

# 一种解决组合优化问题的改进型量子遗传算法

邢焕来<sup>1,2</sup>, 潘 炜<sup>1</sup>, 邹喜华<sup>1</sup>

(1. 西南交通大学信息科学与技术学院, 四川成都 610031; 2. 北京邮电大学电信工程学院, 北京 100876)

**摘 要:** 在量子遗传算法(QGA)的基础上,提出了一种解决组合优化问题的改进型量子遗传算法(NIQGA). 为充分利用量子态的干涉性和纠缠性,该算法引入了动态调整量子门旋转角步长机制、量子交叉操作和量子变异操作,因而具有更高的搜索效率. 利用两种典型组合优化问题——0/1 背包问题和路由选择问题进行验证. 结果表明,相比于 GA 和 QGA, NIQGA 具有收敛速度快和全局搜索能力强的特点,在解决基因间弱关联性的组合优化问题时有更优的性能.

**关键词:** 量子计算; 量子遗传算法; 组合优化

**中图分类号:** TP18; TN913.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 10-1999-04

## A Novel Improved Quantum Genetic Algorithm for Combinatorial Optimization Problems

XING Huan lai<sup>1,2</sup>, PAN Wei<sup>1</sup>, ZOU Xi hua<sup>1</sup>

(1. School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China;

2. School of Telecommunication Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

**Abstract:** Based on quantum genetic algorithm(QGA), a novel improved quantum genetic algorithm(NIQGA) to solve combinatorial optimization problem is proposed. To make full use of interference and entanglement characteristics of quantum state, dynamic step length in adjustment of angle of quantum gate, quantum crossover operation and quantum mutation operation are introduced, therefore high efficiency for optimization is achieved. Two typical combinatorial optimization problems—0/1 knapsack problem and route selection problem, are adopted to confirm the performance of NIQGA. Experimental results show that compared with GA and QGA, NIQGA is characterized by fast convergence rate and excellent capability on global optimization, especially better performance for combinatorial optimization problem with less correlation of genes.

**Key words:** quantum computation; quantum genetic algorithm; combinatorial optimization

## 1 引言

Ajit Narayanan 和 Mark Moore 等于 1996 年提出了量子遗传算法(QGA)的概念<sup>[1-2]</sup>,它是一种量子计算理论与进化算法相结合的概率搜索优化算法:用量子位编码表示染色体,用量子门作用和量子门更新完成进化搜索.由于 QGA 具有种群规模小而不影响算法性能、收敛速度快和全局搜索能力强等特点,得到了国内外研究人员的广泛关注<sup>[3-7]</sup>.

本文基于量子位编码和通用量子门更新策略,提出了一种结合动态调整量子门旋转角机制、量子交叉和量子变异操作的改进型量子遗传算法(NIQGA).①通过采用动态调整量子门旋转角机制和量子交叉操作,NIQGA

具有很快的收敛速度,能在短时间内搜索到优良解空间;②通过采用量子变异操作,NIQGA 具有良好的种群多样性,能够实现最优解的精确搜索,尤其在陷入局部最优时,该算法能及时地跳出局部最优,有效地避免了早熟的产生.同时将 GA、QGA 和 NIQGA 应用于 0/1 背包和分组交换网主干网的路由选择两类组合优化问题,结果表明 NIQGA 在收敛速度和全局搜索能力上具备明显的优势.

## 2 NIQGA 的介绍及流程设计

QGA 涉及到两个最基本的概念:量子位和量子门.量子位概念具体参照文献[7].QGA 的染色体编码采用量子位编码方式.当一个量子位染色体长度为  $m$  时,可

表示为:

$$q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \end{bmatrix} \quad (1)$$

由于一个长为  $m$  位的量子比特编码能表示  $2^m$  个不同的经典信息, 所以 QGA 能搜索到比经典 GA 更为广泛的空间。

QGA 的遗传操作的实现大多采用量子旋转门实现种群的更新操作, 其一般表示为:

$$U(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中  $\theta$  为旋转角。量子态更新就是对其中各个叠加成分的演化, 体现了量子计算的高度并行性。

NIQGA 是在 QGA 的基础上引入了动态调整量子门旋转角机制、量子交叉和量子变异操作。下面分别介绍 NIQGA 引入的三种策略和算法流程设计。

## 2.1 动态调整旋转角机制

NIQGA 采用量子旋转门更新策略完成种群的更新操作, 量子旋转门的旋转角度的确定方法如表 1 所示。旋转角  $\theta_i$  的取值:

$$\theta_i = S(\alpha_i, \beta_i) \Delta\theta_i \quad (3)$$

其中  $S(\alpha_i, \beta_i)$  和  $\Delta\theta_i$  分别为旋转角的旋转方向和角步长。表 1 中的  $\delta$  是一个与算法收敛速度有关的系数, 取值必须合理。结合动态调整量子门旋转角思想<sup>[8]</sup>, 我们提出了  $\delta$  的一种具体实现形式:

$$\delta = 0.04\pi \left[ 1 - k \cdot \frac{n}{\text{MAXGEN} + 1} \right] \quad (4)$$

其中  $n$  为当前的进化代数,  $\text{MAXGEN}$  为终止代数。  $k$  为  $[0, 1]$  之间常数。在算法运行初期, 搜索的网格较大, 从而增加了算法的收敛速度, 在算法运行末期, 搜索的网格较小, 从而实现了精确搜索, 有利于寻得最优解。

表 1 旋转角度的确定方法

$x_i$	$\alpha_i$	$f(x) \geq f(b)$	$\Delta\theta_i$	$S(\alpha_i, \beta_i)$			
				$\alpha_i\beta_i > 0$	$\alpha_i\beta_i < 0$	$\alpha_i = 0$	$\beta_i = 0$
0	0	false	0	0	0	0	0
0	0	true	0	0	0	0	0
0	1	false	0	0	0	0	0
0	1	true	$\delta$	-1	+1	$\pm 1$	0
1	0	false	$\delta$	-1	+1	$\pm 1$	0
1	0	true	$\delta$	+1	-1	0	$\pm 1$
1	1	false	$\delta$	+1	-1	0	$\pm 1$
1	1	true	$\delta$	+1	-1	0	$\pm 1$

注: 在表 1 中,  $f(*)$  是适应度,  $b_i$  和  $x_i$  分别是最优解  $b$  和二进制解  $x$  的第  $i$  个比特

## 2.2 量子交叉

GA 的搜索能力通过交叉操作得以飞跃的提高<sup>[9]</sup>。NIQGA 引入的量子交叉操作利用了量子态的干涉性。

充分利用所有染色体信息以产生更多的新模式, 极大地提高了算法的搜索能力, 能够有效地解决基因之间关联性不大的组合优化问题。本文提出了量子交叉的一种具体实现过程:

- (1) 将种群中所有个体随机排序;
- (2) 对排序后所有个体的第  $i$  位循环移位  $i-1$  次, 得到交叉操作后的新种群。

## 2.3 量子变异

NIQGA 采用量子变异操作防止算法陷入局部最优解。由于量子态具有纠缠特性, 在量子变异时采用单点变异方式就能有效地防止早熟, 因此本文采用单点变异方式量子变异操作: 以一定概率选择种群中的个体, 为选中的个体随机产生一个变异位并互换变异位概率幅。

## 2.4 NIQGA 的算法描述

(1) 初始化种群: 确定种群大小  $n$ 、量子位染色体位数  $m$  和量子变异概率  $pm$ , 包含  $n$  个个体的种群  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , 其中  $p_j (j = 1, 2, \dots, n)$  为种群中的第  $j$  个个体, 其描述如式(1), 所有  $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$  均取为  $1/\sqrt{2}$ , 表示在算法初始搜索时所有状态以相同的概率出现;

