

# 功率平衡基础上的基波分析法

黄炳华<sup>1</sup>, 钮利荣<sup>2</sup>, 蔺兰峰<sup>2</sup>, 孙春妹<sup>2</sup>

(1. 广西大学电气工程学院, 广西南宁 530004; 2. 单片集成电路和模块国家重点实验室, 江苏南京 210016)

**摘 要:** 在非线性网络的适当端口施加正弦电压源  $U_s$ , 用基波平衡原理求得注入网络的基波电流  $i_{s1}$ . 当  $i_{s1} = 0$  时, 正弦电压源的频率和幅值被称为基波解. 如果能求出  $n$  个基波解, 则原网络必然也对应的存在有  $n$  个周期解. 如果基波解不存在, 则原网络的周期解也不存在.

以考比兹电路为例, 说明虚功平衡和周期振荡的密切关系, 以蔡氏电路为例, 用基波平衡原理说明混沌振荡的性质. 结论的普遍性可以推广到三阶非线性微分方程. 其正确性可以用 SIMULINK 仿真验证.

**关键词:** 非线性; 虚功功率; 极限环; 考比兹电路; 混沌

**中图分类号:** TN711.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 10-1994-05

## Fundamental Wave Analysis Based on Power Balance

HUANG Bing-hua<sup>1</sup>, NIU Li-rong<sup>2</sup>, LIN Lan-feng<sup>2</sup>, SUN Chun-mei<sup>2</sup>

(1. Electrical Engineering School, Guangxi University, Nanning, Guangxi 530004, China;

2. National Key Laboratory of Monolithic Integrated Circuits and Modules, Nanjing, Jiangsu 210016, China)

**Abstract:** We can find the first harmonic current component is1 of injecting to the nonlinear networks by using fundamental wave balance principle, when sinusoidal voltage source  $U_s$  is applied to the proper port of the nonlinear network. The frequency and amplitude of sinusoidal voltage source is called fundamental harmonic solution, when is1= 0. If no fundamental harmonic solution can be found, then no periodic solution of original network certain exist correspondingly. If first harmonic solution is nonexistent, the original network has no periodic solution also.

Taking the Colpitts circuit as example, the close relation between reactive power balance and periodic oscillation can be shown. Chaotic oscillation shape and properties of Chua's circuit can be explained by the fundamental wave balance principle. The universality of the conclusion can be extended to the three dimensional nonlinear network. Its correctness can be verified by the Simulink.

**Key words:** nonlinear; reactive power; limit cycle; Colpitts circuit; chaos

### 1 分析非线性网络的基波平衡原理

对于一个非线性网络  $N$ , 在适当端口施加正弦激励源  $u_s = U_m \sin \omega_s t$ , 注入网络的电流  $i_s = i_{s1} + i_{sh}$ , 即可用  $i_s$  替代  $u_s$ , 其中基波分量  $i_{s1} = U_m (G_i \sin \omega_s t + B_i \cos \omega_s t)$ , 如果网络参数对于一定的  $(\omega_s, U_m)$  能够满足使  $G_i = 0$  和  $B_i = 0$  即  $i_{s1} = 0$ , 网络内部对基波分量能维持自激, 激励源提供的  $i_{sh}$  用以平衡网络内部诞生的非基波分量, 使端口维持正弦, 此时  $i_s = i_{sh}$ , 非线性网络没有向替代源吸收能量, 仅有吸放虚功的交换.

在  $i_{s1} = 0$  的情况下, 脱离替代源  $i_{sh}$  以后, 网络还能不能维持自激振荡, 可通过下述方法论证:

当  $i_{s1} = 0$  只接有替代源  $i_{sh}$  时如图 1(a), 端口  $u$  维

持正弦振荡有  $u = u_s = U_m \sin \omega_s t$ . 当脱离替代源, 也就是原非线性网络如图 1(b), 和增加一个反向的  $i_{sh}$  等效.

