

拉格朗日乘子法在机载 SAR 成像系统 降采样滤波器设计中的应用

徐永健, 姜晓光, 王贞松
(中国科学院电子学研究所, 北京 100080)

摘 要: 根据机载合成孔径雷达(SAR)的成像要求, 本文对降采样滤波器的设计提出了使降采样后将混迭进通带的旁瓣能量与通带能量之比为最小的评价标准. 在对拉格朗日乘子法做了详细的推导后给出了 FIR 滤波器求解的步骤. 通过对利用天线方向图和不考虑天线方向图的两滤波器的比较得出结论: 对于机载 SAR 实时成像系统的降采样滤波器考虑天线方向图的专门设计是必要的.

关键词: 降采样滤波器; 拉格朗日乘子法; 机载 SAR 实时成像系统

中图分类号: TN957.51 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 12-0011-04

Application of Lagrange Method in the Design of Desampling FIR Filter of Airborne SAR Real-time Imaging System

XU Yong-jian, LOU Xiao-guang, WANG Zhen-song
(Institute of Electronics Academia Sinica, Beijing 100080, China)

Abstract: According to airborne SAR imaging requirement we define the minimum ratio of alias energy, which will overlap into passband after desampling, to passband energy as the proper criterion for the design of the desampling filter of the SAR real-time imaging system. After developing Lagrange multiplier algorithm, we provide steps to obtain the optimal desampling FIR filter. With comparing two filters, one takes account effect of the antenna radiation pattern and the other doesn't. We conclude that it is necessary to design a specific desampling filter that includes the effect of the radiation pattern of the antenna.

Key words: desampling FIR filter; Lagrange multiplier algorithm; airborne SAR real-time imaging system

1 引言

降采样滤波器在通讯、声纳、雷达中具有很广的用途. 主要应用于输入信号的带宽高于需处理带宽时. 此时对信号进行降采样处理可以大大减少数据率和数据量, 使实时处理易实现. 在合成孔径雷达实时成像处理器中设有预滤波部分减小采样率; 降低信号带宽. 为克服在频域上的混迭(如图 1). 设计低通滤波器压制非处理带宽的信号能量再降采样从而减小混迭. 对滤波器的设计已经有许多方法, 这些方法都是基于对滤波器不同的评价标准提出的. 切比雪夫判据是经常使用的用来使滤波器频域响应误差最小的滤波器设计方法^[1]. 最小均方误差判据^[2]是使所设计的滤波器与理想滤波器均方误差最小. 而对于合成孔径雷达实时成像处理器的预滤波部分需要在保持成像处理信号带宽的同时使降采样后将混迭到信号带宽内的部分能量最小. 拉格朗日乘子法^[3]即条件极值法是解决这种要求的有效方法. 文[3]中提出了拉格朗日乘子法设计的原理, 但仅对通带内最平坦滤波器作了分析和设计. 实

际上由于雷达天线波束都有一定的方向图, 机载合成孔径雷达回波信号的幅频特性受天线方向图的调制. 本文针对 SAR

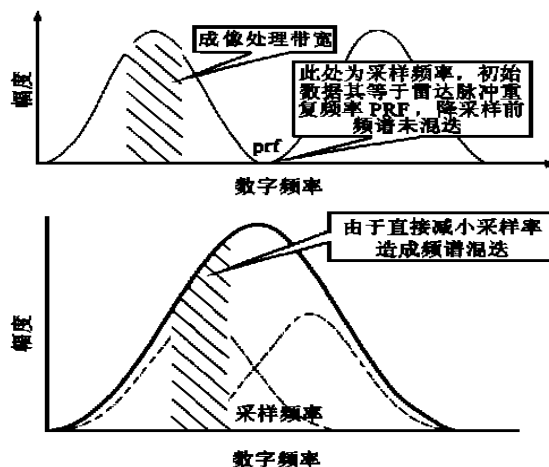


图 1 直接降采样造成频谱混迭

收稿日期: 1999-08-23; 修回日期: 2000-05-22

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 69896250-2)

的实时成像处理器的特点通过拉格朗日乘法对预滤波部分进行了分析和设计,提出了设计方法和步骤,并对实例检验了该方法。

作为数字滤波器的一种,降采样滤波器可分为两类:无限冲击响应滤波器(IIR Infinite Impulse Response Filters)和有限冲击响应滤波器(FIR Finite Impulse Response Filters)。采用 FIR 主要考虑它的几个优点:

- (1) 可通过设计偶对称或奇对称的 FIR 滤波器来得到严格的线性相位,这在相干信号处理系统中是必须的。
- (2) FIR 滤波器是稳定的系统不会自激。
- (3) 可用快速傅氏变换实现信号滤波。

2 FIR 滤波器线性相位的获得

有限冲击响应滤波器是指系统的冲击响应函数 $h(n)$ 是有限序列, $0 \leq n \leq N-1$ 。具有线性相位的 FIR 滤波器的条件是单位响应 $h(n)$ 为实数,且满足式(1)或式(2)

$$\text{偶对称: } h(n) = h(N-1-n) \quad (1)$$

$$\text{奇对称: } h(n) = -h(N-1-n) \quad (2)$$

其对称中心在 $n = (N-1)/2$ 处。这种 FIR 滤波器就具有准确的线性相位^[4]。因而 $h(n)$ 可以有 4 种类型,分别为:(1) $h(n)$ 为偶对称, N 为偶数。(2) $h(n)$ 为偶对称, N 为奇数。(3) $h(n)$ 为奇对称, N 为偶数。(4) $h(n)$ 为奇对称, N 为奇数。其中偶对称是需要的低通滤波器,有两种选择。设 L 为滤波器长度。其幅频响应函数分别为

当 L 为偶数时(类型 1)

$$H_1(e^{jw}) = \sum_{n=1}^{L/2} b(n) \cos((n-1/2)w) \quad (3)$$

$$b(n) = 2h(L/2-n) \quad (4)$$

当 L 为奇数时(类型 2)

$$H_2(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{(L-1)/2} a(n) \cos nw \quad (5)$$

$$a(n) = \begin{cases} h((L-1)/2-n), & n=0 \\ 2h((L-1)/2-n), & n=1 \end{cases} \quad (6)$$

3 机载 SAR 信号处理中降采样滤波器的设计

在机载合成孔径雷达中,需要使用高重复频率的脉冲使方位向采样率高于回波的多普勒带宽,并可由此补偿由于天线口面较小而出现的增益较低的问题从而相应减小发射信号的峰值功率。但方位向成像处理要达到所要求的方位分辨率常只需要使用其带宽的几分之一。因而在方位向进行降采样以节省运算资源和存储空间。能否有效的压低降采样后将混迭进处理频带内的高频部分的能量可作为对滤波器的评价标准。

3.1 频率响应和混迭区能量积分

如果降采样率为 M ,在频域中,降采样后的频率响应输出就是原频率响应的 $M-1$ 次叠加,每个混迭区域的间隔是 $1/M$ 。设降采样滤波器的带宽为 F ,截止频率 F_p 满足:

$$F=2F_p \quad \text{且} \quad 2F_p < 1/M;$$

则滤波器的通带为 $-F_p$ 到 F_p 。混迭区的频率范围为 $i/$

$(M-F_p)$ 到 $i/(M+F_p)$ ($i=1,2,\dots,M-1$),设 $\omega_c = 2F_p$,通带的能量是

$$E_p = \int_{-F_p}^{F_p} |G^2(w) H(e^{jw})|^2 dw/2 \quad (7)$$

式中 $G(\cdot)$ 是天线单程归一化方向图。这里用 $G(\cdot)$ 表示天线方向图是由于在合成孔径雷达中,目标回波的多普勒频移与目标相对于天线的几何位置相关,所以目标回波受天线方向图的调制状况是和其多普勒频移相对应的。

各混迭区的能量和为

$$E_n = \int_{n/(M-F_p)}^{(n+1)/(M+F_p)} |G^2(w) H(e^{jw})|^2 dw/2 \quad (8)$$

为推导方便用矩阵的方式来表示 E_p 和 E_n ,设:

$$X = \begin{cases} [b(1) \quad b(2) \quad \dots \quad b(L/2)]^T, & \text{类型 1} \\ [a(0) \quad a(1) \quad \dots \quad a((L-1)/2)]^T, & \text{类型 2} \end{cases} \quad (9)$$

$$S(w) = \begin{cases} [\cos w/2 \quad \cos 3w/2 \quad \dots \quad \cos((L-1)w/2)]^T, & \text{类型 1} \\ [1 \quad \cos w \quad \dots \quad \cos((L-1)w/2)]^T, & \text{类型 2} \end{cases} \quad (10)$$

FIR 滤波器的响应函数可表示为 $H(e^{jw}) = X^T S(w)$,所以通带的能量是

$$\begin{aligned} E_p &= \int_{-F_p}^{F_p} |G^2(w) H(e^{jw})|^2 dw/2 \\ &= \int_{-F_p}^{F_p} |G^2(w) X^T S(w) S^T(w) X| dw/2 \\ &= X^T \left(\int_{-F_p}^{F_p} |G^2(w) S(w) S^T(w) dw \right) X/2 \end{aligned} \quad (11)$$

各混迭区的能量和为:

$$\begin{aligned} E_n &= \int_{n/(M-F_p)}^{(n+1)/(M+F_p)} |G^2(w) H(e^{jw})|^2 dw/2 \\ &= \int_{n/(M-F_p)}^{(n+1)/(M+F_p)} |G^2(w) X^T S(w) S^T(w) X| dw/2 \\ &= X^T \left(\int_{n/(M-F_p)}^{(n+1)/(M+F_p)} |G^2(w) S(w) S^T(w) dw \right) X/2 \end{aligned} \quad (12)$$

如果认为天线方向图在区间 $n/(M-F_p)$ 到 $n/(M+F_p)$ 近似保持不变则

$$Q_n = G^2(2n/M) \int_{n/(M-F_p)}^{(n+1)/(M+F_p)} S(w) S^T(w) dw \quad (13)$$

为第 n 条混迭区的能量积分矩阵,则混迭区的总能量积分矩阵为

$$Q = \sum_{n=1}^{M-1} Q_n \quad (14)$$

混迭区的总能量为

$$E_n = X^T Q X / (2) \quad (15)$$

同理通带能量积分矩阵为: $G(0) = 1$

$$Q_0 = \int_{-F_p}^{F_p} S(w) S^T(w) dw \quad (16)$$

$$E_p = X^T Q_0 X / (2) \quad (17)$$

对于类型 1 的 FIR 滤波器,由式(10)求解出矩阵 Q_n 中的元素为

$$q_{ij} = G^2(2n/M) \left\{ \frac{\sin[(2i-1)w]}{(2i-1)} \cos[2(n-1)w/M] \right\}, \quad i=j \quad (18)$$

$$q_{nij} = G^2(2n/M) \left\{ \frac{\sin[(i+j-1)]}{i+j-1} \cos[2(i+j-1)n/M] + \frac{\sin[(i-j)]}{i-j} \cos[2(i-j)n/M] \right\}, i \neq j \quad (19)$$

对于类型 2, 矩阵 Q_n 中的元素为

$$q_{nij} = G^2(2n/M) \cdot 2, i = j = 0 \quad (20)$$

$$q_{nij} = G^2(2n/M) \left\{ + \frac{\sin 2i}{2i} \cos[4in/M] \right\}, i = j \neq 0 \quad (21)$$

$$q_{nij} = G^2(2n/M) \left\{ \frac{\sin[(i+j)]}{(i+j)} \cos[2(i+j)n/M] + \frac{\sin[(i-j)]}{(i-j)} \cos[2(i-j)n/M] \right\}, i \neq j \quad (22)$$

因为 Q_n 是第 n 条混迭区的能量积分矩阵, 所以 Q 和 Q_n 都是正定的对称矩阵. 选择向量 X 使通带区的能量为常值而使混迭区的能量最小. 即表示为

$$X^T Q_0 X / (2n) = E_p = \text{const} \quad (23)$$

$$E_n = X^T Q X / (2n) \quad (24)$$

那么向量 X 就是滤波器对应的系数 (1 型为 $b(n)$, 2 型为 $a(n)$). E_p 可任意设定. 通常取 $E_p = 2F_p$ 即滤波器在频率响应函数的通带宽度, 或取 $E_p = L/2$ 为滤波器在时域响应函数的长度的一半.

3.2 使用拉格朗日乘法进行滤波器设计

为解以上讨论的条件极值问题, 使用拉格朗日乘法对向量 X 进行求解. 即在保证 E_p 为常数条件下求 E_n 的极值, 从而确定 FIR 的系数. 设:

$$= X^T Q X / (2n) - (X^T Q_0 X / (2n) - E_p) \quad (25)$$

所以 X 满足:

$$\begin{cases} x = 0 \\ = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (Q - Q_0) X = 0 \\ X^T Q_0 X / (2n) - E_p = 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$= 0 \Rightarrow \begin{cases} X^T Q_0 X / (2n) - E_p = 0 \end{cases} \quad (27)$$

因 Q_0 是正定对称阵, Q_0 的逆阵唯一存在, 用 Q_0^{-1} 表示. 式 (26) 左乘 Q_0^{-1} 得:

$$\begin{cases} (Q_0^{-1} Q - I) X = 0 \\ X^T Q_0 X / (2n) - E_p = 0 \end{cases} \quad (28)$$

再将式 (26) 左乘 X^T 得

$$= \frac{X^T Q X}{X^T Q_0 X} \quad (29)$$

由式 (28) 可知 X 是矩阵 $Q_0^{-1} Q$ 的特征向量. 是对应的特征值且为混迭区能量与通带能量之比. X 的模值由式 (23) 求取.

求 X 向量的过程可归纳如下:

计算矩阵 Q 和 Q_0

计算矩阵 Q_0^{-1}

计算矩阵 $Q_0^{-1} Q$

求 $Q_0^{-1} Q$ 的 M 个特征值和特征向量

因为 是混迭区能量与通带能量之比. 所以由最小

对应的特征向量 X_i^0 求向量 X_i 使其满足式 (27), 即

$$X_i = k_i X_i^0 \quad (30)$$

$$k_i = \sqrt{2 E_p / (X_i^{0T} Q_0 X_i^0)} \quad (31)$$

由 X_i 利用式 (4) 或式 (5) 求出滤波器系数 $h(n)$

由矩阵理论可知, 如果两矩阵互为逆矩阵则这两个矩阵具有相同的特征向量, 而特征值互为倒数. 所以可有另一解法. 对式 (26) 左乘 Q^{-1} 得:

$$\begin{cases} (I - Q^{-1} Q_0) X = 0 \\ X^T Q_0 X / (2n) - E_p = 0 \end{cases} \quad (32)$$

X 是矩阵 $Q^{-1} Q_0$ 的特征向量. 是对应的特征值的倒

数. X 的模值由式 (23) 求取. X 向量的求取过程可归纳如下:

计算矩阵 Q 和 Q_0

计算矩阵 Q^{-1}

计算矩阵 $Q^{-1} Q_0$

求 $Q^{-1} Q_0$ 的 M 个特征值和特征向量

由最大 对应的特征向量 X_i^0 求向量 X_i 使其满足式

(27)

由 X_i 求出滤波器系数 $h(n)$

4 实际设计举例

设计降采样率为 10 的滤波器, 降采样滤波器的长度为两倍的降采样率 $L = 20$, 通带宽度为 1/1.2 输出带宽. 所以

$$M = 10, L = 2M = 20, F = (1/M)/1.2 = 1/12,$$

$$F_p = F/2 = 1/24$$

使用类型 1 的 FIR 滤波器, 由式 (13), (14), (18), (19) 设 $G(\cdot)$ 为 sinc 函数, 其零点与 SAR 雷达的脉冲重复频率 (PRF) 相重合. 经计算 $Q^{-1} Q_0$ 的最大特征值 $\lambda = 220.1050$, 对应的特征向量 X_i^0 为:

$$\begin{bmatrix} 0.4077 & 0.4616 & 0.3514 & 0.4158 & 0.2643 & 0.3470 & 0.1567 \\ 0.2677 & 0.0407 & 0.1903 \end{bmatrix}^T$$

根据式 (30), (31) 得 X_i 为:

$$\begin{bmatrix} 1.9181 & 2.1718 & 1.6533 & 1.9566 & 1.2437 & 1.6328 & 0.7373 \\ 1.2594 & 0.1915 & 0.8956 \end{bmatrix}^T$$

所以得 $h(n)$ 的系数为:

$$\begin{bmatrix} 0.4478 & 0.0958 & 0.6297 & 0.3686 & 0.8164 & 0.6218 & 0.9783 \\ 0.8267 & 1.0859 & 0.9590 & 0.9590 & 1.0859 & 0.8267 & 0.9783 \\ 0.6218 & 0.8164 & 0.3686 & 0.6297 & 0.0958 & 0.4478 \end{bmatrix}$$

滤波器幅频响应函数 (如图 2) 中未考虑天线方向图时的混迭能量比为 0.0059, 考虑天线方向图时的混迭能量比为

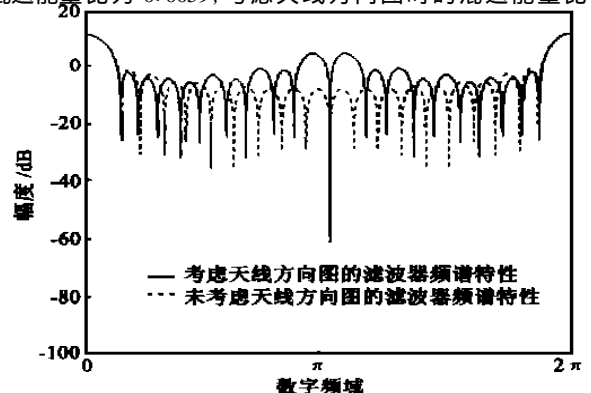


图 2 利用拉格朗日乘法设计的 FIR 滤波器的频域幅度响应

0.0045. 在对点目标的模拟中,用考虑天线方向图滤波器处理的数据所成图像的积分旁瓣比比未考虑的情况提高了 0.6 分贝.图 2 中可见考虑天线方向图时设计出的降采样滤波器其高频部分出现高旁瓣,这是由于利用天线方向图在高频部分的增益下降从而滤波器可牺牲高频部分的抑制换来更好的特性.考虑天线方向图的降采样滤波器优于未考虑的降采样滤波器.

5 结论

本文提供了用拉格朗日乘子法设计机载 SAR 实时成像处理器的降采样预滤波部分的方法和步骤.其使在成像区的信号能量为定值时混迭的能量最小.通过对考虑天线方向图和不考虑方向图设计的两种滤波器的频率响应比较可见在机载 SAR 信号实时成像处理器设计中 SAR 天线的方向图对机载 SAR 回波信号幅频特性的影响是应考虑的.

参考文献:

- [1] J. H. McClellan and T. Parks. A unified approach to the design of optimum FIR linear-phase digital filters [J]. IEEE Trans. Circuit Theory, 1973, CT-20:697 - 701.
- [2] P. P. Vaidyanathan and T. Q. Nguyen. Eigenfilters: A new approach to least-squares FIR filter design and application including Nyquist filters [J]. IEEE Trans. Circuits and Syst. January 1987, CAS-34:11 - 23.

- [3] GREGORY W. MEDLIN, JOHN W. ADAMS and CORNELIUS. LEONDES. Lagrange Multiplier Approach to the Design of Fir Filters for Multirate Applications [J]. IEEE Trans. Circuits and Syst., October 1988, 35(10):1210 - 1219.
- [4] 程佩青. 数字信号处理教程 [M]. 清华大学出版社, 1995.

作者简介:



徐永健 1973 年生,博士研究生,IEEE 学生会员,主要从事 SAR 并行成像算法、通信与遥感、SAR 实时成像处理器方面的研究.



姜晓光 工程师,IEEE 会员,主要从事 SAR 实时成像算法、遥感图像处理、实时嵌入式系统方面的研究.

王贞松 1945 年生,研究员,博士生导师,IEEE 会员.主要从事无线电物理、微波遥感技术、合成孔径雷达成像系统方面的研究.

(上接第 18 页)

- [3] A. J. Belman. On using orthogonally polarized receiving channels to detect target echoes in gaussian noise [J]. IEEE Trans A. E. S., AES-11, 1975.
- [4] D. P. Stapor. Optimal receive antenna polarization in the presence of interference and noise [J]. IEEE Trans., May 1995, AP-43 (5):473 - 477.
- [5] A. J. Belman, J. R. F. Guy. Multinotch logic-product polarization suppression filters: A typical design example and its performance in a rain clutter environment [J]. 1984, Proc. IEE, pt. F, 131(4):383 - 396.
- [6] 王雪松, 庄钊文等. 极化信号的优化接收理论: 完全极化情形 [J]. 电子学报, 1998, 26(6):42 - 46.
- [7] 王雪松, 庄钊文等. 极化信号的优化接收理论: 部分极化情形 [J]. 电子科学学刊, 1998, 20(4):468 - 473.
- [8] 阮颖铮等编著. 雷达截面与隐身技术 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- [9] 《数学手册》编写组. 数学手册 [S]. 北京: 高等教育出版社, 1979.