0 \leq i \leq N_u, 0 \leq j \leq N_v - 1, 0 \leq k \leq N_w \\ f_{w\bar{ij}k} &= w^k P_i(u) P_j(v) a_w' \\ 0 \leq i \leq N_u, 0 \leq j \leq N_v, 0 \leq k \leq N_w - 1 \end{aligned} \quad (2)$$

其中 N_u, N_v, N_w 表示参数坐标系内三个坐标方向上高阶基函数多项式的阶数, 多项式 $P_i(u), P_j(v), P_k(w)$ 以及矢量 a_u', a_v', a_w' 的定义详见文献^[6]. 为了构造下面的叠层预条件矩阵, 定义集合

$$\begin{aligned} S_{N_u, N_v, N_w}^u &= \{(i, j, k) | 0 \leq i \leq N_u - 1, 0 \leq j \leq N_v, 0 \leq k \leq N_w\} \\ S_{N_u, N_v, N_w}^v &= \{(i, j, k) | 0 \leq i \leq N_u, 0 \leq j \leq N_v - 1, 0 \leq k \leq N_w\} \\ S_{N_u, N_v, N_w}^w &= \{(i, j, k) | 0 \leq i \leq N_u, 0 \leq j \leq N_v, 0 \leq k \leq N_w - 1\} \end{aligned} \quad (3)$$

有了上述集合, 具有阶数 N_u, N_v, N_w 的高阶基函数就可简写为

$$\begin{aligned} f_{u\bar{ij}k} \text{ 其中 } (i, j, k) &\in S_{N_u, N_v, N_w}^u \\ f_{v\bar{ij}k} \text{ 其中 } (i, j, k) &\in S_{N_u, N_v, N_w}^v \\ f_{w\bar{ij}k} \text{ 其中 } (i, j, k) &\in S_{N_u, N_v, N_w}^w \end{aligned} \quad (4)$$

针对已经划分好的有限元网格, 基于此网格的有限维的阶数为 N_u, N_v, N_w 的高阶基函数空间可表示为

$$T_{N_u, N_v, N_w} = \text{span}\{f_{x\bar{ij}k} | (i, j, k) \in S_{N_u, N_v, N_w}^x, x = u, v, w\} \quad (5)$$

在这里令 $N_u = N_v = N_w = p$, 则 p 阶的基函数也就是上述阶数为 N_u, N_v, N_w 的基函数. 定义 $W_p = T_{N_u, N_v, N_w}$, 则容易验证 W_j 具有下面的嵌套性质

$$W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset \dots \subset W_p \quad (6)$$

这就是下面构造叠层预条件矩阵的基础, 其中 $W_1(T_{1,1,1})$ 对应最低阶的有限元近似, 需要说明的是, 虽然 $W_j(j=1, 2, \dots, p)$ 对应的基函数的阶数不同, 但均是基于相同的有限元网格.

有了上述定义, 利用 p 阶($N_u = N_v = N_w = p$) 的基函数离散泛函时, 式(1)又可写为

$$\begin{aligned} E &= \sum_{x=u, v, w} \sum_{(i, j, k) \in S_{p, p, p}^x} \alpha_{x\bar{ij}} f_{x\bar{ij}k} = \sum_{T_{p, p, p}} \alpha_{x\bar{ij}} f_{x\bar{ij}k} \\ &= \sum_{W_p} \alpha_{x\bar{ij}} f_{x\bar{ij}k} \end{aligned} \quad (7)$$

用式(7)离散有限元泛函, 则可得到离散后的矩阵方程

$$A_p a_p = b_p \quad (8)$$

其中 p 是高阶矢量基函数的阶数. 如果将对应低阶基函数的那些未知量先编号, 然后依次将对应高阶基函数的未知量赋予相应大的编号, 那么利用叠层基函数的嵌套性质就可将系数矩阵 A_p 分割成 4 个小块矩阵的形式

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{p-1} & D_p \\ C_p & B_p \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中 A_{p-1} 表示对应 $p-1$ 阶基函数的未知量之间的相互作用, B_p 表示对应 p 阶基函数的未知量之间的相互作用, C_p 和 D_p 表示对应 $p-1$ 阶基函数的未知量和对应 p 阶基函数的未知量之间的相互作用. 同理, A_{p-2}, \dots, A_2 均可分割成式(9)的形式.

