

# 基于核邻域保持投影的人脸识别

庞彦伟, 俞能海, 沈道义, 刘政凯

(中国科学技术大学电子工程与信息科学系, 安徽合肥 230027)

**摘 要:** 提出了一种有效的非线性子空间学习方法: 核邻域保持投影. 其主要思想是通过引入线性变换矩阵来近似经典的局部线性嵌入 (LLE), 然后通过核方法的技巧在高维空间里求解. 经过推导, 实际的子空间的计算可归结为标准的特征值分解问题而非推广的特征值分解问题. 在 AR 人脸数据库上的试验表明该方法是有用的.

**关键词:** 人脸识别; 子空间学习; 核方法; 降维

**中图分类号:** TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 08-1542-03

## Kernel Neighborhood Preserving Projections for Face Recognition

PANG Yan-wei, YU Neng-hai, SHEN Dao-yi, LIU Zheng-kai

(Department of EEIS, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China)

**Abstract** An efficient nonlinear subspace learning method, kernel neighborhood preserving projections (KN-PP), is developed. Their main idea is to approximate the classical local linear embedding (LLE) by introducing a linear transformation matrix and then find the solution in a very high dimensional space by kernel trick. The actual computation of the subspace is reduced to a standard eigenvalue problem rather than the generalized one. Experiments on AR face database demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words** face recognition; subspace learning; kernel methods; dimension reduction

### 1 引言

在人脸识别中为了缓解维数灾难, 通常的做法是在高维图像空间里寻找一个合适的低维子空间 (又称脸空间) 来表示人脸. 在过去十几年里出现了许多子空间学习方法<sup>[1]</sup>. 其中最流行的子空间方法是特征脸 (eigenface)<sup>[2]</sup>和 fisherface<sup>[3]</sup>. 它们的基本思想分别是主元分析 (PCA) 和 Fisher 线性判别分析 (LDA).

尽管上述子空间方法在人脸识别中得到了比较成功的应用, 但它们本质上是线性的, 不足以有效地描述人脸图像中诸如光照、表情、和姿态等复杂的非线性变化. 人脸空间更可能是一个非线性子空间. 近来, Roweis 和 Saul<sup>[4]</sup>提出了一种称为局部线性嵌入 (Locally Linear Embedding, 即 LLE). LLE 可以学习到非线性流形的结构. 但是它有一个问题, 不能直接映射新的测试点 (该点不同于训练集合中的任何点). 这个问题称为 out-of-sample 问题<sup>[5]</sup>. 在 LLE 基础上, 我们提出了一种新的基于核子空间的学习方法: 核邻域保持投影. 它可以解决 out-of-sample 问题. 我们首先引入一个线性变换矩阵来近似 LLE. 然后, 通过非线性核技巧在维数很高的空间里求解子空间. 除了对 LLE 进行了直接的推广, 还提出了一种有效地计算 KNPP 的算法, 使最终的子空间计算归结为标准的特征值问题. 与 KPCA (核主元分析)<sup>[6]</sup>和 KDA (核判别分析)<sup>[7]</sup>相比, KNPP 最

大的优点在于它和 LLE 一样具有邻域保持特性.

### 2 KNPP 算法概述

设  $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]$  是由  $D$  维向量组成的数据集. 假设通过非线性映射函数  $\phi: x \rightarrow \phi(x)$  把  $X$  映射到 Hilbert 空间  $F$  中. KNPP 的目的是对  $F$  中的数据点  $\phi(X) = [\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_N)]$  降维, 把它们映射为  $d$  维空间中新的数据点  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]$ , 其中  $d \ll D$ .

**步骤 1** 求出距离每个数据点  $\phi(x_i)$  最近的  $k$  个点. 距离可以通过核矩阵  $K$  来计算. 核矩阵  $K$  的元素为  $K_{ij} = \phi(x_i) \cdot \phi(x_j)$ .

**步骤 2** 通过求解公式 (1) 所示的最小二乘问题, 计算  $x_i$  到它的邻域点之间的最佳重建权重  $W_{ij}$ .

$$J_1(W) = \sum_{i=1}^N \left\| \phi(x_i) - \sum_{j=1}^k W_{ij} \phi(x_j) \right\|^2 \quad (1)$$

上述两个步骤与 LLE 的前两个步骤十分相似, 故其细节在此不再赘述.

