

# 高阶 MoM 及其与 PO 的混合法计算电磁散射问题

刘曙光<sup>1</sup>, 张晓娟<sup>2</sup>

(1. 中科院电子学研究所; 中国科学院研究生院, 北京 100080; 2. 中科院电子学研究所, 北京 100080)

**摘 要:** 本文提出了一种新的以高阶矩量法 (MoM) 与物理光学法相结合的混合法 (MoM/PO). 该方法采用曲面参数化的离散方法, 保证了建模的精确性. 计算过程中将散射表面灵活划分为 MoM 区和 PO 区, 在各区域可以灵活确定离散单元的大小和密度. MoM 区域的高阶矩量法, 采用基于 Lagrange 插值的高阶矢量基函数, 结合点匹配技术, 比传统的高阶法简单, 易于实现. 计算结果表明, 本文的高阶矩量法及其与物理光学法结合的混合方法能准确有效的计算目标的电磁散射特性.

**关键词:** 电磁散射; 高阶矩量法; 混合法; 矢量基函数

**中图分类号:** O441 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 12-2376-04

## A High Order Moment Method and Its Hybrid Form with PO Method for EM Scattering Computation

LIU Shu-guang<sup>1</sup>, ZHANG Xiao-juan<sup>2</sup>

(1. Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences; Graduate University of Chinese Academy of Science, Beijing 100080 China;

2. Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** A hybrid method for the computation of electromagnetic scattering problems is introduced in this paper. This method is based on the high order Moment Method (MoM) and the Physical Optics (PO) method. Curvilinear and parametric description is used to model the scatters, which eliminates the model discretization error. When the MoM regions and PO regions are chosen properly, the computations are then restricted on the MoM regions and the efficiency is increased. The high order property provides extra accuracy controls. The interpolation vector basis functions simplify the implementation phase. The high order moment method and the hybridization with PO method are useful and efficient for electromagnetic computations.

**Key words:** electromagnetic scattering; high order moment method; hybrid method; vector basis function

### 1 引言

随着电磁散射问题研究的日趋深入, 遇到的散射目标也更加复杂, 传统的低阶散射算法在速度、效率和精度上都不能满足要求, 因此高阶电磁散射算法得到了密切的关注. 高阶方法能以较小的代价得到较高的计算精度, 比相应的低阶算法有显著的优点. 高阶散射算法通常包括: 对散射目标形状的精确描述, 采用高阶基函数以及采用高阶积分方法. 对散射目标的精确或高阶描述将消除或减少目标的离散误差, 高阶基函数的采用可以更精确有效的描述未知电流密度的分布, 高阶积分方法保证了整体算法的高阶性<sup>[1]</sup>. 这些措施将有效的提高计算的精度和效率.

传统的矩量法采用高阶基函数和伽略金匹配<sup>[2]</sup>时能达到高阶的效果, 但是在预处理阶段, 每个矩阵元素

都需要计算一个二维积分, 当未知量很大时, 预处理过程非常缓慢, 整个方法的时间效率较差. 新近出现的高阶 Nyström 方法<sup>[3,4]</sup>采用了基于点的高阶离散方法, 大大加快了预处理的过程. 但是仍然不能有效减少待求未知量的个数.

本文采用基于 Lagrange 插值的高阶矢量基函数<sup>[5]</sup>, 应用于电场积分方程, 采用点匹配方法, 使得预处理过程的效率和 Nyström 方法相当<sup>[6]</sup>. 对于近相互作用, 计算公式得到简化, 计算过程也更加简洁, 省略了局部修正矩阵的求解. 将高阶矩量法与物理光学法 (PO) 相结合形成的混合法 (MoM/PO), 可以大幅减少未知量的个数, 提高计算效率, 对于电大尺寸目标的计算比较有利. 本文采用的高阶 MoM/PO 混合法采用了传统的低阶 MoM/PO<sup>[7]</sup>混合的思想, 将散射体表面划分为 MoM 区和 PO 区, 其中 PO 区电流密度由 PO 方法计算, MoM 区电流密

度由高阶矩量法计算,由于减小了待求区域,因而能减小计算量,同时也保留了预处理过程简便的优点.实际计算的结果表明,该方法能正确处理三维散射体问题的计算.