3 叠层预条件技术

下面给出构造叠层预条件矩阵的过程. 首先考虑最简单的情形 $p=2$, 此时系数矩阵 A_2 的精确的分解形式

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_1 & D_2 \\ C_2 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ C_2 & S_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & A_1^{-1} D_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中 Schur 分量 $S_2 = B_2 - C_2 A_1^{-1} D_2$. 构造预条件矩阵的思路就是想办法构造一个在一定意义上与矩阵 A_2 非常近似的矩阵. 文献^[10] 给出的 CBS 不等式保证了 B_2 在一定意义上可以作为 S_2 的近似矩阵, 因此这启发我们在式(10)中用 B_2 替代 S_2 , 从而可构造出一个与系数矩阵 A_2 很近似的矩阵. 但是在预条件迭代算法中依然

需要求出局部块矩阵 A_1 和 B_2 的逆矩阵, 这仍然需要很大的计算量和存储开销. 为了进一步降低困难, 针对块矩阵 A_1 和 B_2 采用相应的丢弃门限分别进行不完全 LU 分解

$$A_1 = A_1^L A_1^U + R_1, \quad \|R_1\| \leq T_{dr}^1$$
$$B_2 = B_2^L B_2^U + R_2, \quad \|R_2\| \leq T_{dr}^2$$

(11)

在具体实施中, 可选用相应的参数 T_{dr}^1, T_{dr}^2 . 有了上述分析, 系数矩阵 A_2 的一个近似矩阵就可以写成

$$M_2 = \begin{bmatrix} A_1^L A_1^U & 0 \\ C_2 & B_2^L B_2^U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & (A_1^L A_1^U)^{-1} D_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

(12)

一旦有了近似矩阵 M_2 , 预条件矩阵就可以很容易写出, 即是 M_2 的逆矩阵,

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} I & - (A_1^L A_1^U)^{-1} D_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (A_1^L A_1^U)^{-1} & 0 \\ - (B_1^L B_2^U)^{-1} C_2 (A_1^L A_1^U)^{-1} & (B_2^L B_2^U)^{-1} \end{bmatrix}$$

(13)

最后, 结合相应的左预条件(left-preconditioned) GMRES^[12] 算法就可以求解矩阵方程 $M_2^{-1} A_2 \alpha_2 = M_2^{-1} b_2$.

上述思路很容易推广到阶数大于 2 的基函数, 即 $p > 2$ 的情形, 此时可以用 $M_2(k=2, 3, \dots, p)$ 去近似 A_k , 而对于 $B_k(k=2, 3, \dots, p)$, 则采取一定的截断门限进行不完全 LU 分解, 形成 M_k 中的 $B_k^L B_k^U$. 可以看到这个过程具有递归的特性, 因此在这里称此预条件为叠层(嵌套)预条件.

4 数值算例

4.1 矩形腔体的散射

为了证明这里提出的叠层预条件对于加速 FE-BI 矩阵方程迭代求解的有效性, 考虑了不同尺寸的矩形腔体的散射. 在计算中, 仅考虑 2 阶的基函数, 即 $p=2$ 的情形, 块矩阵的截断门限 $T_{dr}^1 = T_{dr}^2 = T_{dr}$, 采用 GMRES 作为基本的迭代算法.

第一个例子是如图 2 所示的矩形狭长缝(电尺寸为 $16.26\lambda \times 0.2\lambda \times 0.85\lambda$) 的散射, 图 3 给出了其交叉极化的双站 RCS, E_ϕ 入射, $\theta^{inc}=0, \phi^{inc}=0$. 其中 LU 分解法分别用于求解由基函数 $(N_u, N_v, N_w) = (1, 1, 1)$ 、 $(N_u, N_v, N_w) = (3, 1, 2)$ 离散得到的高阶矩阵方程, 叠层预条件-GMRES 算法用于求解由基函数 $(N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2)$ 离散得到的高阶矩阵方程, 块矩阵的截断门限 $T_{dr} = 1.0 \times 10^{-5}$. 表 1 给出了相应的计算时间. 可以看出数值结果吻合得很好, 而且叠层预条件-GMRES 算法所用时间很少. 为了证明叠层预条件技术的高效性, 图 4 给出了分别采用 GMRES、ILU-GMRES、叠层预条件-GMRES 算法求解高阶矩阵方程 $((N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2))$, 未知量

3822) 的迭代余量曲线, 表 2 是其计算细节, 可以看出叠层预条件技术具有很好的收敛表现.