**步骤 3** 分解核矩阵  $K$  并计算矩阵  $M$  和  $Q$ :  $K = P \Lambda P^T$ ,  $M = (I - W)(I - W)^T$ ,  $Q = P^T M P$ , 其中  $I$  表示单位矩阵.

**步骤 4** 求解下面的特征值分解问题得到向量  $r_i$ :

$$Q r_i = \lambda_i r_i \quad (2)$$

其中  $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_l$ .

步骤 5 计算向量  $\beta_i$  并对之归一化:

$$\beta_i = P \Lambda^{-1} r_i$$

$$\beta_i \leftarrow \beta_i \setminus \sqrt{\beta_i^T K \beta_i} \quad (3)$$

步骤 6 用下面的公式实现非线性降维

$$y_i^n = \sum_{j=1}^N \beta_j^n K_{ij} \quad (4)$$

其中  $z_i^n$  表示向量  $z_i$  的第  $n$  个元素.

### 3 KNPP的推导

本节给出 KNPP 的部分推导过程. 步骤 4 和步骤 5 的推导见下一节. 需要指出, KNPP 属于核子空间方法. 不同的子空间方法有不同理论出发点和代价函数. 例如 PCA 和 KPCA 是以重建误差最小为准则的, LDA 和 KDA 是以类间距离与类内距离的比值最大为优化目标的. KNPP 有不同的准则. KNPP 是以 LLE 为基础的. 因此, 首先介绍 LLE 的代价函数; 然后在这个代价函数里引入一个线性变换矩阵; 最后为了得到非线性特征, 利用了满足 Mercer 定理的核函数隐式地在高维特征空间中求解.

LLE 的基本思想认为, 如果  $W_{ij}$  能在  $D$  维空间里重建数据点  $i$  则它也可以重建该点在  $d$  维空间中对应的点.  $W_{ij}$  表示  $x_i$  的  $k$  邻域中点  $x_j$  对重建  $x_i$  的贡献 (重建系数). 因此, 最小化下面的代价函数就可以把高维数据  $x_i$  映射为低维向量  $y_i$ :

$$J_2(Y) = \sum_{i=1}^N \|y_i - \sum_{j=1}^k W_{ij} y_j\|^2 = \text{trace}(YMY^T) \quad (5)$$

它的约束项为  $YY^T = I$  (6)

其中  $\text{trace}(\cdot)$  代表对矩阵求迹的算子. 可见 LLE 假设样本流形是局部线性的, 因此具有邻域保持的特性. 这区别与诸如 PCA 的全局重建的方法. KNPP 很好地继承了这一特性.

然而, 由于公式 (5) 表示的代价函数  $J_2$  仅仅依赖于权重  $W_{ij}$ , 输出点  $y_i$  没有显式地与输入点  $x_i$  相关联, 从而导致了所谓的 out of sample 问题 (即不能直接映射训练集之外的点). 为了克服这一问题, 我们把下面的线性变换引入代价函数  $J_2$  中:

$$y_i = A^T x_i \text{ or } Y = A^T X \quad (7)$$

其中  $A = [a_1, \dots, a_d]$ . 于是有

$$J_3(A) = \text{trace}(YMY^T) = \text{trace}[(A^T X) M (A^T X)^T]$$

$$= \text{trace}[A^T (XMX^T) A] \quad (8)$$

s. t

$$A^T M (A^T X)^T = A^T (XX^T) A = I \quad (9)$$

利用 Lagrange 乘子可以求解上述受约束的最小化问题:

$$\mathcal{L}(A) = A^T (XMX^T) A + \lambda (I - A^T XX^T A) \quad (10)$$

使之对于  $A$  的梯度为 0 有

$$(XMX^T) A = \lambda (XX^T) A. \quad (11)$$

也即

$$(XMX^T) a = \lambda (XX^T) a \quad (12)$$

实际上公式 (12) 是 KNPP 的线性形式. 某种意义上, 它的思想与局部保持投影 (LPP)<sup>[8]</sup> 有相似之处. 但与本方法相比, LPP 除了邻域点个数外, 还需要仔细调整额外的参数, 这个参数控制着这两个样本之间的相似性.

现在开始在高维空间  $F$  中研究上述最小化问题. 在式 (12) 中引入非线性映射函数  $\phi$

$$[\phi(X) M (\phi(X))^T] a = \lambda [\phi(X) (\phi(X))^T] a \quad (13)$$

因为特征向量可以用  $F$  中元素的线性组合表示, 所以存在系数  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) 使得

$$a = \sum_{i=1}^N \beta_i \phi(x_i) \quad (14)$$

把式 (14) 代入式 (13) 中并且两边乘以  $[\phi(x_j)]^T$  得到:

$$[\phi(x_j) \cdot \phi(x_1), \dots, \phi(x_j) \cdot \phi(x_N)] M \sum_{i=1}^N \beta_i$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \phi(x_1) \cdot \phi(x_1) \\ \vdots \\ \phi(x_N) \cdot \phi(x_1) \end{bmatrix} = \lambda [\phi(x_j) \cdot \phi(x_1), \dots, \phi(x_j) \cdot \phi(x_N)]$$

$$\cdot \sum_{i=1}^N \beta_i \begin{bmatrix} \phi(x_1) \cdot \phi(x_i) \\ \vdots \\ \phi(x_N) \cdot \phi(x_i) \end{bmatrix} \quad (15)$$

定义核矩阵  $K_{N \times N}$  (它的元素为  $K_{ij} = (\phi(x_i))^T \phi(x_j) = \phi(x_i) \cdot \phi(x_j)$ ) 和向量  $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_N]$ , 上式可写成更紧凑的形式:

$$KMK\beta = KK\beta \quad (16)$$

至此, KNPP 的计算就归结为如上式所示的广义特征值分解问题了.

### 4 从广义特征值分解到标准特征值分解

如果矩阵  $KK$  可逆, 那么公式 (16) 的广义特征值分解问题就可以很容易地转化为标准特征值分解问题了. 这种情况下, 只需在该公式的两边同时乘以逆矩阵  $(KK)^{-1}$ . 不幸地是, 在实际中  $KK$  常常是奇异的, 从而使计算非常不稳定. 为了避免这一问题, 需要在式 (16) 基础上继续推导.

在公式 (16) 两边同乘  $\beta^T$ , 得到

$$\beta^T KMK\beta = \beta^T KK\beta \quad (17)$$

对  $K$  实施特征值分解:

$$K = P \Lambda P^T \quad (18)$$

其中  $P$  是正交矩阵而  $\Lambda$  是对角矩阵. 把式 (18) 代入式 (17), 有

$$(\Lambda P^T \beta)^T P^T M P (\Lambda P^T \beta) = \lambda (\Lambda P^T \beta)^T (\Lambda P^T \beta) \quad (19)$$

其中应用了  $PP^T = I$  这一关系.

进一步地, 令  $r \triangleq \Lambda P^T \beta$  从而  $\beta = P \Lambda^{-1} r$ , 式 (19) 可简化为  $r^T P^T M P r = \lambda r^T r$ . 因此, 下式成立

$$P^T M P r = \lambda r \quad (20)$$

最后定义  $Q \triangleq P^T M P r$ , 于是有:

$$Q r = \lambda r \quad (21)$$

注意到公式 (21) 就是步骤 4 中的公式 (2)。

步骤 5 中对  $B_i$  的归一化用来保证与之对应的向量  $r_i$  在  $F$  空间里归一的。联立式 (7) 和 (14) 就可以得到步骤 6 中的式 (4)。至此, 完成了 KNPP 的所有的推导。

## 5 试验结果

采用 AR 人脸库<sup>[9]</sup>来评测提出的 KNPP 算法。试验中比较了 KNPP 与特征脸 (PCA)、fisherface (LDA)、KPCA 以及 KDA 的识别率。对于所有的方法, 都使它们的参数调整到最佳。试验中均采用了最近邻分类器完成最终分类。

试验选用了 117 个不同人的脸图像。AR 数据库是分两个阶段获取的, 对于每个人, 我们只使用了第一阶段采集的 7 幅非遮挡图像 (如图 1 所示)。从 7 幅图像中随机选取 2 幅放入训练集, 而剩下的 5 幅放入测试集。如此, 重复 5 次, 就得了 5 个不同的训练集和测试集。试验报道的识别率是在这些数据集上的识别率的平均值。



图 1 AR 人脸数据库图像举例

对这些图像按如下方式完成预处理。根据眼睛的位置配准图像, 使得所有图像中的左眼中心和右眼中心都重合。然后把它们裁减并缩放, 最后的尺寸为  $60 \times 60$ 。最后, 对图像归一化使它们具有 0 均值和标准方差。