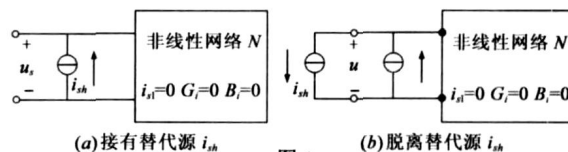


图 1

如果图 1(a) 的基波解存在有正弦振荡, 则图 1(b) 由于在端口外并联增加一个反向的  $i_{sh}$ , 这和脱离替代源是等效的, 激励源成为一个非基波平衡源, 视图 1(a) 是一个正弦振荡源外接空载; 则图 1(b) 是在空载的端口, 增加承担一个非基波负载电流  $-i_{sh}$ , 其性质是一

种时而吸入时而放出能量的虚功电流, 但在一个振荡周期吸放量相等相互抵消, 如果网络内的振荡储能不足以支付这种吸纳和吐出, 则振荡也可能被迫停止(如端口并接一个充分大的电容), 而事实上非基波电流  $i_{sh}$  的周期比基波短, 振幅比基波小, 这就足以证明非基波分量要求的吞吐量完全在网内储能足够支付的情况下, 是在图 1(a) 所组成振荡源完全能够承受的范围内, 振荡会继续自激维持下去, 因此, 只要基波解存在, 脱离激励源后周期振荡必然存在, 这就是范德堡振荡必然有极限环的原因<sup>[1, 2]</sup>. 但由于振荡源并非无穷大的理想源, 因而其外特性不会保持正弦, 即周期解存在但  $u \neq u_s$ . 基波解的频率  $\omega_s$  和原微分方程周期解  $u$  的频率也不相等, 一般地说  $\omega_s$  指图 1(a) 振荡源  $u_s$  空载时的频率. 图 1(b) 的端口电压  $u$  是指又承担了虚功负载  $i_{sh}$  以后非正弦的频率, 因而  $u$  的频率会低于  $\omega_s$ . Simulink 仿真验证了这个结论.

基波平衡原理是从能量和功率平衡的观点, 判断网络维持振荡的可能性.  $i_{s1} = 0$  说明实功取得平衡, 有维持振荡的足够能量. 基波的虚功也取得平衡, 且非基波的虚功也必定在可以平衡的范围内. 参考文献[3~6]的很多例证说明, 只要包含激励源的基波解存在, 则不包含激励源的原微分方程的周期解也必然存在, 成对应关系. 结论: 如果基波平衡方程存在有唯一的基波解 ( $\omega_s, U_m$ ), 则可确定原方程的周期解也必然唯一存在; 但基波分量的频率  $\omega_{lh} \neq \omega_s$  基波振幅值  $U_{mh} \neq U_m$ .

## 2 用基波平衡原理分析 Colpitts 电路

电路的非线性模型如图 2. 取非线性元件的控制量  $u_{C2} = u$  作为端口变量, 压控伏安特性  $i = f(u)$ , 根据电路定律, 未加激励源可列方程式(1), 经整理可得式(2), 加入激励源后注入网络的电流为  $i_s$ , 可列电路方程式(3). 取基波和非基波分量得基波和非基波平衡方程式(4)和(5). 用系数平衡法或正弦向量法可以求得基波输入导纳为式(6). 用 MATH-1 可求出  $G_i, B_i$  如式(7). 令  $G_i = 0, B_i = 0$  可求出基波解的  $\omega_s$  和  $g_{mf}$  为式(8). 若  $i = f(u)$  如式(9), 可进一步求出式(10).

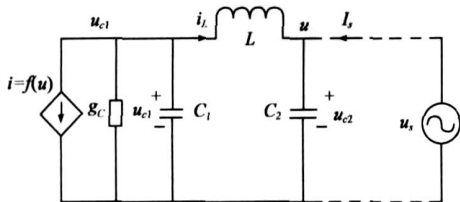


图 2 Colpitts 电路

$$\dot{u} = i_L / C_2 \quad (1.1)$$

$$i_{C1} = (-i - u_{C1}g_c - i_L) / C_1 \quad (1.2)$$

$$\dot{i}_L = (-u + u_{C1}) / L \quad (1.3)$$

$$\ddot{u} + \frac{g_c \dot{u}}{C_1} + \frac{(C_1 + C_2) \dot{u}}{C_1 C_2 L} + \frac{g_c u + f(u)}{C_1 C_2 L} = 0 \quad (2.1)$$