表 1 叠层预条件-GMRES 方法与 LU 分解法求解计算参数(腔体的电尺寸为 $16.26\lambda \times 0.2\lambda \times 0.85\lambda$)

高阶基函数的阶数 (N_u, N_v, N_w)	六面体个数/ 剖分网格 (m_1, m_2, m_3)	未知量	求解方法、迭代方法的 收敛步数、CPU 时间(秒/s)
(1, 1, 1)	2520/(180 2 7)	5019	LU 分解法、35s
(2, 2, 2)	240/(80 1 3)	3822	叠层预条件-GMRES、7、3s
(3, 1, 2)	300/(50 2 3)	3582	LU 分解法、23s

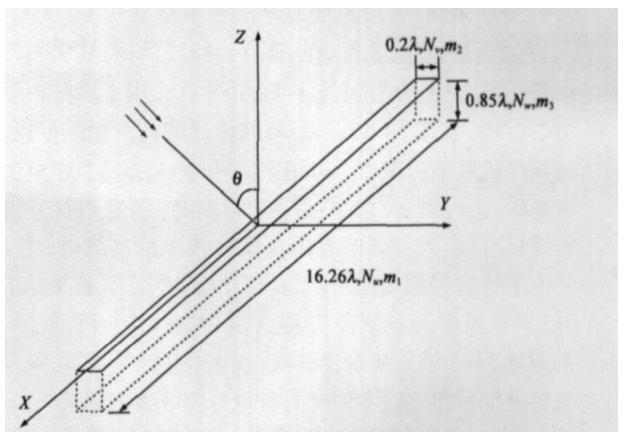


图 2 一狭长缝隙(电尺寸为 $16.26\lambda \times 0.2\lambda \times 0.85\lambda$, 无介质填充, 该腔被剖分成 6 个小六面体网格, N_u, N_v, N_w 分别表示六面体网格上对应维上基函数的阶数)

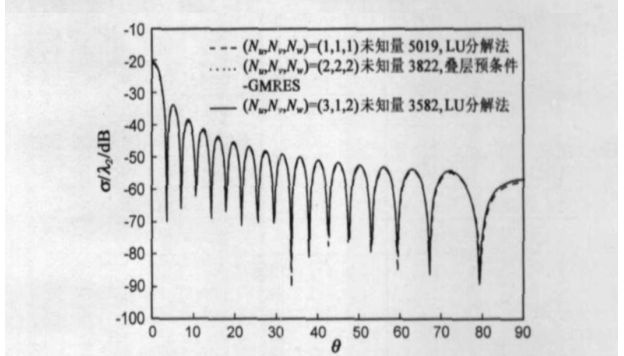


图 3 叠层预条件-GMRES 与 LU 分解法求解得到的交叉极化双站 RCS(腔体的电尺寸为 $16.26\lambda \times 0.2\lambda \times 0.85\lambda, E_\phi$ 入射, $\theta^{inc}=0, \phi^{inc}=0$)

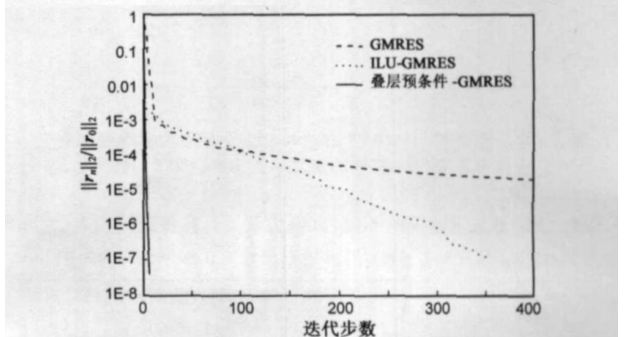


图 4 不同算法求解高阶 FE-BI 矩阵方程得到的余量曲线 $((N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2))$, 未知量 3822, 腔体的电尺寸为 $16.26\lambda \times 0.2\lambda \times 0.85\lambda$)

表 2 不同算法求解高阶 FE BI 矩阵方程的计算参数 $((N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2))$, 未知量 3822, 腔体的电尺寸为 $16.26\lambda \times 0.2\lambda \times 0.85\lambda$