### 2 散射目标的离散及矢量基函数

对于任意形状的三维散射体,其表面可以用平面三角形单元的组合来近似,但是这样的近似对于曲面有离散误差,三角形单元越小越密,误差越小.对于高阶方法,单元密度通常不是很大,因此这种离散方法会引入较大的模型误差.根据散射体表面的具体情况,采用参数化的表面离散方法,可以消除这种表面离散误差.对于一般表面,采用参数化的高阶离散方法也能提高离散的精度.

以本文采用的球面散射体为例,通过把散射体表面的平面三角形离散转化为参数化的曲面离散,就可以消除表面离散误差.建立平面三角形与球面上的曲面三角形的映射,

$$r_s = \frac{R}{|r|} r_f \quad (1)$$

上式中  $r_f$  是平面三角形单元上的点,  $r_s$  是球面三角形上的点,  $R$  是球半径.利用平面三角形上  $r_f$  的参数坐标,可以精确描述球面三角形单元.对于其他类型曲面,也可进行类似处理,以消除表面离散误差.

散射体表面电流密度分布可由各单元电流密度分布给出.在曲面上定义曲线坐标系  $(u, v)$ ,其基矢量为  $(\hat{u}, \hat{v})$ ,每个单元上电流密度分布可以定义为

$$J_p = \frac{1}{J_{jcb}} [J_p^u \hat{u} + J_p^v \hat{v}] \quad (2)$$

其中  $J_p^u$  和  $J_p^v$  是电流密度在基矢量方向的分量,  $J_{jcb}$  是曲线坐标系的 Jacobian 系数.

$$\hat{u} = \frac{\partial r}{\partial u}, \hat{v} = \frac{\partial r}{\partial v}, J_{jcb} = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}} \quad (3)$$

$$g_{11} = \hat{u} \cdot \hat{u}, g_{22} = \hat{v} \cdot \hat{v}, g_{12} = g_{21} = \hat{u} \cdot \hat{v} \quad (4)$$

每个单元的电流密度可以由插值点处的电流密度插值得到<sup>[4]</sup>:

$$J_p = \sum_{i=1}^{l_p} \frac{1}{J_{jcb}} L_{(i,p)}(u, v) [\hat{u}(g_{22} \hat{u} - g_{12} \hat{v})_{(i,p)} + \hat{v}(g_{11} \hat{v} - g_{21} \hat{u})_{(i,p)}] \cdot J_{(i,p)} \quad (5)$$

其中下标  $(i, p)$  表示  $p$  单元的第  $i$  个插值点,  $L_{(i,p)}(u, v)$  是二维 Lagrange 插值因子,具有如下性质

$$L_{(i,p)}(u_j, v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (6)$$

式(5)可以写成更为简洁的形式:

$$J_p = \sum_{i=1}^{l_p} \frac{1}{J_{jcb}} L_{(i,p)}(u, v) [J_{(i,p)}^u \hat{u} + J_{(i,p)}^v \hat{v}] \quad (7)$$

### 3 高阶矩量法原理

对于电场积分方程(EFIE),

$$j \mu t \cdot \overline{\overline{G}}(r, r) \cdot J(r) ds = -t \cdot E^{inc}(r) \quad (8)$$

$$\overline{\overline{G}}(r, r) = g \overline{\overline{I}} + \frac{\nabla \nabla g}{k^2}, g = \frac{e^{-jk|r-r'|}}{4|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (9)$$

式中  $\overline{\overline{G}}$  为并矢格林函数,  $\overline{\overline{I}}$  为单位并矢,  $E^{inc}$  为入射电场,  $t$  是任意切向矢量.试函数取为

$$t(r) = a(r - r_f) \quad (10)$$

$$a = \begin{cases} \hat{u}_f, & = 1 \\ \hat{v}_f, & = 2 \end{cases} \quad (11)$$

将式(7)、(9)、(10)代入式(8),得:

$$\sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{l_p} \begin{bmatrix} A_{uu} & A_{uv} \\ A_{vu} & A_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{(i,p)}^u \\ J_{(i,p)}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^u \\ U^v \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中

$$A = j \mu \sum_p a_{(j,q)} \cdot \overline{\overline{G}}(r_{(j,q)}, r) \cdot L_{(i,p)}(r) J_{jcb}^{-1} ds$$

$$U = -a_{(j,q)} \cdot E^{inc}(r_{(j,q)}) \quad (13)$$

式中  $a$  为表面处的切向矢量,其取值由式决定,  $(j, q)$  表示第  $q$  单元上第  $j$  个匹配点.

### 4 矩阵元素的计算

由于格林函数有较强的奇异性,式(13)在不同的区域有不同的积分精度,为了得到相同的精度,将求解区域分为三个区域分别计算.当匹配点与积分单元相距较远时,格林函数比较光滑,采用预选的高斯积分公式即可达到需要的精度.结合 Lagrange 插值因子的性质式(6), (13)可以简化如下

$$A = j \mu W_{(i,p)} a_{(j,q)} \cdot \overline{\overline{G}}(r_{j,q}, r_{i,p}) \cdot (i,p) \quad (14)$$

当匹配点距积分单元很近但不在其上时,格林函数变化比较剧烈,式(13)中的并矢格林函数具有三阶奇异性,通过高斯定理可将其奇异性降低一阶,然后采用高阶高斯积分,可以达到较好的精度.

$$A = j \mu \sum_p a_{(j,q)} \left[ g(r_{(j,q)}, r) \cdot L_{(i,p)}(r) + \frac{1}{k^2} \nabla g(r_{(j,q)}, r) \cdot \frac{\partial L_{(i,p)}(r)}{\partial} \right] J_{jcb}^{-1} ds - \sum_{\partial p} a_{(j,q)} \cdot \nabla g(r_{(j,q)}, r) L_{(i,p)}(r) (\cdot n_e) J_{jcb}^{-1} dl \quad (15)$$

式中  $g(r, r)$  是标量格林函数,  $\partial p$  是积分单元边界,  $n_e$  是  $\partial p$  上单位外法线矢量.当匹配点在积分单元上时,式(15)由于具有二阶奇异性无法处理,首先将标量格林函数分为两部分  $g = g^r + j g^i$ ,  $g^i$  项是规则部分,可以用式(14)的方法简便求得.对于含  $g^r$  的二阶项,用如下办法降低一阶

$$\sum_p a_{(j,q)} \cdot \nabla g^r(r_{(j,q)}, r) \frac{\partial L_{(i,p)}(r)}{\partial} J_{jcb}^{-1} ds = \sum_p \nabla g^r$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \mathbf{r}_{(j,q)}, \mathbf{r} \right) \cdot \left[ \mathbf{a}_{(j,q)} \frac{\partial \mathcal{L}_{(i,p)}(\mathbf{r})}{\partial} - \mathbf{a} \frac{\partial \mathcal{L}_{(i,p)}(\mathbf{r})}{\partial} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{(j,p)}} \right] \mathbf{J}_{\text{jcb}}^{-1} \\
 & d\mathbf{s} - \int_{\partial \Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_e g^r(\mathbf{r}_{(j,q)}, \mathbf{r}) \frac{\partial \mathcal{L}_{(i,p)}(\mathbf{r})}{\partial} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{(j,p)}} \mathbf{J}_{\text{jcb}}^{-1} d\mathbf{l} \quad (16)
 \end{aligned}$$

所有的积分项都最多具有一阶奇异性, 利用 Duffy 方法<sup>[8]</sup>可以得到高精度的结果.