对于 KPCA、KDA 和 KNPP, 采用高斯核  $K_{ij} = \exp(-\|x_i - x_j\|^2 / (2\sigma^2))$ 。图 2 显示了不同方法的结果。PCA 和 KPCA 的识别率分别为 62.9% 和 63.2%, 表明 KPCA 较之 PCA 的优势并不明显。LDA 和 KDA 的结果则分别为 82.9% 和 85.3%。由于 LDA 和 KDA 同属有监督学习, 它们的性能都显著优于 PCA 和 KPCA。然而, KNPP 的识别率为 89.4%, 比 KDA 还高出 4.1%。尽管 KNPP 属于无监督的子空间学习, 它仍然优于有监督的 LDA 和 KDA。这主要是因为 KNPP 具有很好的邻域保持性。此外, KNPP 通过利用局部信息能刻画复杂的非线性流形, 而其他方法只能描述样本的全局结构, 难以表示复杂的样本分布。KNPP 的这些优点继承于 LLE。

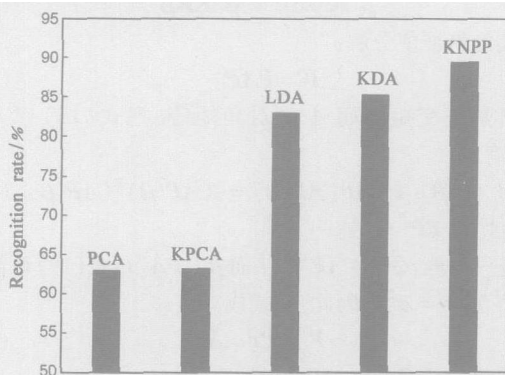


图 2 各种方法的识别率比较

## 6 结论

在 LLE 基础上提出了一种称为核邻域保持投影 (KNPP) 的非线性子空间学习方法。KNPP 是对 LLE 的推广。为了使计算稳定, 我们提出了有效的计算方法, 使子空间的计算可归结为标准的特征值分解问题而非推广的特征值分解问题。和其他子空间方法相比, KNPP 具有很好的邻域保持性质, 使得它具有更好的识别性能。值得指出的是 KNPP 属于无监督学习方法, 为了进一步提高分类性能, 今后将它发展为有监督的方法。

## 参考文献:

- [1] 刘青山, 卢汉清, 马颂德. 综述人脸识别中的子空间方法 [J]. 自动化学报, 2003, 29(6): 900-911  
Liu Q, Lu H, Ma S. A survey Subspace analysis for face recognition [J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(6): 900-911 (in Chinese)
- [2] Turk M, Pentland A. Eigenfaces for recognition [J]. Journal of Cognitive Neuroscience, 1991, 3(1): 71-86
- [3] Belhumeur P, Hespanha J, Kriegman D. Eigenfaces vs. fisherfaces Recognition using class specific linear projections [J]. IEEE Trans PAMI, 1997, 19(7): 771-720
- [4] Roweis S, Saul L. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding [J]. Science, 2000, 290(5500): 2323-2326
- [5] Bengio Y, Palment J, Vincent P, et al. Out-of-sample extensions for LLE, isomap, MDS, eigenmaps and spectral clustering [A]. Neural Information Processing Systems [C]. Cambridge MA: MIT Press, 2003
- [6] Schokopf B, Smola A, Muller K. Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem [J]. Neural Computation, 1998, 10: 1299-1319
- [7] Baudat G, Anouar F. Generalized discriminant analysis using a kernel approach [J]. Neural computation, 2000, 12: 2385-2400
- [8] He X, Yan S, Hu Y, Niyogi P, Zhang H. Face recognition using laplacianfaces [J]. IEEE Trans PAMI, 2005, 27(3): 328-340
- [9] Martinez A, Benavente R. The AR face database [R]. CVC Technical Report # 24. Computer Vision Center (CVC), Barcelona, Spain, 1998

## 作者简介:

庞彦伟 男, 1976 年 10 月生于河北赵县, 2004 年获得中国科学技术大学信号与信息处理专业博士学位, 现为中国科学技术大学博士后, 主要从事模式识别、机器学习及计算机视觉的研究。

E-mail: pyw@ustc.edu.cn

俞能海 男, 1964 年出生于安徽省无为县, 中国科学技术大学教授, 博士生导师, 主要研究方向为视频处理与多媒体通信、信息隐藏与信息安全。