算法	迭代截止门限	迭代步数	是否收敛 (收敛 T/不收敛 F)	CPU 时间 (秒/s)
GMRES	1.0×10^{-5}	477	F	824s
ILU-GMRES	1.0×10^{-7}	353	T	472s
叠层预条件 GMRES	1.0×10^{-7}	7	T	5s

第二个算例是一个电尺寸为 $0.5\lambda \times 0.5\lambda \times 8.0\lambda$ 的深腔. 图 5 是其交叉极化的双站 RCS, E_ϕ 入射, $\theta^{\text{inc}} = 0$, $\phi^{\text{inc}} = 0$ 其中 LU 分解法分别用于求解由基函数 $(N_u, N_v, N_w) = (1, 1, 1)$ 、 $(N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 3)$ 离散得到的高阶矩阵方程, 叠层预条件-GMRES 算法用于求解由基函数 $(N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2)$ 离散得到的高阶矩阵方程, 块矩阵的截断门限 $T_d = 1.0 \times 10^{-5}$. 表 3 给出了相应的计算时间. 可以看出叠层预条件-GMRES 算法对深腔散射同样有效. 为了证明叠层预条件技术的高效性, 图 6 给出了分别采用 GMRES、ILU-GMRES、叠层预条件-GMRES 算法求解高阶矩阵方程 $((N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2))$, 未知量 5440) 的迭代余量曲线, 表 4 是其计算细节, 可以看出叠层预条件技术同样具有很好的收敛表现.

表 3 叠层预条件-GMRES 方法与 LU 分解法求解计算参数(腔体的电尺寸为 $0.5\lambda \times 0.5\lambda \times 8.0\lambda$)

高阶基函数的阶数 (N_u, N_v, N_w)	六面体个数/剖分网格 (m_1, m_2, m_3)	未知量	求解方法、迭代方法的收敛步数、CPU 时间(秒/s)
(1, 1, 1)	2304/(6 6 64)	5440	LU 分解法、78s
(1, 1, 1)	3072/(8 8 48)	7228	LU 分解法、298s
(2, 2, 2)	216/(3 3 24)	4080	叠层预条件-GMRES、6.25s
(2, 2, 2)	288/(3 3 32)	5440	叠层预条件-GMRES、16.29s
(2, 2, 3)	144/(3 3 16)	4080	LU 分解法、38s

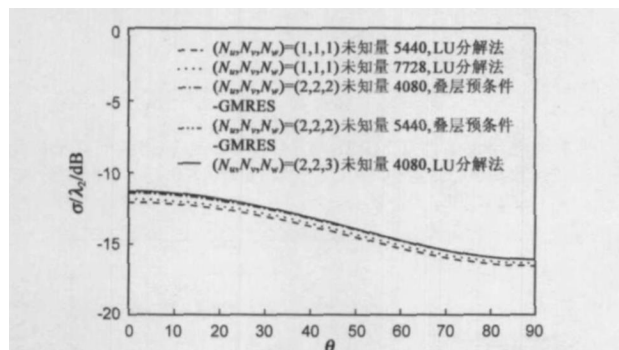


图 5 叠层预条件-GMRES 方法与 LU 分解法求解得到的交叉极化双站 RCS(腔体的电尺寸为 $0.5\lambda \times 0.5\lambda \times 0.8\lambda$, E_ϕ 入射, $\theta^{\text{inc}} = 0$, $\phi^{\text{inc}} = 0$)

表 4 不同算法求解高阶 FE BI 矩阵方程的计算参数 $(N_u, N_v, N_w = (2, 2, 2))$, 未知量 5440, 腔体的电尺寸为 $0.5\lambda \times 0.5\lambda \times 8.0\lambda$)

算法	迭代截止门限	迭代步数	是否收敛 (收敛 T/不收敛 F)	CPU 时间 (秒/s)
GMRES	5.0×10^{-5}	453	F	984s
ILU-GMRES	1.0×10^{-7}	213	T	229s
叠层预条件 GMRES	1.0×10^{-7}	16	T	15s