### 5 高阶矩量法与 PO 法的混合

将散射体表面划分为 MoM 区和 PO 区, PO 区必须是入射电磁波能照亮的区域, 此时才有 PO 感应电流产生, 剩余区域则可划分为 MoM 区. 由于 PO 法的特点, 以光滑曲面作 PO 区较好, 如果包括较多地棱边, 结果可能变坏. 分别用 PO 法和高阶矩量法计算不同区域, 即可形成混合法. 为了增加计算的准确性, 在电场积分方程的基础上, 引入了 PO 区和 MoM 区的耦合项, 描述两区之间的联系. 此时, 电场积分方程可以写为:

$$(L_J^E + L_J^E K L_J^H) \{ J^{\text{MoM}} \}_{\tan} = - E_{i,\tan} - L_J^E K \{ H_i \} \quad (17)$$

其中的线性微积分算子为

$$L_J^E \{ J \} = j \mu \iint_S \left[ 1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] J(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}) d\mathbf{s} \quad (18)$$

$$L_J^H \{ J \} = \iint_S J(\mathbf{r}) \times \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}) d\mathbf{s} \quad (19)$$

$$K \{ H_i \} = 2 \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (20)$$

式(20)中 在亮区取 1, 暗区取 0.

将式(7)代入式(17), 采用式(10)作为试函数, 可以得到

$$\begin{matrix} p \\ p=1 \end{matrix} \begin{matrix} l_r \\ i=1 \end{matrix} \begin{bmatrix} B_{uu} & B_{uv} \\ B_{vu} & B_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{(i,p)}^u \\ J_{(i,p)}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^u \\ V^v \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中

$$\mathbf{B} = \mathbf{a} (L_J^E + L_J^E K L_J^H) \left[ \frac{L_{p,i}(u,v)}{J_{\text{jcb}}} \right] \quad (22)$$

$$V_{po}^a = - \mathbf{a} \cdot (E_i + L_J^E K \{ H_i \}) \quad (23)$$

混合了 PO 法后的 MoM 矩阵方程就是式(21), 其矩阵元素的计算采用式(22)和式(23), 具体的处理过程与上一节相同. 其中的外加电磁场为

$$E_i = E_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (24)$$

$$H_i = - \frac{E_0}{\eta} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (25)$$

其中  $\eta$  为电磁波的波阻抗.

通过求解式(21)的线性方程组, 可以得到 MoM 区的电流密度分布. PO 区的电流密度分布可由下式求出

$$\mathbf{J}_{po} = 2 \mathbf{n} \times \mathbf{H}_i \quad (26)$$

这样, 散射体整个表面电流密度分布即可求出.

### 6 数值计算结果

我们选择了几个典型散射体进行了计算. 图 1 所示

的是金属球体的散射截面. 该金属球半径为 1 (电磁波的波长), 球面划分了 224 个三角形单元. 计算时采用了二阶矢量插值基函数, 此时每个三角形单元中有 6 个积分点, 整体具有 4 阶精度. 电磁场由 z 正向入射, 极化方向为 x 方向. 图中显示了采用电场积分方程计算的结果, 从图中可以看出, 高阶法的结果和解析解完全符合.

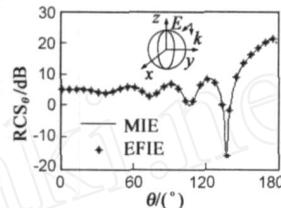


图 1 半径为 1λ 的金属球体

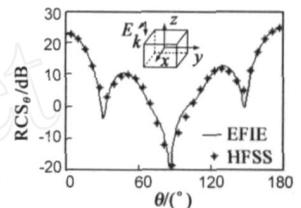


图 2 长宽高为 2×2×1λ 的正方体

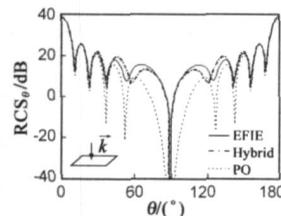


图 3 5λ×5λ 的金属平板

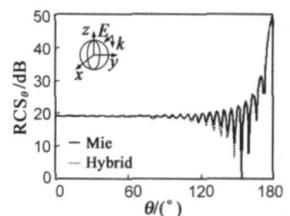


图 4 半径为 5λ 的金属球体散射截面

图 2 是金属长方体 z 方向的散射截面. 金属长方体的尺寸为: 长 2, 宽 2, 高 1. 入射电磁波沿 z 轴负向传播, 电场极化方向沿 x 正向. 坐标系原点在长方体中心, x 和 y 轴分别沿长和宽的方向, z 轴沿着高的方向. 长方体表面总共划分成 344 个三角形单元. 以 HFSS 的计算结果作为参考, 本文的高阶法得到与之相符结果.

图 3 是 5λ×5λ 的方形金属平板的散射特性. 该金属平板共划分了 560 个平面三角形单元, 其中中央 3×3 的区域为 PO 区, 边缘部分为 MoM 区. 从图中可以看到, 混合法的结果很接近 MoM 的结果, 比 PO 法更为精确.

图 4 是半径为 5λ 的金属球体散射截面的计算结果. 采用的是高阶矩量法结合 PO 法的混合方法. 电磁波由 z 轴正向入射, 上半个球面是被照亮的区域, 为 PO 区, 下半个球面处于阴影区, 作为 MoM 区处理. 整个球面划分为 1170 个三角形单元, 在求解区域缩小了一半的情况下, 混合方法的计算结果与 Mie 级数的结果能较好吻合, 表明该混合法能够准确的计算三维散射体的散射问题.

### 7 结论

本文将基于 Lagrange 差值因子的矢量插值基函数应用于电场积分方程, 得到了电磁散射问题的高阶矩量法解. 研究了金属球体, 长方体, 金属平面等典型散

射体的散射特性,得到了符合实际的计算结果.与传统的高阶矩量法相比,此方法实现过程简单,容易实现高阶特性.而且能够消除散射体表面的离散误差,提高模型精度.通过合理处理积分方程的奇异性,保证了整个方法的高阶精度.其与 PO 法结合形成的混合法,能灵活的进行区域划分和离散密度及单元大小的选择,增加了整个方法的灵活性,能有效减少求解区域和未知量个数,这些特性对于解决电大尺寸的散射问题有较大意义.

#### 参考文献:

- [1] WANDZURA S. High-order discretization of integral equation with singular kernels[A]. Antennas and Propagation Society International Symposium 1995 Digest[C]. New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1995. 792 - 795.
- [2] GRAGLIA R D, WILTON D R, PETERSON A F. Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1997, 45 (3): 329 - 342.
- [3] CANINO L F, OTTUSCH J J, et al. Numerical solution of the Helmholtz equation in 2D and 3D using a high-order Nyström discretization[J]. Journal of Computational Physics, 1998, 146 (2): 627 - 663.
- [4] ZHANG Xiaojuan. High-order Nyström method for the EFIE of EM scattering problems[J]. Journal of Electronics (China), 2004, 21(6): 476 - 481.
- [5] KANG Gang, SONG Jiming, et al. A novel grid-robust higher order vector basis function for the method of moments [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2001, 49(6): 908 - 915.
- [6] ZHANG Xiaojuan and LIU Shur Guang. Nyström method for the EM scattering of 3D conductor bodies [A]. 2005 Asia-Pacific Microwave Conference[C]. Piscataway, N J: IEEE Press, 2005. 2866 - 2869.
- [7] JAKOBUS U and MEYER F J C. A hybrid physical optics/method of moments numerical technique: theory, investigation and application[A]. Proc IEEE AFRICON '96[C]. New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1996. 282 - 287.
- [8] DUFFY M G. Quadrature over a pyramid cube of integrands with a singularity at a vertex [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1982, 19(6): 1260 - 1262.

#### 作者简介:

刘曙光 男, 1981 年生, 硕士生. 主要研究方向为电磁散射快速计算. E-mail: liushug@gmail.com

张晓娟 女, 1964 年生, 副研究员. 主要研究方向是微波遥感、天线、计算电磁学、电磁散射与逆散射.