$$\ddot{u} + g_c \dot{u} / C_1 + \omega_0^2 \dot{u} + \omega_2^2 [g_c u + f(u)] / C_1 = 0 \quad (2.2)$$

$$\omega_2^2 = 1 / LC_2 \quad \omega_1^2 = 1 / LC_1$$

$$\omega_0^2 = 1 / LC = (C_1 + C_2) / (C_1 C_2 L) = \omega_1^2 + \omega_2^2 \quad (2.3)$$

$$\ddot{u}_s + g_c \dot{u}_s / C_1 + \omega_0^2 u_s + \omega_2^2 [g_c u_s + f(u_s)] / C_1 = C_1 L \ddot{i}_{s1} - g_c L \dot{i}_{s1} - i_s \quad (3.1)$$

$$f(u_s) = f_1(u_s) + f_h(u_s) \quad f_1(u_s) = g_{mf} u_s \quad (3.2)$$

$$\ddot{u}_s + g_c \dot{u}_s / C_1 + \omega_0^2 u_s + \omega_2^2 (g_c + g_{mf}) u_s / C_1 = C_1 L \ddot{i}_{s1} - g_c L \dot{i}_{s1} - i_{s1} \quad (4)$$

$$\omega_2^2 [f_h(u_s)] / C_1 = C_1 L \ddot{i}_{sh} - g_c L \dot{i}_{sh} - i_{sh} \quad (5)$$

$$Y_i = \frac{\{g_c(1 - \omega_s^2 / \omega_2^2) + g_{mf} + j\omega_s [LC_1 C_2 (\omega_0^2 - \omega_s^2)]\} / [(1 - \omega_s^2 / \omega_1^2) - j\omega_s L g_c]}{(1 - \omega_s^2 / \omega_1^2)^2 + (\omega_s L g_c)^2} = G_i + jB_i \quad (6)$$

$$G_i = g_c + g_{mf}(1 - C_1 L \omega_s^2) = g_c - C_1 g_{mf} / C_2 \quad (7.1)$$

$$B_i = (g_c C_2 - C_1 g_{mf}) g_c \omega_s L / C_1 = G g_c \omega_s L C_2 / C_1 \quad (7.2)$$

$$\omega_s = \omega_0 \quad g_{mf} = g_c C_2 / C_1 \quad (8)$$

$$i = f(u) = a_1 u - a_3 u^3, \quad g_{mf} = a_1 - 3a_3 U_m^2 / 4$$

$$a_1 > C_2 g_c / C_1, \quad a_3 > 0 \quad (9)$$

$$\partial G_i / \partial U_m = 1.5 a_3 C_1 U_m / C_2 \quad (10)$$

例 1 设电路有一组参数如下:  $i = (9u - 0.08u^3) \times 10^{-3}$ ,  $a_1 = 9 \times 10^{-3}$ ,  $a_3 = 0.08 \times 10^{-3}$ ,  $g_{mf} = (9 - 0.06 U_m^2) \times 10^{-3}$ ,  $C_1 = 100\text{PF}$ ,  $C_2 = 400\text{PF}$ ,  $L = 10\text{mH}$ ,  $g_c = 1\text{mS}$ ,  $\omega_0^2 = 1 / LC = 1 / 10^{-5} \times 80 \times 10^{-12} = 1.25 \times 10^{15}$ ,  $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 5.63\text{MHz}$ . 用这组参数代入式(2.2), (7)和(10)得式(11), (12)和(13), 其中令  $G_i = 0, B_i = 0$  解出  $U_m$ .

$$\ddot{u} + 10^7 \dot{u} + 1.25 \times 10^{15} u + 2.5 \times 10^{21} (u + 9u - 0.08u^3) = 0 \quad (11)$$

$$G_i = 10^{-3} (0.015 U_m^2 - 1.25) \quad B_i = 1.414 G_i \quad (12)$$

$$U_m^2 = 83.3, \quad U_m = 9.13, \quad \partial G_i / \partial U_m = 10^{-3} (0.03 U_m) > 0 \quad (13)$$

分析式(12)有  $U_m \rightarrow 0$  时  $G_i$  和  $B_i$  为负, 说明在微变范围, 网络会起振并逐步增幅, 而当  $U_m$  增大时  $g_{mf}$  减小  $G_i$  和  $B_i$  增大, 非线性特性发挥稳幅作用, 在高  $Q$  情况下建立近似正弦振荡, 电路存在有一个基波解, 用 SIMULINK 仿真验证, 可以显示当初激值  $|u| < 11.1803$  时, 相空间有一条固定不变的闭轨线. 说明存在有一个周期解就是 Colpitts 振荡. 若设  $a_1 < C_2 g_c / C_1 = 4 \times 10^{-3}$  则电路不能起振, 没有基波解, 相图显示轨线返回原点, 是一个不能振荡的稳定电路.

## 3 具有双漩涡 (double scroll) 结构的混沌振荡

蔡氏电路如图 3, 用基波平衡原理分析混沌振荡<sup>[6]</sup>. 外加激励源  $u_s$  列状态方程如式(14.1), 标量方程

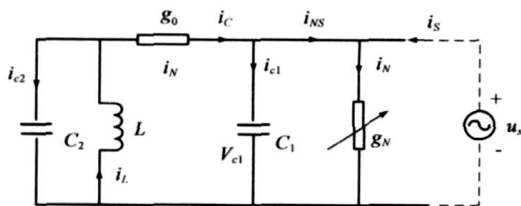


图3 蔡氏电路

如式(14.2)。去除激励源的状态方程如式(15.1), 标量方程如式(15.2), 式中的  $V_{C1}$ ,  $V_{C2}$ ,  $i_L$  是未加激励源前的非正弦量。加入激励源的基波平衡方程如式(17), 式中  $V_{CS} = u_s$ ,  $V_{C2S}$ ,  $i_{LS}$  都是正弦量; 非线性元件的  $i_N$ ,  $V_N$  在加入激励源前后也各有不同。

$$\begin{cases} C_1 \dot{V}_{CS} = (-V_{CS} + V_{C2S})g_0 - i_N + i_s \\ C_2 \dot{V}_{C2S} = (V_{CS} - V_{C2S})g_0 + i_{LS} \\ L \dot{i}_{LS} = -V_{C2S} \end{cases} \quad (14.1)$$

$$\ddot{V}_{CS} + \dot{V}_{CS} \left( \frac{g_0}{C_1} + \frac{g_0}{C_2} + \frac{g_N}{C_1} \right) + V_{CS} \left( \frac{1}{LC_2} + \frac{6a_3 V_{CS} V_{C1}}{C_1} + \frac{g_0 g_N}{C_1 C_2} \right) + \frac{i_N + g_0 V_{CS}}{C_1 C_2 L} = \frac{\ddot{i}_{LS}}{C_1} + \frac{g_0 \dot{i}_{LS}}{C_1 C_2} + \frac{i_s}{C_1 C_2 L} \quad (14.2)$$

$$\begin{cases} C_1 \dot{V}_{C1} = (-V_{C1} + V_{C2})g_0 - i_N \\ C_2 \dot{V}_{C2} = (V_{C1} - V_{C2})g_0 + i_L \\ L \dot{i}_L = -V_{C2} \end{cases} \quad (15.1)$$

$$\ddot{V}_{C1} + \dot{V}_{C1} \left( \frac{g_0}{C_1} + \frac{g_0}{C_2} + \frac{g_N}{C_1} \right) + V_{C1} \left( \frac{1}{LC_2} + \frac{6a_3 V_{C1} V_{C1}}{C_1} + \frac{g_0 g_N}{C_1 C_2} \right) + \frac{i_N + g_0 V_{C1}}{C_1 C_2 L} = 0 \quad (15.2)$$

式中,  $i_N = -a_1 V_N + a_3 V_N^3$ ,  $g_N = di_N/dV_N$ ,

$$\begin{cases} g_N = -a_1 + 3a_3 V_m^2/4 \\ \ddot{V}_{CS} + \left( \frac{g_N + g_0}{C_1} + \frac{g_0}{C_2} \right) \dot{V}_{CS} + \frac{g_N L g_0 + C_1}{C_1 C_2 L} V_{CS} \\ + \frac{g_N + g_0}{C_1 C_2 L} V_{CS} = \frac{\ddot{i}_{S1}}{C_1} + \frac{g_0 \dot{i}_{S1}}{C_1 C_2} + \frac{i_{S1}}{C_1 C_2 L} \end{cases} \quad (16)$$

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_s^2 (g_N + g_0)}{(g_0 + \mu g_0 + g_N)}, \quad \omega_s^2 = \frac{1}{LC_2}, \quad \mu = \frac{C_1}{C_2}, \quad (17.1)$$

$$\ddot{V}_{CS} = -\omega_s^2 V_{CS}, \quad \dot{V}_{CS} = -\omega_s^2 V_{CS} \quad (17.2)$$

$$\left( \omega_0^2 - \omega_s^2 \right) V_{CS} = \left[ V_{CS} \left( \omega_s^2 - \frac{g_N L g_0 + C_1}{C_1 C_2 L} \right) + \left( \frac{\ddot{i}_{S1}}{C_1} + \frac{g_0 \dot{i}_{S1}}{C_1 C_2} + \frac{i_{S1}}{C_1 C_2 L} \right) \right] \cdot \frac{C_1}{g_0 + \mu g_0 + g_N} \quad (17.3)$$

可从两方面分析双涡流(double scroll)结构的混沌振荡。用两种方法求式(17)的基波解:

### 3.1 以任意频率 $\omega_s$ 的电压源激励端口

用正弦相量法或平衡方程系数法, 可求出端口输入导纳为

$$G_i = \frac{g_0 (\omega_s C_2 - 1/\omega_s L)^2}{g_0^2 + (\omega_s C_2 - 1/\omega_s L)^2 + g_N (V_m)} \quad (18.1)$$

$$B_i = \frac{g_0^2 (\omega_s C_2 - 1/\omega_s L)}{g_0^2 + (\omega_s C_2 - 1/\omega_s L)^2 + \mu C_2 \omega_s} \quad (18.2)$$

例2 电路图3的网络参数为  $L = 8.2\text{mH}$ ,  $C_2 = 0.05\mu\text{F}$ ,  $C_1 = 0.0055\mu\text{F}$ ,  $g_0 = 0.752 \times 10^{-3}\text{S}$ ,  $\omega_s = 1/\sqrt{LC_2} = 49.5\text{KHz}$ , 用程序 MATH-2 令  $G_i = 0$ ,  $B_i = 0$ , 由式(18)可求出两组  $\omega_s$  和  $g_N$  如式(19)。这是为了满足功率平衡所确定的振荡频率和负电导值( $\omega_{S1}$ ,  $g_{NF1}$ )、( $\omega_{S2}$ ,  $g_{NF2}$ ), 对于两个  $g_{NF}$  可进一步求出为满足基波功率平衡的振幅值  $V_m$  如式(20)。

$$\omega_{S1} = 20.9\text{KHz} < \omega_s, g_{NF1} = -0.000734 > -g_0 \quad (19.1)$$

$$\omega_{S2} = 46.6\text{KHz} < \omega_s, g_{NF2} = -0.0001005 > -g_0 \quad (19.2)$$

$$V_m^2 = 4(a_1 + g_{NF})/3a_3 \quad (20)$$

### 3.2 第二种方法

直接以  $i_{S1} = 0$  代入基波平衡方程式(17.3)求基波解, 可得系数平衡式(21)。解出  $g_{NF}$  和  $\omega_s$  有两组实根如式(22), 若网络参数如上述, 由程序 MATH-2 可以证实, 式(22)的结果和式(19)的结论一致。

$$\omega_0^2 - \omega_s^2 = 0, \quad \omega_s^2 - (g_{NF} L g_0 + C_1)/(C_1 C_2 L) = 0 \quad (21)$$

$$g_{NF} = -g_0(1 + \mu)/2 \pm (\sqrt{[g_0(1 + \mu)]^2 - 4C_1 \mu/L})/2 = \lambda_{1,2} \quad (22.1)$$

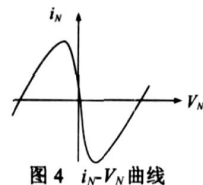
$$\omega_s^2 = \omega_0^2 = \omega_s^2 \frac{g_{NF} + g_0}{(g_0 + \mu g_0 + g_{NF})} = \frac{g_{NF} L g_0 + C_1}{C_1 C_2 L} = \omega_s^2 + \frac{g_{NF} g_0}{C_1 C_2} < \omega_s^2 \quad (22.2)$$

这种方法当然简单容易得多, 但必须在有基波解的情况才行得通, 它无法分析没有基波解的情况。当  $G_i(V_m)$  恒为正数, 方程没有基波解也不发生混沌; 它无法做出  $G_i(V_m)$  曲线分析网络稳定性。

## 4 用 SIMULINK 仿真验证相图的性状

### 4.1 蔡氏电路平衡点的排列和相图性状

①  $g_N$  伏安特性式(16)如图4, 设  $a_1 = 0.8 \times 10^{-3}$ ,  $a_3 = 0.001 \times 10^{-3}$ , 由式(15.1)用 MATH-3 可以求出有三个平衡点, 其坐标位置( $V_{C1}$ ,  $V_{C2}$ ,  $i_L$ )为  $E_1 = (0, 0, 0)$ ;  $E_{2,3} = (\pm 6.9282, 0, \mp 0.00521)$ 。设  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  均为正实数, 记雅可比矩阵的特征根( $\delta$ ,  $-\alpha \pm j\beta$ )为  $O$  型, 而( $-\delta$ ,  $\alpha \pm j\beta$ )记为  $P^\pm$  型蔡氏电路  $E_1$  为  $O$  型点, 其特征根为  $\lambda_0 = 22998.9 - 14655.8 \pm j26659.5$ ,  $E_{2,3}$  为  $P^\pm$  型点, 其特征根为  $\lambda_p = -41592.3, 4548.86 \pm j3166.8$ 。

图4  $i_N-V_N$  曲线

三个平衡点排列具有  $P^-OP^+$  结构, 可以发现  $P$  点的周围是旋涡状轨线构成的  $D_p$  区,  $O$  点的邻域是  $D_o$  区, 相点离开居于中间位置的  $O$  型点  $E_1$ , 具有左右两种可能的走向, 轨线趋向左右两个  $D_p$  区, 成为联系左右

两个漩涡的键波<sup>[7]</sup>, 图 5 是空间相图在  $(V_{CL}, i_L)$  平面上的投影, 其中心是  $(0, 0)$ ; 左右两个区域各以  $P$  点  $(-0.00521, 6.92)$  和  $(-6.92, 0.00521)$  为涡心形

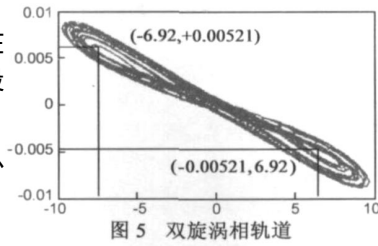


图 5 双旋涡相轨道

成漩涡, 左右两漩涡轨线基本上是卷出的螺旋形, 右漩涡卷出越过中心  $O$  就会走入左漩涡, 左漩涡卷出越过  $O$  就会走入右漩涡。又由于式 (16) 中三次方项的作用使螺旋的卷出不会向无穷的方向扩展, 因此说  $P^-OP^+$  的排列是形成双漩涡结构相图的原因之一。

其次要注意到由于满足功率平衡的周期解不是唯一的, 由于  $a_1 > -g_{NF1} > -g_{NF2}$  代入式 (20) 可得  $V_m^2$  有两个合理的正值解, 说明在一个初激值下有两组合理的  $(\omega_s, V_m)$  同时满足瞬时功率平衡, 即可以维持  $(\omega_{s1}, V_{m1})$  的自激振荡也可以维持  $(\omega_{s2}, V_{m2})$  的振荡, 并且可以在任一瞬时、任意一个相点从一种振荡转向另一种振荡, 其随机性必须在这个规律的约束下随机。产生的周期振荡可在两组解之间反复变化, 因而左右两侧的轨线不是单一性而具有遍历性, 这是形成双漩涡结构相图的另一个原因。同样可做出空间相图在其他两平面的投影。

现有绝大部分理论认为: 混沌振荡是确定性系统的不确定性行为, 似乎是自然界存在一种不可理解的现象。本文分析指出混沌振荡的随机行为是有一定规律的, 其随机性是在一定约束限制范围内的随机。自然界物体与电荷来回往返运动的普遍形式应指混沌振荡, 等周期振荡是这种普遍形式的一个特例, 而正弦振荡又是等周期振荡的特殊情况。

②若设  $a_1 = 0.2 \times 10^{-3}$ , 其他参数不变, 此时由于  $-g_{NF1} > a_1 > -g_{NF2}$  代入式 (20), 则  $V_m^2$  只有一组合理的正值解满足功率平衡。用 MATH-4 求当  $a_1 = 0.2 \times 10^{-3}$  时的蔡氏电路, 只有一个平衡点, 满足功率平衡的解是唯一的, 和初激值无关, 在相图显示有一个极限环。此时没有混沌。

③若设  $a_1 = 0.05 \times 10^{-3}$  其他参数不变, 此时  $-g_{NF1} > -g_{NF2} > a_1$  代入式 (20), 则  $V_m^2 < 0$  没有基波解满足功率平衡。其意义是  $(\omega_s, V_m)$  取任意的实数值, 无法使  $G_i \leq 0, B_i \leq 0$  同时成立。相图显示在一定初值刺激下, 轨线返回原点。

4.2 Colpitts 电路平衡点的排列和相图性状

用 MATH-5 求三个平衡点的座标位置  $(u, u_{CL}, i_L)$ :  $E_1 = (0, 0, 0)$ ;  $E_{2,3} = (\pm 11.1803, \pm 11.1803, 0)$   $E_1$  为不

稳定焦点, 其雅可比矩阵特征根为  $\lambda_p = -1.79505 \times 10^7, 3.97527 \times 10^6 \pm j3.71068 \times 10^7$ 。  $E_{2,3}$  为鞍点, 其雅可比矩阵的特征根为  $\lambda_0 = 2.412 \times 10^7, -1.706 \times 10^7 \pm j4.22129 \times 10^7$ 。

三个平衡点的排列为  $O^-PO^+$ , 居于中间位置的  $P$  型点是不稳焦点, 相点离开  $P$  型点的第一瞬间只有一种走向, 即螺旋形的向外扩展, 当初激值在  $P$  型点邻域  $|u| < 11.1803$ , 相点运动的最终达到一个固定的闭轨线  $T$ , 当初激值进入并超过左右两个平衡点的座标位置时  $|u| > 11.1803$ , 轨线不趋向  $T$  而是趋于无穷。因此  $T$  是一个半稳定极限环, 仿真说明当初激值为 11.1, 相图有闭轨线; 当初激值为 11.2 相轨线趋于无穷。

另两个  $O$  点微变线性化是不稳定, 但还必须将座标体系平移到另两点, 用基波平衡原理, 分析其在大范围的稳定性和振荡性状。分析结果表明:  $G_i$  和  $B_i$  两者恒大于零, 网络没有周期解。当  $G_i > 0$  时意味着实功不能平衡, 振幅由于实功不足而趋向衰减。当  $B_i > 0$  时意味着虚功不能平衡也会停振, 说明没有足够的虚功维持正弦振荡, 但其发展和实功不足的结果不同。相点趋向无穷也是电荷不具备振荡能力的一种表现。式 (11) 的最后一项记为  $Au = 2.5 \times 10^{21}(10 - 0.08u^2)u$ , 当  $|u| < 11.1803$  时,  $A > 0$  是一个恢复力, 在恢复力的范围内虚功可取得平衡; 当  $|u| > 11.1803$  时,  $A < 0$  是一个排斥力。在排斥力的范围内,  $B_i > 0$  虚功无法平衡, 相点在排斥力的作用下远离平衡点而去。

相点趋向无穷也是不稳定的一种表现, 在实际的力学与电路系统, 都是不可能出现的, 事实上的实际系统是非线性特性必然会又增加一个更高次方项, 例如  $i = (9u - 0.08u^3) \times 10^{-3} + a_5u^5$  其中  $0.08 \times 10^{-3} > a_5 > 0$  使  $Au = 2.5 \times 10^{24}(0.01 - 0.08 \times 10^{-3}u^2 + a_5u^4)u$ , 当  $u \rightarrow 0$  时,  $A > 0$  是一个恢复力; 当  $|u|$  稍大时,  $A < 0$  是一个排斥力, 促使相点继续远离平衡点; 当  $u \rightarrow \infty$  时,  $A > 0$ , 又变成恢复力, 促使物体返回原点而重新振荡起来。这种现象是鞍点型电路的特点。

所谓有足够的虚功是指, 系统不消耗能量, 但有交换能量形式的能力, 例如势能和动能的交换, 电能和磁能的交换, 具备这种能力的表现为虚功取得平衡而有振荡, 不具备这样能力的表现为虚功无法平衡, 而在排斥力的作用下趋于无穷, 不能振荡, 如果三个平衡点的排列是  $O^-PO^+$ , 则右侧  $O$  型点向右刺激趋于无穷, 而向左侧刺激, 则进入  $P$  点周围而有周期振荡, Colpitts 电路的相图印证上述的结论。对于多平衡点的非线性系统, 建立一个座标体系只能研究各点的微变稳定性, 至于全局的稳定性必须建立多个座标体系, 用基波平衡原理研究在多个座标体系下, 其大范围的稳定性, 然后

综合分析, 可以得出多平衡点的电路会出现混沌.

#### 参考文献:

- [1] Leon O Chua. Linear and Nonlinear Circuits[M]. New York: McGraw-Hill Company Inc, 1987, 432.
- [2] Leon O Chua. Dynamic nonlinear network: state of the art[J]. IEEE Transactions on CAS, 1980, 27(11): 1059- 1087.
- [3] 黄炳华. 非线性电子网络的基波分析法[J]. 固体电子学研究和进展, 2003, 23(1): 35- 41.
- [4] 黄炳华. 各类自激振荡的基波分析法[J]. 固体电子学研究和进展, 2005, 25(1): 102- 107.
- [5] 黄炳华. 用基波平衡原理分析非线性电子网络稳定性[J]. 固体电子学研究和进展, 2006, 26(1): 43- 48.
- [6] 黄炳华. 电子网络振荡与稳定的基波分析法[J]. 电子科技大学学报, 2006, 35(2): 47- 50.
- [7] 禹思敏, 丘水生, 马在光. 多涡卷混沌与超混沌吸引子研究的新结果[A]. 2002 中国非线性电路与系统学术会议论文集[C]. 广东: 深圳大学, 2002 年 11 月.
- [8] Leon O Chua. Intermittency in a piecewise linear circuit[J]. IEEE Transactions on CAS, 1991, 38(5): 510- 520.
- [9] Mathematica 程序 MATH 1; 程序 MATH - 2; 程序 MATH 3;

程序 MATH 4; 程序 MATH 5

#### 作者简介:



黄炳华 男, 1940 年 1 月出生于福建厦门, 现为广西大学教授, 主要研究方向: 信号与系统、非线性电路与混沌、用基波平衡原理求非线性微分方程的定性解等. E-mail: huangbh@gxu.edu.cn

钮利荣 男, 1969 年 10 月 27 日出生, 高级工程师, 1991 年毕业于南京大学半导体物理与器件专业. 现在中国电子科技集团公司第五十五研究所工作. 负责单片电路应用与开发部的质量管理, 从事 GaAs 器件与电路的可靠性研究.

简兰峰 男, 1998 年本科毕业于南京理工大学电磁场理论与微波技术专业, 同年分配至 55 所, 一直从事 GaAs MMIC 芯片设计开发工作. 在功率放大器芯片的设计及实用化方面有深入研究. 作为项目负责人承担并完成了多项课题的开发任务. 参与完成的项目曾获国防科技进步一等奖.

孙春妹 女, 2002 年本科毕业于东南大学电子与信息技术专业, 同年分配至 55 所, 主要从事 GaAs MMIC 芯片及其相关电路的测试工作, 负责相关产品的生产项目.