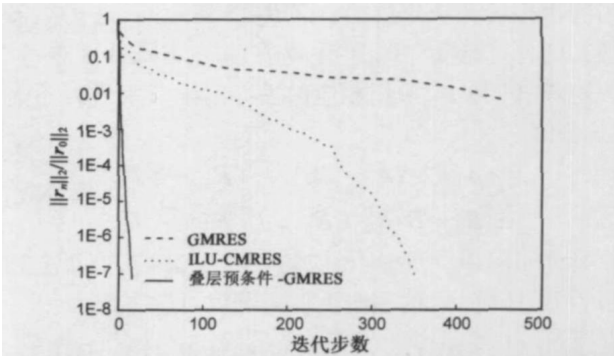


图 6 不同算法求解高阶 FE-BI 矩阵方程得到的余量曲线 $((N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2))$, 未知量 5440, 腔体的电尺寸为 $0.5\lambda \times 0.5\lambda \times 0.8\lambda$)

接着针对不同深腔考察了叠层预条件-GMRES 的计算, 深腔的横截面电尺寸均为 $0.5 \times 0.5\lambda$, 腔的深度 d 分别取 $4.0\lambda, 8.0\lambda, 12.0\lambda, 14.0\lambda, 18.0\lambda$, 计算中截断门限 $T_d = 1.0 \times 10^{-5}$, 基函数 $(N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2)$, 图 7 采用给出了采用叠层预条件-GMRES 算法计算的迭代余量曲线以及 CPU 时间. 可以看出叠层预条件-GMRES 算法在深腔散射问题上的良好表现.

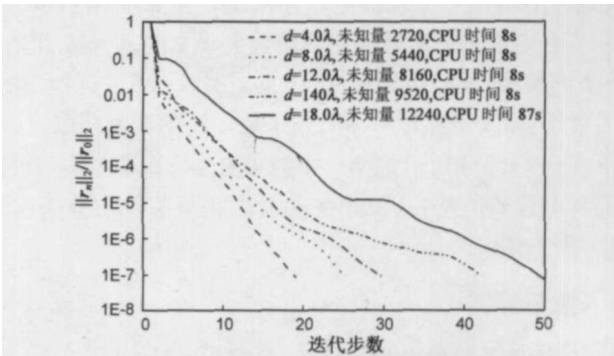


图 7 针对不同的矩形深腔, 叠层预条件-GMRES 方法求解高阶 FE-BI 矩阵方程得到的余量曲线(腔的横截面电尺寸 $0.5\lambda \times 0.5\lambda$, 腔的深度 d , $(N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2)$, 丢弃门限 $T_d = 1.0 \times 10^{-3}$)

4.2 块矩阵截断门限 T_d 的讨论

在叠层预条件-GMRES 算法中, 块矩阵的截断门限

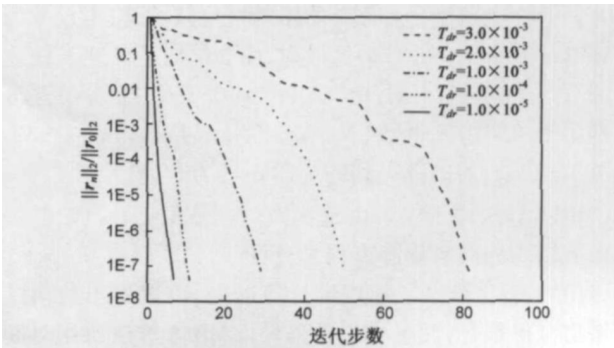


图 8 不同的截断门限 T_d , 叠层预条件-GMRES 求解电尺寸为 $16.26\lambda \times 0.2\lambda \times 0.85\lambda$ 的腔体的高阶矢量 FE-BI 矩阵方程余量曲线 $((N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2))$, 未知量 3822, 收敛门限 $||r_n||_2 / ||r_0||_2 = 1.0 \times 10^{-7}$)

T_{dr} 的取值对算法的收敛及 CPU 时间都有重要影响. 下面首先以电尺寸为 $16.26\lambda \times 0.2\lambda \times 0.85\lambda$ 腔体的计算为例, 考察了采用不同的截断门限 T_{dr} , 叠层预条件 GMRES 算法在高阶矢量基函数取 $(N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2)$ 、未知量为 3822 问题上的表现. 迭代截断时的门限均取 1.0×10^{-7} . 从图 8 以及表 5 中可看出, 采用不同的截断门限 T_{dr} 对算法的收敛及需要的 CPU 时间均有很大影响. 随着丢弃门限 T_{dr} 的减小, 所需要的 ILU 分解时间增加, 收敛时的迭代步数一直呈下降的趋势, 总的迭代时

