

蔡氏混沌电路的单向耦合同步研究

蒋国平, 王锁萍

(南京邮电学院电子工程系, 南京 210003)

摘要: 基于 Lyapunov 稳定性理论, 利用单向耦合方法, 研究蔡氏电路混沌同步问题, 指出蔡氏电路相互耦合同步存在的缺陷, 通过仿真验证本文的结果。

关键词: 蔡氏电路; 混沌同步; 单向耦合

中图分类号: TN901 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 01-0067-03

The Synchronization of Chua's Circuits Based on Unidirectionally Coupled Method

JIANG Guo-ping, WANG Suo-ping

(Department of Electronic Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract: Based on Lyapunov theorem and unidirectionally coupled method, the synchronization of Chua's Circuits is studied, and the problems of the current mutual coupled methods are pointed out. Finally, the results of this paper are verified by simulation.

Key words: Chua's circuit; chaotic synchronization; unidirectionally coupled method

1 引言

近年来,混沌同步问题得到了广泛的重视与研究,因为混沌同步在保密通信、扩频通信等领域显示了良好的应用前景^[1-5]. 1990年,美国海军实验室专家 Pecora 和 Carroll 提出了混沌同步概念及其驱动——响应方法^[1,2],他们将系统分成两个子系统,即驱动子系统(D系统)和响应子系统(R系统),然后对响应子系统进行复制,并用驱动子系统产生的信号驱动该复制的系统.文献[3]设计了一种利用蔡电路产生的混沌信号作为伪信号并利用驱动——响应方法进行同步的保密通信系统.但是对于某些实际的非线性系统,由于物理本质或天然特性等原因,系统无法分解为两个子系统,这时驱动——响应方法也就无能为力了. Wu、Chua 推广了 Pecora、Carroll 的同步概念^[4],定义驱动和响应系统具有同一函数形式,为了使系统同步,要求误差动力学系统是线性且稳定的.后来,许多学者利用子系统之间的相互耦合以实现混沌同步.目前主要考虑的是线性耦合的情形^[5].最近, Wu 和 Chua 对此作了较为一般的分析^[6].他们的结果从理论上证明了,子系统之间的足够强的耦合,能够使得各个子系统的轨线趋于同步.文[5, 10, 11]中利用相互耦合方法使得两个蔡氏混沌电路同步.但是,由于两个蔡氏电路的相互耦合作用,使得原蔡氏电路发生了变化,这样就改变了原系统的混沌特性,另外,上述文献中的有关结论存在问题.文献[7]提出了混沌同步的一种误差反馈技术,利用系统反馈控制方法,使得两个混沌系统同步.实际上误差反馈技术只是耦合方法的一种特例或一种实现形式.文献[8,9]利用自适应控制方法,研究混沌系统同步问题.由

于自适应控制方法,尤其是模型参考自适应方法过分依赖于系统模型,这就给实际应用带来困难.

本文利用单向耦合方法,研究蔡氏电路混沌同步问题,分析并指出相互耦合方法存在的问题.全文安排如下:第二节介绍蔡氏电路单向耦合同步方法,第三节分析并指出相互耦合方法的问题;第四节为仿真研究;最后是结论.

2 单向耦合混沌同步方法

蔡氏混沌电路^[11]的无量纲方程 $\dot{X} = F(X)$ 如下

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha[y - x - f(x)] \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (1)$$

其中 $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, F(X) = \begin{bmatrix} \alpha[y - x - f(x)] \\ x - y + z \\ -\beta y \end{bmatrix} \quad (2)$

$f(x) = bx + (1/2)(a - b)(|x + E| - |x - E|) \quad (3)$
 $\alpha > 0, \beta > 0, E > 0, a < b < 0$ 为待定常数,由式(3)可知, $f(x)$ 为三段线性函数,斜率为 a 和 b .有关变量和参数的物理意义见文[10, 11].

将发送端蔡氏电路的状态耦合到接收端的蔡氏电路,则可得接收端的蔡氏电路方程如下.

$$\begin{cases} \dot{x}' = \alpha[y' - x' - f(x')] + \delta_x(x - x') \\ \dot{y}' = x' - y' + z' + \delta_y(y - y') \\ \dot{z}' = -\beta y' + \delta_z(z - z') \end{cases} \quad (4)$$

收稿日期: 1998-09-29; 修订日期: 1999-02-06

基金项目: 邮电部重点科技发展基金(No. 98042)资助课题

由式(4)可得

$$X' = F(X') + G(S(X) - S(X')) \quad (5)$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} \delta_x & 0 & 0 \\ 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 0 & \delta_z \end{bmatrix}, S(X) = X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, S(X') = X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (6)$$

从上可知,只要选择合适的 G ,使得 $X' \rightarrow X$,则式(4)和式(1)所示的两个混沌系统同步。

实际应用中,为了参数调整简单方便起见,一般只取一个变量进行耦合^[11]。例如,取 x 作为耦合变量,此时 $\delta_y = \delta_z = 0$,下面给出参数 δ_x 选择方法。

定理 1 设 $\delta_y = \delta_z = 0$,若 $a \cdot \alpha + \delta_x > 0$,并且初始条件 $X(0), X'(0)$ 位于相同的吸引域,则在由式(1)、(4)组成的系统的相位空间 R^6 内,子流形 $\{x, y, z, x', y', z': x = x', y = y', z = z'\}$ 是稳定的, $X' \rightarrow X$ 。

证明 由式(1)、(4)可得误差方程:

$$\begin{cases} \dot{p} = \alpha \cdot q - \alpha \cdot p - \alpha[f(x) - f(x')] - \delta_x p \\ \dot{q} = p - q + r - \delta_y q \\ \dot{r} = -\beta \cdot q - \delta_z r \end{cases} \quad (7)$$

其中 $p = x - x', q = y - y', r = z - z'$ 。

由于 $f(x)$ 为分段线性连续函数,斜率分别为 a 和 b ,因此 $a(x - x') \leq f(x) - f(x') \leq b(x - x')$ (8)

由式(8),设

$$f(x) - f(x') = k(x - x') \quad (9)$$

其中 k 为时变参数,且 $a \leq k \leq b$ 。则式(7)变为下列变参数线性系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\text{其中矩阵 } A = \begin{bmatrix} -\alpha - k\alpha - \delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - \delta_y & 1 \\ 0 & -\beta & -\delta_z \end{bmatrix}$$

由于 $\delta_y = \delta_z = 0$,则误差方程变为

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha - k\alpha - \delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (11)$$

选取 Lyapunov 函数

$$E(e, t) = \beta \cdot p^2 + \alpha\beta \cdot q^2 + \alpha \cdot r^2 \quad (12)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{E}(e, t) &= 2\beta p\dot{p} + 2\alpha\beta q\dot{q} + 2\alpha r\dot{r} = 2\beta p((- \alpha - k\alpha - \delta_x)p + \alpha q) + \\ &2\alpha\beta q(p - q + r) + 2\alpha r(-\beta q) = -(2k\alpha + 2\delta_x)\beta p^2 - 2\alpha\beta p^2 + \\ &4\alpha\beta pq - 2\alpha\beta q^2 = -2(k\alpha + \delta_x)\beta p^2 - 2\alpha\beta(p - q)^2 \end{aligned}$$

由于 $a \leq k \leq b$,因此,若 $a \cdot \alpha + \delta_x > 0$,则 $k \cdot \alpha + \delta_x > 0$, $\dot{E}(e, t) < 0$ 。由 Lyapunov 稳定性定理^[12,13],可知式(11)零解稳定,亦即系统同步。定理得证。

如果取 y 或 z 作为耦合变量,仿照上述方法同样可以给出 δ_y 和 δ_z 的选取方法,在此不再赘述。

3 相互耦合方法的问题分析

本节分析文[10,11]中的相互耦合方法存在的问题。该方法简介如下:

将发送端和接受端的蔡氏电路的状态互相耦合,得发送端和接受端的蔡氏电路方程如下。

$$\text{发送端} \begin{cases} \dot{x} = \alpha[y - x - f(x)] + \delta_x(x' - x) \\ \dot{y} = x - y + z + \delta_y(y' - y) \\ \dot{z} = -\beta y + \delta_z(z' - z) \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{接受端} \begin{cases} \dot{x}' = \alpha[y' - x' - f(x')] + \delta_x(x - x') \\ \dot{y}' = x' - y' + z' + \delta_y(y - y') \\ \dot{z}' = -\beta y' + \delta_z(z - z') \end{cases} \quad (14)$$

欲使式(13)和(14)所示的两个系统同步,需要选择合适的 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 。为此,给出如下结果^[10,11]。

引理 若存在 $\delta_1, \delta_2 \in R$,使得对于 $\delta_1 < \delta < \delta_2$,下列矩阵

$$\begin{bmatrix} -\alpha - a \cdot \alpha - 2\delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - 2\delta_y & 1 \\ 0 & -\beta & -2\delta_z \end{bmatrix} \quad \text{和}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha - b \cdot \alpha - 2\delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - 2\delta_y & 1 \\ 0 & -\beta & -2\delta_z \end{bmatrix}$$

的特征根实部为负,并且初始条件 $X(0), X'(0)$ 位于相同的吸引域,则对于所有 $\delta_1 < \delta < \delta_2$,在系统(13)、(14)的相位空间 R^6 内子流形 $\{x, y, z, x', y', z': x = x', y = y', z = z'\}$ 是稳定的。其中 δ 表示 δ_x, δ_y 或 δ_z 。

文[11]给出了该引理的证明,其证明过程存在问题。现说明如下:

文[11]利用了下列公式

$$f(x) - f(x') = f'(\eta)(x - x'), f'(\eta) = a \text{ 或 } b \quad (15)$$

事实上, $f(x)$ 为分段线性函数,在 $x = +1$ 和 -1 处不可导,因此,式(15)是有问题的,正确的形式应为式(9)。

另外,该文利用“系统矩阵的特征根实部为负,则系统稳定”来证明上述引理。实际上,“系统矩阵的特征根实部为负,则系统稳定”只对定常线性系统才成立,对于变系数的线性系统该结论一般不成立^[12,14]。

实际应用中,为了方便起见,一般只进行一对变量耦合(例如 x, x' ,此时 $\delta_y = \delta_z = 0$),因此,只要调节一个耦合参数 δ_x 即可,为此,文献[10,11]给出了 x 耦合系统的 δ_x 的选取准则及其推导过程,其推导过程中存在上述同样的问题。

为了改正文[10,11]中的缺点,利用 Lyapunov 方法给出了 x 耦合系统的 δ_x 的选取方法如下。

定理 2 设 $\delta_y = \delta_z = 0$,若 $\alpha\alpha + 2\delta_x > 0$,并且初始条件 $X(0), X'(0)$ 位于相同的吸引域,则在由式(13)、(14)组成的系统的相位空间 R^6 内,子流形 $\{x, y, z, x', y', z': x = x', y = y', z = z'\}$ 是稳定的, $X' \rightarrow X$ 。

另外,从上可知,由于两个蔡氏电路的相互耦合,使得发送系统(式(1))的结构和参数发生变化(式(13)),这样就改变了发送端蔡氏混沌电路的性质。一般情况下,不希望改变发送

系统,而只希望通过调节接受系统参数使得接受系统与发送系统同步。

4 仿真研究

选蔡氏电路参数为 $a = 9.78, \beta = 14.97, \alpha = -1.31, b = -0.75, E = 1, \delta_x = 20, \delta_y = \delta_z = 0$ 。由于 $a + \delta_x > 0$, 因此,式(1)、(4)所示的两个蔡氏电路同步。仿真结果如图 1 所示。其中,图 1(a)为蔡氏电路产生的混沌信号,图 1(b)、(c)为蔡氏电路混沌吸引子,图 1(d)为两个蔡氏电路同步信号的李萨育图形。

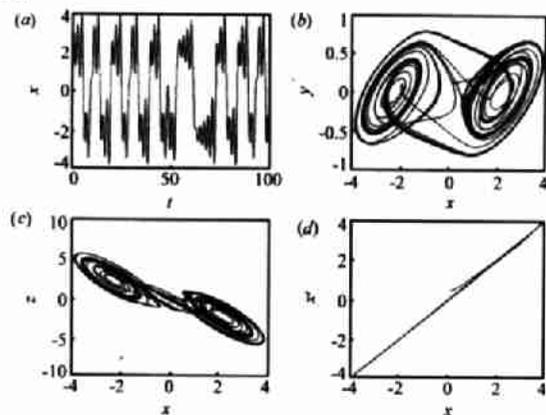


图 1 蔡氏电路混沌信号及其同步仿真图形

5 结论

本文提出的蔡氏电路单向耦合同步方法解决了相互耦合同步方法存在的问题,结构简单明了,易于使用。

参考文献

- [1] Pecora L M, Carroll L T L. Synchronization in chaotic circuits. Phys. Rev. Lett., 1990, 64(8): 821 ~ 824
- [2] Pecora L M, Carroll L T L. Driving systems with chaotic signals. Phys. Rev. A, 1991, 44(4): 2374 ~ 2378
- [3] Hays S, Grebogi C and Ott E. Communicating with chaos. Phys. Rev. Lett., 1993, 70: 3031 ~ 3034
- [4] Wu C. W., Chua L O. A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems. Int. J. Bifurcation chaos, 1993, 3(6): 1619 ~ 1627

- [5] Ogorzalek M J. Taming chaos-Part 1: Synchronization. IEEE Trans. Circuit System, 1993, 40(10): 693 ~ 699
- [6] Wu C. W., Chua L O. Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. IEEE Trans. Circuits Syst., 1995, 42(8): 430 ~ 447
- [7] John J K, Amirthar R E. Synchronization by feedback and adaptive control. Int. J. Bifurcation chaos, 1994, 6: 1687 ~ 1695
- [8] Wu C. W., et al. On adaptive synchronization and control of nonlinear dynamical systems. Int. J. Bifurcation Chaos, 1996, 6(3): 455 ~ 461
- [9] Yang L B and Yang T. Synchronization of Chua's circuits with parameter mismatching using adaptive model-following control. Chinese Journal of Electronics, 1997, 6(1): 90 ~ 96
- [10] 钟国群. 蔡氏电路混沌保密通讯. 电路与系统学报, 1996, 1(1): 19 ~ 29
- [11] Chua L. O., Itoh M, Kocarev L. and Eckert K. Chaos synchronization in Chua's circuits. J. of Circuits, Systems and Computers, 1993, 3(1): 93 ~ 108
- [12] 许淞庆. 常微分方程稳定性理论. 上海: 上海科学技术出版社, 1961
- [13] Jordan D. W. and Smith P., Nonlinear ordinary differential equations. New York: Oxford University Press, 1987
- [14] 王照林. 运动稳定性及其在应用. 北京: 高等教育出版社, 1992



蒋国平 33岁,博士,副教授。1997年在东南大学自动化研究所获自动控制理论与应用专业博士学位,现在南京邮电学院电子工程系任教。主要从事线性系统、非线性系统、混沌系统及其在通信中的应用等研究工作。



王镇萍 53岁,南京邮电学院电子工程系主任,教授。1970年毕业于清华大学无线电系,1981年在南京邮电学院通信与电子系统专业获工学硕士学位。目前主要从事通信与电子系统、信息与信号处理、计算机应用等研究工作。

(上接第 80 页)

- [11] G. A. Carpenter. A geometric approach to singular perturbation problems with application to nerve impulse equations. J. Diff. Equis. 1977, 23(3): 355 ~ 367
- [12] J. W. Evans. Nerve Axon Equis. II: Stability at Rest. