

# 基于改进 Gauss-Newton 的电容层析成像图像重建算法

陈德运, 陈 宇, 王莉莉, 于晓洋

(哈尔滨理工大学, 黑龙江哈尔滨 150080)

**摘 要:** 针对电容层析成像技术中的“软场”效应和病态问题, 在分析 Gauss-Newton 算法基本原理的基础上, 提出了一种基于 Gauss-Newton 新的电容层析成像算法, 采用奇异值分解定理对算法的稳定性进行了证明. 在此基础上探讨了 ECT 应用该算法的可行性, 算法满足收敛条件且重建图像误差小. 仿真和实验结果表明, 该算法和 LBP、Landweber 和共轭梯度算法相比, 算法兼备成像质量高、稳定性好等优点, 为 ECT 图像重建算法的研究提供了一个新的思路.

**关键词:** 电容层析成像; 图像重建; 迭代算法; Gauss-Newton

**中图分类号:** TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2009) 04-0739-05

## A Novel Gauss-Newton Image Reconstruction Algorithm for Electrical Capacitance Tomography System

CHEN De-yun, CHEN Yu, WANG Li-li, YU Xiao-yang

(Harbin University of Science and Technology, Harbin, Heilongjiang 150080, China)

**Abstract:** To solve the “soft field” nature and the ill posed problem in electrical capacitance tomography technology, a novel image reconstruction algorithm for electrical capacitance tomography is presented. According to the characteristic of the inverse problems of ECT the Gauss-Newton algorithm is improved on the basis of analyzing mechanism of the algorithm, and the stabilization of the algorithm is proved via singular value decomposition principle. The feasibility of using this algorithm for ECT problems is also discussed. It shows that it is easy to meet the convergence condition and error of image reconstruction is small. Experimental results and simulation data indicate that the algorithm can provide high quality images and favorable stabilization compared with LBP, Landweber and conjugate gradient algorithms and this new algorithm presents a feasible and effective way to research on image reconstruction algorithm for Electrical Capacitance Tomography System.

**Key words:** electrical capacitance tomography; image reconstruction; iterative algorithm; Gauss-Newton

### 1 引言

流动层析成像技术是近年来飞速发展起来的一门新技术, 该技术在解决多相流检测问题上有巨大的发展潜力和广阔的工业应用前景<sup>[1,2]</sup>. 电容层析成像技术(Electrical Capacitance Tomography, ECT) 以其成本低、适用范围广、结构简单、非侵入式、安全性能好等优点, 成为目前流动层析成像技术发展的主流和研究热点<sup>[3]</sup>. 由于电容层析成像系统本身固有的非线性特点, 且能得到的独立电容测量值(即投影数据) 数量非常有限, 远远小于重建图像的像素个数, 反演问题不存在解析解. 同时由于非线性和“软场”效应, 既敏感场灵敏度分布不均匀, 使 ECT 系统解的稳定性较差且存在严重的病态性,

因此图像重建的难度较大<sup>[4,5]</sup>. 图像重建算法一直是电容层析成像技术实用化及进一步发展的主要难点<sup>[6,7]</sup>, 探索良好的图像重建算法十分重要.

ECT 测量的成功应用很大程度上依赖于成像算法的精度与速度. 目前用于 ECT 图像重建的较常用的方法主要有: 线性反投影算法(LBP)、正则法<sup>[8]</sup>、Landweber 迭代法<sup>[9]</sup>、投影 Landweber 迭代法及共轭梯度法(CG)<sup>[10]</sup>等. 线性反投影法的特点是算法简单, 重建速度快. 但因其成像质量相对较差, 严格说, 该算法仅是一种定性算法. 正则法因其正则参数的选取对成像质量影响较大, 一般采用经验值. 但特别值得一提的是, 在 Landweber 迭代法基础上发展起来的在线预选迭代法(OIOR)<sup>[11]</sup>, 在与 LBP 相同的速度下, 得到与多次 Landweber 迭代一样的

收稿日期: 2008-03-25; 修回日期: 2008-07-17

基金项目: 国家自然科学基金(No. 60572153); 高等学校博士学科点专项科研基金(No. 200802140001); 教育部春晖计划(No. Z2007-1-15013); 黑龙江省自然科学基金(No. F200609)

成像质量,但空间分辨率仍然没有超过 Landweber 方法.而投影 Landweber 迭代法可明显改善迭代的稳定性及有效地控制噪音,但对于复杂流型通常需要大量迭代才能达到满意的效果,限制了其应用.共轭梯度法(CG)适合于系数矩阵为对称正定的情况,对于简单流型该方法成像时间短,收敛很快,但对于复杂流型时,效果并不理想.应用于 ECT 的神经网络算法在本质上属于模式识别方法<sup>[12]</sup>,该法成功应用取决于神经网络结构的合理构造和训练样本的完备.由于受到多相流中流型变化的随机性和复杂性等因素的影响使得完备训练样本的获取较为困难,而且在实际的应用过程中网络结构的确定也存在一定的困难.

本文提出了一种改进 Gauss-Newton 正则化迭代电容层析成像算法,可大大改善图像重建的稳定性和提高图像重建的质量.实验结果表明该算法是有效的,就本文所考察的重建对象而言,该算法所获得的图像重建质量比 LBP、Landweber 和共轭梯度算法要好,从而为 ECT 图像重建提供了一种新的有效方法.

## 2 电容层析成像系统基本原理

电容层析成像系统由电容传感器、数据采集系统、成像计算机三部分组成,如图 1 所示.当管道内的介质分布发生变化时,电容极板对之间的电容就随之变化,由此可根据实际测得的极板电容值反演管道内的介质分布情况.

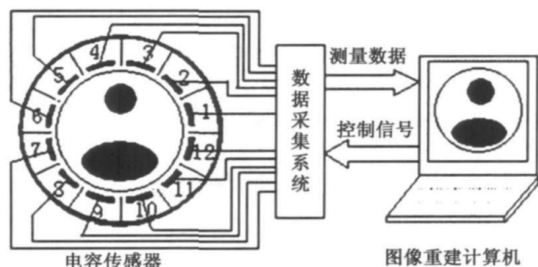


图1 12电极电容层析成像系统的组成

本文以典型的12电极传感器系统为研究对象.一般地对于一个  $N$  电极系统,可得到的独立电极对(构成一电容)总数  $M$  为:

$$M = C_N^2 = N \cdot (N-1)/2 \quad (1)$$

12个极板的某一个极板为起点,顺次为12个极板编号.在一个完整的测量过程中,电极板1首先被选择为源极板,即公共电极,给电极板1加一固定电压值  $U$ ,分别以电极板2,3,...,12为检测电极板,测量电极板对1-2,1-3,...,1-12之间的电容值,每次测量闲置电极皆接地.下一步,选择电极2为公共电极,测量电极对2-3,2-4,...,2-12的电容值.依次类推,直至测量完电极对11-12的电容值.这样在12电极系统中总共可获得66个独立的测量值.

目前,大多数 ECT 成像算法是基于介电常数到电容映射的线性模型,经过离散化、线性化和归一化的模型如式(2)所示:

$$C = SG \quad (2)$$

式中,  $C \in R^m$  为归一化电容向量,  $S \in R^{m \times n}$  为系数矩阵(灵敏度矩阵),  $G \in R^n$  为归一化介质分布图像向量.其中,ECT 图像重建的任务就是给定电容值  $C$  求解介电常数分布  $G$ .

## 3 算法原理

Gauss-Newton 是无约束极小化的迭代算法,其基本思想是在最小二乘问题的目标函数中忽略二阶信息项  $S(x)$ ,使目标函数的二次模型变为

$$\begin{aligned} \bar{m}_k(x) = & \frac{1}{2} r(x_k)^T r(x_k) + \left[ J(x_k)^T r(x_k) \right]^T (x - x_k) \\ & + \frac{1}{2} (x - x_k)^T \left[ J(x_k)^T J(x_k) \right] (x - x_k) \end{aligned} \quad (3)$$

该最小二乘问题解的牛顿法成为

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & x_k - \left[ J(x_k)^T J(x_k) \right]^{-1} J(x_k)^T r(x_k) \\ = & x_k + s_k \end{aligned} \quad (4)$$

式(3)和(4)中,  $r(x)$  为线性函数,  $J(x)$  是  $r(x)$  的 Jacobi 矩阵,  $s_k = - \left[ J(x_k)^T J(x_k) \right]^{-1} J(x_k)^T r(x_k)$ . 其中,  $J(x)^T r(x)$  是目标函数的梯度,  $J(x_k)^T J(x_k)$  是目标函数中忽略二阶信息项的 Hessian 阵.因此 Gauss-Newton 法的第  $k$  次迭代格式为:

(1) 解  $J(x_k)^T J(x_k) s = - J(x_k)^T r(x_k)$  得到  $s_k$ ;

(2) 令  $x_{k+1} = x_k + s_k$ , 对于式(3)相当于考虑  $r(x)$  在  $x_k$  附近的仿射模型:

$$\bar{M}_k(x) = r(x_k) + J(x_k)^T (x - x_k) \quad (5)$$

从而求线性最小二乘问题

$$\min \frac{1}{2} \|\bar{M}_k(x)\|^2 \quad (6)$$

的解.从迭代式(4)可以看出, Gauss-Newton 法仅需残量函数  $r(x)$  的一阶导数信息,并且  $J(x)^T r(x)$  至少是半正定的.

基于上述理论,对于 ECT 重建算法来说,电容向量  $C$  和图像分布向量  $G$  间存在非线性关系

$$C = F(G) \quad (7)$$

以电容测量值和计算值的误差范数平方作为目标函数,有下式成立

$$\begin{aligned} e(G) = & \frac{1}{2} \|F(G) - C\|^2 \\ = & \frac{1}{2} (F(G) - C)^T (F(G) - C) \end{aligned} \quad (8)$$

则其梯度和 Hessian 矩阵分别用  $h_k$  和  $H_k$  表示为:

$$h_k = (F'(G))^T (F(G) - C) \quad (9)$$

$$H_k = (F'(G))^T F'(G) \quad (10)$$

将式(8)和式(9)带入到式(5)中, 则知图像向量  $G$  的第  $k+1$  次迭代格式为

$$G_{k+1} = G_k - H_k^{-1} h_k \quad (11)$$

用灵敏度矩阵  $S$  取代  $F'(G)$ , 以  $C_k$  取代  $F(G)$ , 则式(11)变为

$$G_{k+1} = G_k - [S^T S]^{-1} S^T (SG_k - C) \quad (12)$$

对于 Gauss-Newton 法所忽略的二阶信息项  $S(x)$ , 如果  $S(x^*) = 0$  或  $S(x^*)$  小于  $J(x_k)^T J(x_k)$ , Gauss-Newton 法收敛. 但如果  $S(x)$  太大, 算法常常收敛到一个非驻点, 迭代只能得到极小点的一个较差估计. 同时对  $S^T S$  进行求逆运算时, 由于 ECT 系统反问题的病态性, 直接用 Gauss-Newton 求解, 解出的数值很不稳定, 成像效果很不理想. 为解决这个问题, 对于式(12), 我们在  $S^T S$  后面加上一个带参数的单位阵, 使其具有良好的正则化性质, 克服了当  $S$  奇异时, 算法收敛到一个非驻点的情况. 同时为了保证算法的全局收敛性, 增加了一维搜索因子, 使其具有“阻尼”作用. 获得改进后的迭代格式如下:

$$G_{k+1} = G_k - \alpha_k [S^T S + \lambda I]^{-1} S^T (SG_k - C) \quad (13)$$

其中  $\lambda > 0$ , 为正则参数;  $I$  为  $n \times n$  单位阵,  $\alpha_k$  是一维搜索因子.

由于 ECT 反问题的病态性, 给 ECT 反问题的求解带来很大的困难. ECT 反问题的病态性主要是由于问题本身造成的, 而测量时的注入电流、电极配置、极板电压、各流型的几何位置与面积等因素也会对其造成的影响. 下面还要对式(13)进行适当的加权措施, 来减轻由于测量时各种因素对 ECT 反问题的影响, 从而使图像重建的性能得到改善, 加权后迭代格式如下:

$$G_{k+1} = G_k - \omega \alpha_k [S^T S + \lambda I]^{-1} S^T (SG_k - C) \quad (14)$$

其中,  $\omega$  为权矩阵, 取为

$$\omega = \beta \cdot \text{diag} \left[ \left| \frac{1}{\Delta \rho_1^i} \right|, \left| \frac{1}{\Delta \rho_2^i} \right|, \dots, \left| \frac{1}{\Delta \rho_N^i} \right| \right]$$

其中,  $\Delta \rho_i^i$  为计算出的  $-[S^T S]^{-1} S^T (SG_0 - C)$  第  $i$  个分量,  $\beta$  为比例因子, 值由下式获得:

$$\beta \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\Delta \rho_i^i|^2} = N^2 \quad (15)$$

下面对改进的 Gauss-Newton 迭代方法的稳定性进行证明.

对于迭代格式(14)所对应的线性最小二乘问题的方程组为

$$s = -\alpha \omega [S^T S + \lambda I]^{-1} S^T r \quad (16)$$

对于迭代格式(12)所对应的线性最小二乘问题的方程组为

$$s_N = -[S^T S]^{-1} S^T r \quad (17)$$

在式(16)和式(17)中,  $r = SG_k - C$ ,  $\alpha = \alpha_k$ .

利用奇异值分解定理可以获得式(16)和式(17)的表达式为

$$s = - \sum_{i=1}^M \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda} \frac{\alpha \omega U^T r}{\sigma_i} V \quad (18)$$

$$s_N = - \sum_{i=1}^M \frac{U^T r}{\sigma_i} V \quad (19)$$

式中,  $U$  和  $V$  是矩阵  $S$  的左右奇异值矩阵, 并且  $U$  和  $V$  都是正交矩阵,  $S$  可写成  $S = U \Sigma V$ ,  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$ ,  $\sigma$  是  $S$  的奇异值.

对式(18)和式(19)进行比较, 由于  $\omega$  的存在, 使得求解过程中的余项  $r$  变得均匀稳定, 同时用  $\frac{\sigma_i^2 \alpha}{\sigma_i^2 + \lambda}$  代替  $\frac{1}{\sigma_i}$  可以很好地减少当  $\sigma_i \rightarrow 0$  和  $\frac{1}{\sigma_i} \rightarrow \infty$  时用迭代法求解方程受迭代余项  $r$  误差的影响, 其中  $r$  中含有实际的测量电容值  $C$ . 由此可见, 改进的 Gauss-Newton 方法对于求解 ECT 系统的反问题能获得稳定均匀的解.

在每次迭代过程中, 要将图像从物理意义进行修正, 即在每次的迭代循环中引入  $G^k$  的估计值应在 0 和 1.0 之间的先验信息. 为此, 将式(14)经过修改为如下的投影 Gauss-Newton 迭代:

$$G_{k+1} = P_+ [G_k - \omega \alpha_k [S^T S + \lambda I]^{-1} S^T (SG_k - C)] \quad (20)$$

式中,  $P_+$  是非负凸集上的投影, 并由下式给出:

$$P[G_i^{(k)}] = \begin{cases} 0, & \text{if } G_i^{(k)} \leq 0 \\ G_i^{(k)}, & \text{if } 0 < G_i^{(k)} \leq 1 \\ 1, & \text{if } G_i^{(k)} > 1 \end{cases} \quad (21)$$

其中,  $G_i^{(k)}$  表示列向量  $G$  的第  $k$  次迭代的第  $i$  个分量. 投影算子确保每次迭代都收敛于一个凸集, 使每次迭代的解都非负并有上界限制. 实践表明, 经过施加投影算子引入了物理意义上的约束, 在一定程度上能够提高重建图像的质量和重建速度.

#### 4 仿真与实验结果

为了验证算法的有效性, 用 12 电极系统进行了仿真试验. 成像时将管道截面用  $32 \times 32$  网格划分成 1024 个像素, 在管道横截面的有效区域共 856 个成像单元. 对典型流型: 层流、核心流、泡状流进行了预设置实验, 成像时采用了统计滤波阈值. 采用数值仿真方法对本文所阐述的算法(Improved Gauss-Newton, 简称 IGN)进行图像重建, 并同线性反投影法(LBP)、共轭梯度法(CG)和 Landweber 迭代法的图像重建质量进行比较, 仿真计算在 MATLAB 在 P IV 3.0G CPU, 512M 内存的计算机上进行.

图像重建速度用迭代次数  $N$  表示,  $N$  越大则重建

时间越长,说明速度越慢.由于LBP法属单步处理,所以 $N=0$ 迭代法的迭代步数 $N$ 的选取通过数值实验确定.在实验时通常的做法是迭代误差满足:

$$\|SG_k - C\| < \xi \tag{22}$$

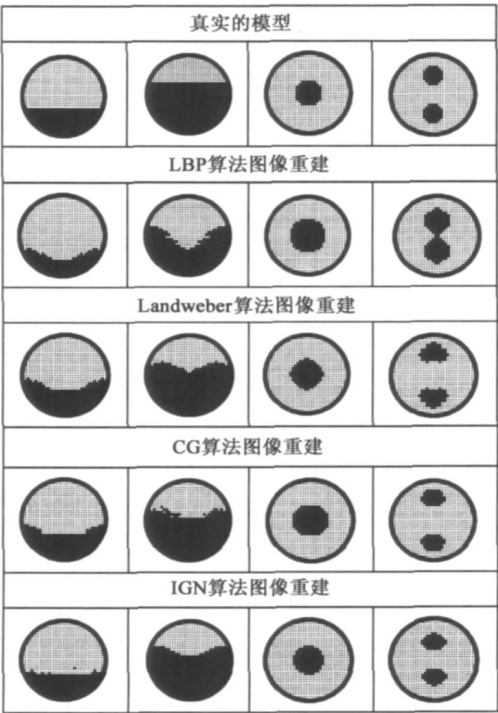
就停止迭代.由于本文IGN算法的收敛速度较快且稳定性好,经大量试验,通常选取十几步(简单模型)到几十步(复杂模型)的迭代就可获得较好的成像质量,在分析重建图像的质量时,选用空间图像误差作为图像质量评价指标,其定义如下:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |g_i(img) - g_i(init)|}{\sum_{i=1}^n g_i(init)} \tag{23}$$

其中, $g_{(img)}$ 为重建图像向量; $g_{(init)}$ 为介质分布原型图像向量; $i$ 为成像区域剖分单元索引; $n$ 为成像区域单元总数.

实验结果如表1(黑色区域是水,白色区域是变压器油).

表1 成像结果的比较



从成像的结果可以看出,对于核心流和层流,LBP算法大体接近原流型,而Landweber、共轭梯度算法和本文IGN算法则十分接近原流型.对于泡状流型,可以看出IGN算法(参数 $\lambda=1$ )的图像效果相对要好,最接近原始流型,且可以减少图像重建时的模糊效应,区分多个物体.而LBP法成像结果与原型相比,位置上有较大的误差,出现了较大的失真如图.表2是重建图像的误差比较,结合表1可以看出,LBP误差最大,IGN算法误差最小.从表3可看出,IGN和Landweber迭代步数相

近,而CG迭代步数最少,但随着流型的复杂性变大,CG和Landweber算法的成像误差也变大.从以上分析可以看出,使用改进Gauss-Newton的图像重建算法,其成像的精度和质量比LBP、Landweber和共轭梯度算法(CG)要好.

表2 图像误差(%)

原型	(a)	(b)	(c)	(d)
LBP	40.32	49.68	86.38	76.92
Landweber	27.22	34.57	45.45	61.53
CG	26.61	38.66	63.63	53.84
IGN	16.53	33.87	27.27	34.61

表3 迭代步数(次)

原型	(a)	(b)	(c)	(d)
LBP	0	0	0	0
Landweber	21	23	15	13
CG	7	9	6	6
IGN	18	20	16	15

5 结论

本文提出了一种改进的Gauss-Newton正则化迭代电容层析成像算法(IGN),在分析Gauss-Newton算法残量误差和ECT逆问题病态性的基础上,采用正则化和加权对其改进,并利用奇异值分解定理对改进的Gauss-Newton算法的稳定性进行了分析和证明.该算法程序编制简单、所需要存储量小、具有成像精度高、易于满足收敛条件等优点.数值实验表明该算法的图像重建质量远远好于LBP算法,好于Landweber和共轭梯度算法(CG),重建的图像更接近原流型,从而为ECT图像重建提供了一个新的有效方法.

未来的研究工作应该重点探索对改进的Gauss-Newton算法对复杂流型的自动辨识问题,并在迭代过程中加入有效的补偿算法,在保证进一步提高精度的同时,尽可能地减少因测量误差对图像重建的影响.

参考文献:

[1] Loser T, Wajman R, Mewes D. Electrical capacitral tomography image reconstruction along electrical field lines[J]. Measurement Science and Technology, 2001, (12): 1083-1091.  
[2] Xie C G, Plaskowski, Beck M S. 8 electrode capacitance system for two component flow identification[J]. Tomographic flow imaging. IEE Proc A, 1989; 136(4): 173-190.  
[3] Warsito W, Fan L S. Measurement of real-time flow structures in gas liquid and gas liquid solid flow systems using electrical capacitance tomography (ECT) [J]. Chemical Engineering Sci

- ence, 2001, 56(6): 6455–6462.
- [4] W q Yang. Modeling of capacitance tomography sensors[J]. IEE Proc. Sci. Meas. Technol, 1997, 144: 203–220.
- [5] K L Ostrowski, S P Luke, R A Williams. Simulation of the performance of electrical capacitance tomography for measurement of dense phase pneumatic conveying[J]. Chemical Engineering Journal, 1997, (6): 8197–8205.
- [6] B T Hjertaker. Static characterization of a dual sensor flow imaging system[J]. Flow Measurement and Instrumentation, 1998, 9: 183–191.
- [7] Liu S, Fu L, Yang W Q. Optimization of an Iterative Image Reconstruction Algorithm for Electrical Capacitance Tomography Mea[J]. Science and Technology, 1999, 10: L37–L39.
- [8] 席少霖, 赵风治. 最优化计算方法[D]. 上海: 上海科技出版社, 1983. 7.  
Xi Shaolin, Zhao Fengzhi. Computation Methods for Optimization[D]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1983. 7. (in Chinese)
- [9] Yang W Q, Peng L H. Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography[J]. Meas Sci Technol, 2003, 14: R1–R3.
- [10] 王化祥, 朱学明, 张立峰. 用于电容层析成像技术的共轭梯度算法[J]. 天津大学学报, 2005, 38(1): 1–4.
- Wang Huaxiang, Zhu Xueming, Zhang Lifeng. Conjugate gradient algorithm for electrical capacitance tomography, Journal of Tianjin University, 2005, 38(1): 1–4. (in Chinese)
- [11] Liu S, Fu L, Yang W Q. Prior online iteration for image reconstruction with electrical capacitance tomography[J]. IEE Proc sci. Meas. Technol, 2004, 151(3): 195–200.
- [12] 赵进创, 傅文利, 李陶深. 电容层析成像图像重建的新算法[J]. 计算机工程, 2004, 30(8): 54–57.  
Zhao Jinchuang, Fu Wenli, Li Taoshen. Image reconstruction new algorithm for electrical capacitance tomography. Computer engineering, 2004, 30(8): 54–57. (in Chinese)

#### 作者简介:



陈德运 男, 1962年6月出生于黑龙江哈尔滨. 博士, 哈尔滨理工大学教授, 博士生导师. 主要研究从事探测与成像技术、图像处理和检测技术与信号处理研究与教学工作.  
E-mail: chendeyun@hrbust.edu.cn

陈宇 男, 1975年2月生, 哈尔滨理工大学博士研究生. 研究方向为图像处理、探测与成像技术、多媒体技术.