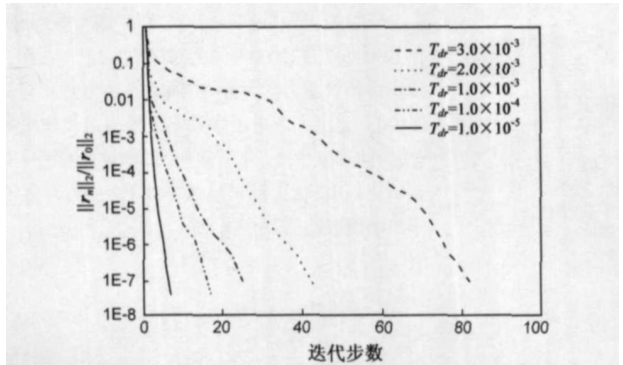


图 9 不同的截断门限 T_{dr} , 叠层预条件-GMRES 求解电尺寸为 $0.5\lambda \times 0.5\lambda \times 8.0\lambda$ 的腔体的高阶矢量 FE-BI 矩阵方程余量曲线 $((N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2)$, 未知量 5440, 收敛门限 $\|r_n\|_2 / \|r_0\|_2 = 1.0 \times 10^{-7}$

表 5 不同的截断门限 T_{dr} , 叠层预条件-GMRES 求解高阶矢量 FE-BI 矩阵方程的迭代步数以及 CPU 时间 $((N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2)$, 未知量 3822, 收敛门限 $\|r_n\|_2 / \|r_0\|_2 = 1.0 \times 10^{-7}$)

丢弃门限 T_{dr}	收敛 步数	ILU 分解 时间/秒	迭代时 间/秒	总迭代时间/秒 (ILU 分解时间+ 迭代时间)
3.0×10^{-3}	82	1	32	33
2.0×10^{-3}	50	2	13	15
1.0×10^{-3}	29	2	6	8
1.0×10^{-4}	11	2	1	3
1.0×10^{-5}	7	2	1	3

表 6 不同的截断门限 T_{dr} , 叠层预条件-GMRES 求解高阶矢量 FE-BI 矩阵方程的迭代步数以及 CPU 时间 $((N_u, N_v, N_w) = (2, 2, 2)$, 未知量 3822, 收敛门限 $\|r_n\|_2 / \|r_0\|_2 = 1.0 \times 10^{-7}$)

丢弃门限 T_{dr}	收敛 步数	ILU 分解 时间/秒	迭代时 间/秒	总迭代时间/秒 (ILU 分解时间+ 迭代时间)
3.0×10^{-3}	82	20	39	59
2.0×10^{-3}	43	13	12	25
1.0×10^{-3}	25	12	5	17
1.0×10^{-4}	17	17	2	19
1.0×10^{-5}	16	12	2	14

间基本上呈现下降的趋势, 但需要指出的是, 事实上并不总是这样, 据作者的数值经验, 随着截断门限 T_{dr} 的减小, 总的迭代时间不一定总是呈现下降的趋势, 这取决于具体的问题. 当 T_{dr} 小到一定程度时, 总的迭代时间下降的速度将趋向缓慢. 图 9 以及表 6 是采用不同的截断门限 T_{dr} , 深腔 (电尺寸为 $0.5\lambda \times 0.5\lambda \times 8.0\lambda$ ($N_u,$

$N_v, N_w) = (2, 2, 2)$, 未知量为 5440) 的叠层预条件-GMRES 计算的余量曲线以及 CPU 时间. 在表 6 中, 值得指出的一点是, 随着截断门限 T_{dr} 的减小, 所需要的 ILU 分解时间并不总是增加. 这可以解释为, 合适的截断门限 T_{dr} 的选取更有利于 LU 分解的实施, 也更节省时间.

5 结论

本文提出了一种新型的叠层预条件技术, 结合 GMRES 发展了叠层预条件-GMRES 算法, 并将其应用于三维腔体的开域散射问题中, 用于加速高阶矢量 FE-BI 矩阵方程迭代求解的速度. 该预条件技术基于六面体的高阶叠层矢量基函数, 这种参数化的高阶基函数具有很强的几何建模能力. 为了有效地构建叠层预条件矩阵, 选用一定的截断门限对其中的局部块矩阵做了不完全 LU 分解. 数值结果表明该预条件技术能够有效地加速迭代算法 GMRES 对于 FE-BI 矩阵方程的求解.

参考文献:

[1] Jin J M, The Finite Element Method in Electromagnetics[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, Second Edition, 2002.

[2] Sheng X Q, Jin J M, Song J, et al. On the formulation of hybrid finite element and boundary integral methods for 3 D scattering [J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 1998, 46(3): 303- 311.

[3] 何小祥, 徐金平. 电大尺寸开口腔体电磁散射特性的 DDM/ FEM- BIE 混合法分析[J]. 电子与信息学报, 2004, 26 (3): 500- 504.

[4] 王湃, 周乐柱, 谭云华. 不同吸波涂层对三维复杂目标的 RCS 影响的分析[J]. 微波学报, 2005, 21(2): 33- 37.

[5] Webb J P. Hierarchal vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements[J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 1999, 47(8): 1244- 1253.

[6] Ilic M M, Notaros B M, Higher order hierarchical curved hexarhedral vector finite elements for electromagnetic modeling[J]. IEEE Trans Microwave Theory and Techniques, 2003, 51(3): 1026- 1033.

[7] Sheng X Q, Yung E K. Implementation and experiments of a hybrid algorithm of the MLFMA enhanced FE BI method for open region inhomogeneous electromagnetic [J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 2002, 50(2): 163- 167.

[8] Liu J, Jin J M. A highly effective preconditioner for solving the finite element boundary integral matrix equation of 3 D scattering[J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 2002, 50(9): 1212- 1221.

[9] Chen R S, Yung E K, Chan C H, et al. Application of the SSOR preconditioned CG algorithm to the vector FEM for 3-D full wave analysis of electromagnetic field boundary value problems[J]. IEEE Trans Microwave Theory and Techniques, 2002, 50(4): 1165- 1172.

[10] Mitchell J A, Reddy J N. A hierarchical iterative procedure for

the analysis of composite laminates[J] . Comput Methods Appl Mech Engrg, 2000, 181: 237- 260.

- [11] Lee J F, Sun D K. pType multiplicative Schwarz (pMUS) method with vector finite elements for modeling three dimensional waveguide discontinuities[J] . IEEE Trans Microwave Theory Techniques, 2004, 52(3): 864- 870.
- [12] Saad Y, Iterative Methods for Sparse Linear Systems[M] . New York: PWS Publishing, Second Edition, 2003.

作者简介:



班永灵 男, 1978 年 4 月生于河南省夏邑县, 分别在 2000 年 7 月、2003 年 7 月、2006 年 7 月毕业于山东大学数学院信息与计算科学专业、北京大学电子学系电磁场与微波技术专业、电子科技大学电子工程学院电磁场与微波技术专业, 分获理学学士、理学硕士、工学博士学位. 主要研究兴趣: 计算电磁学(特别是矢量有限元方法)、高速微波电路电磁建模、移动通信终端天线设计.

E-mail: ho_tvfen@ 163. com



聂在平 男, 1946 年 10 月出生于陕西省西安市, 教授, 博士生导师, 中国电子学会会士, IEEE 高级会员, 1981 年获电子科技大学硕士学位; 1987~ 1989 年在美国伊利诺依大学电磁实验室从事研究工作; 1990 年以来主持并完成 30 余项研究课题, 先后获国家科技进步二等奖一项, 省、部级科技进步一、二、三等奖共八项, 在国内外发表学术论文 300 余篇, 主要研究兴趣包括:

计算电磁学、电磁散射与逆散射、非均匀介质中的场与波、新一代移动通信中的多天线技术等. E-mail: zpnjie@ uestc. edu. cn



于哲峰 男, 1977 年出生于吉林大安, 分别在 1999 年 7 月、2002 年 7 月、2005 年 12 月毕业于国防科技大学力学专业、中国空气动力研究与发展中心、北京大学电子学系电磁场与微波技术专业, 分获理学学士、理学硕士、工学博士学位. 主要研究兴趣: 超宽带时域技术及其应用、等离子体与电磁波的相互作用.