(2) 根据  $P$  中各个体的概率幅构造出量子叠加态的观测态  $R, R = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 其中  $a_j (j = 1, 2, \dots, n)$  为每个个体的观测状态, 即一个二进制串。在 NIQGA 中, 由概率幅  $P$  构造观测态  $R$  的过程包含解码过程, 解码后得到各优化参数的当前实际值;

(3) 对观测态进行适应度评估;

(4) 保留最佳个体, 并判断是否满足终止条件, 若满足, 则算法终止, 否则, 执行下一步;

(5) 根据式(3)计算量子旋转门的旋转角, 并用式(2)中的量子旋转门作用于种群中所有个体的概率幅, 即更新  $P$ ;

(6) 执行量子交叉操作;

(7) 执行量子变异操作;

(8) 进化代数增 1, 算法转至(2)继续执行, 直到算法结束。

上述算法保持了 QGA 通过量子门作用更新种群的高度计算并行性。通过引入动态调整量子门旋转角步长机制加快了算法的收敛速度。通过采用量子交叉和量子变异操作, 充分利用了量子态的干涉和纠缠特性, 算法因而具有更加优良的寻优性能并能有效地防止早熟。下面我们在具体问题中分析和验证 NIQGA 的性能。

## 3 实验分析

为了充分考虑和比较传统 GA、QGA 和 NIQGA 的性能, 实验通过求解两个典型组合优化问题来对这三个

算法进行性能比较,采用罚函数( penalty function) 方法处理约束条件.

3.1 0/1 背包问题

本实验中,分别采用 NIQGA、QGA 和 GA 三种算法求解 0/1 背包问题,以便于比较算法的收敛性及全局搜索能力. 算法中 NIQGA 和 QGA 的种群规模为 60, GA 种群规模为 200, 染色体编码 30 位.

在图 1 中,所有算法迭代次数均为 1000 代. NIQGA、QGA、GA 分别在 50 代、60 代、710 代附近找到其较优解,且较优解的值依次减小. 因为每个量子比特编码组成的染色体包含了更多的子空间, QGA 较传统 GA 有着极丰富的种群多样性和更为广泛的搜索范围, 具有并行搜索能力, 所以 NIQGA 和 QGA 的收敛速度及结果比 GA 要好. NIQGA 算法充分利用了量子态的干涉性和纠缠性等优势特性以及采用了旋转角的动态调整策略, 收敛速度最快, 在 50 代已得到较优解, 且较优解值要优于 QGA, 体现了 NIQGA 收敛速度快和全局搜索能力强的特点.

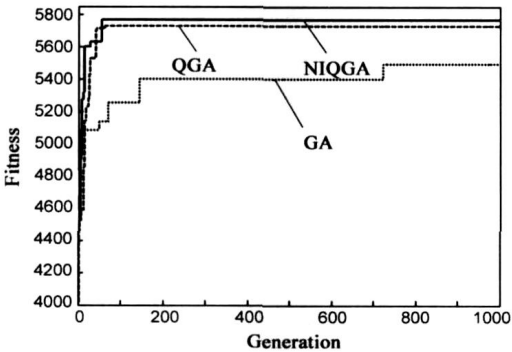


图 1 NIQGA 及 QGA 和 GA 适应度曲线比较

3.2 路由选择问题

在进行分组交换网主干网设计时, 路由选择和网络平均时延是需要考虑的重要因素<sup>[10-11]</sup>. 为了计算分组交换网的平均时延, 一般将网络假定为 M/M/1 网络, 它表示分组的到达时间间隔和发送时间间隔的概率密度函数都是负指数函数, 并且分组是按单队列来排队的.

图 2 是一个具有 6 个节点 8 条链路的分组交换网主干网拓扑结构, 假定节点  $i$  到节点  $j$  与节点  $j$  到节点  $i$  的通信量相同, 故其网络通信量矩阵

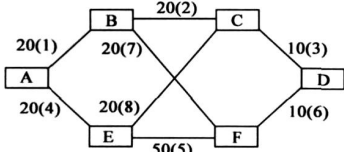


图 2 待优化网络拓扑结构

为对称矩阵, 用上三角阵表示. 表 2 是该网络节点间通信量和候选路由矩阵. 待求物理量为: 网络最佳路由及平均最小时延.

表 1 候选路由及通信量矩阵(单位: 包/秒)

	A	B	C	D	E	F
A		AB	$X_1, X_2$	$X_3, X_4$	AE	$X_5, X_6$
B		9	4	1	7	4
C			BC	$X_7, X_8$	$X_9, X_{10}$	BF
D			8	3	3	2
E				CD	CE	$X_{11}, X_{12}$
F				3	3	2
					$X_{13}, X_{14}$	DF
					3	4
						EF
						5

其中, 路由选择变量  $X_i (i = 1, 2, \dots, 14)$  与路由的对应关系为:

$X_1$ : ABC	$X_3$ : ABFD	$X_5$ : AEF
$X_2$ : AEC	$X_4$ : ABCD	$X_6$ : ABF
$X_7$ : BFD	$X_9$ : BFE	$X_{11}$ : CEF
$X_8$ : BCD	$X_{10}$ : BAE	$X_{12}$ : CDF
$X_{13}$ : DCE	$X_{14}$ : DFE	

为了便于比较, 根据文献得到优化目标函数和约束条件<sup>[11]</sup>:

$$Z_P = \min \left\{ \frac{1}{T} \sum_{l=1}^8 \frac{\sum_{r=1}^{14} \zeta_r \delta_{lr} X_r / \mu}{Q_l - \sum_{r=1}^{14} \zeta_r \delta_{lr} X_r / \mu} \right\} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \sum_{r=1}^{14} \zeta_r \delta_{lr} X_r / \mu \leq Q_l & l = 1, 2, \dots, 8 \\ X_j + X_{j+1} = 1 & j = 1, 3, \dots, 13 \\ X_j = 0 \text{ 或 } 1 & j = 1, 2, \dots, 14 \end{cases} \tag{6}$$

式(5)和式(6)中各物理量意义如下:

- $\delta_{lr}$ : 标识性函数, 当路由  $r$  中包含链路  $l$  时, 取值为 1; 否则, 取值为 0
- $Q_l$ : 第  $l$  条链路的线路容量
- $\zeta_r$ : 与路由  $r$  相关的节点对的通信量
- $1/\mu$ : 平均报文分组长度, 本文取 800 比特/包
- $X_r$ : 优化变量, 当候选路由  $r$  被选择作为与其相关的节点对之间的通信路由时, 取值为 1, 否则为 0
- $T$ : 网络总的通信量
- $\pi$ : 网络中所有节点对的集合

下面用 GA、QGA 和 NIQGA 三种算法求解该网络的路由选择问题. 设种群规模均取 20, 进化代数均为 100 代. 图 3 为三种算法求解路由选择问题所得最佳适应度曲线比较图. 在图 3 中, 三种算法均能在 100 代内得到网络平均最小时延 0.1106s, 最佳路由为 01011001101001. NIQGA、QGA 和 GA 分别在 5 代、20 代和 28 代附近得到最优解, 不难看出 NIQGA 的算法性能明显优于 GA 和 QGA.

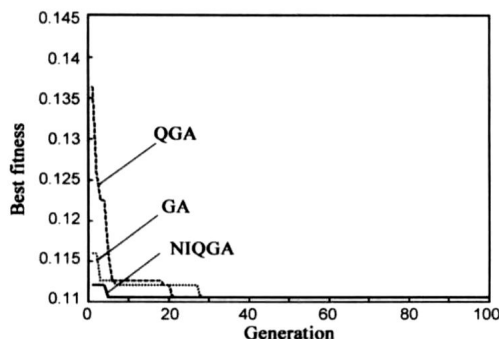


图3 NIQGA及QGA和GA求解路由选择问题最佳适应度曲线比较

#### 4 结论

本文提出了一种NIQGA,其显著特点是在算法中引入了动态调整量子门旋转角机制、量子交叉和量子变异操作,从而能够充分利用量子态的干涉性和纠缠性以及量子并行性进行全局寻优。结果表明,在0/1背包问题中,NIQGA最先收敛到较优解,且该解优于QGA和GA产生的较优解;在分组交换网主干网的路由选择问题中,NIQGA的性能最佳;从而证明了NIQGA在求解组合优化问题时的优越性。

#### 参考文献:

- [1] Narayanan A. An introductory tutorial to quantum computing [A]. Proceedings of IEE Colloquium on Quantum Computing Theory, Applications and Implications[C]. London: IEE Press, 1997. 1/1-1/3.
- [2] Narayanan A, Moore M. Quantum inspired genetic algorithm[A]. Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Evolutionary Computation[C]. USA: IEEE Press, 1996. 61-66.
- [3] Han K H, Park K H, Lee C H, et al. Parallel quantum inspired genetic algorithm for combinatorial optimization problem[A]. Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation[C]. USA: IEEE Press, 2001. 1422-1429.
- [4] Han K H, Kim J H. Quantum inspired evolutionary algorithms with a new termination criterion gate, and two phase scheme[J]. IEEE Transaction on Evolutionary Computation, 2004, 8(2): 156-169.
- [5] Chen Hui, Zhang Jiashu, Zhang Chao, et al. Chaos updating rotated gates quantum inspired genetic algorithm[A]. 2004 International Conference on Communications Circuits and Systems[C]. Chengdu: IEEE Press, 2004. 1108-1112.
- [6] 杨俊安, 庄镇泉, 史亮. 多宇宙并行量子遗传算法[J]. 电子学报, 2004, 32(6): 923-928.

Yang Jun an, Zhuang Zhen quan, Shi Liang. Multi universe parallel quantum genetic algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(6): 923-928. (in Chinese)

- [7] 周殊, 潘炜, 罗斌, 等. 一种基于粒子群优化方法的改进量子遗传算法及应用[J]. 电子学报, 2006, 34(5): 897-901.
- Zhou Shu, Pan Wei, Lou Bin, Zhang Wei li, Ding Ying. A novel quantum genetic algorithm based on particle swarm optimization method and its application[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(5): 897-901. (in Chinese)
- [8] Yang Junan, Li Bin, Zhuang Zhenquan. Research of quantum genetic algorithm and its application in blind source separation[J]. Journal of Electronics(China), 2003, 20(1): 62-68.
- [9] 王小平, 曹立明. 遗传算法——理论、应用与软件实现[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.
- [10] 张顺颐, 何军, 舒斐等. 基于遗传算法利用网络时延解决路由问题的新算法[J]. 通信学报, 1999, 20(12): 31-37.
- [11] Gavish B, Hantler S L. An algorithm for optimal route selection in SNA networks[J]. IEEE Transaction on Communication, 1983, 31(10): 1154-116.

#### 作者简介:



邢焕来 男, 1983年出生于河北, 西南交通大学通信工程专业本科毕业, 现为北京邮电大学电信工程学院硕士研究生. 主要研究方向为光互联网、宽带通信网. E-mail: xhl8334@163.com.



潘 炜 男, 1959年出生于安徽, 西南交通大学信息科学与技术学院教授、博士生导师、副院长, IEEE高级会员. 主要研究方向为量子信息与量子通信、非线性系统理论研究、光通信与光器件等.



邹喜华 男, 1981年出生于湖南, 现为西南交通大学信息科学与技术学院博士生. 主要研究方向为优化算法、光器件和光通信等.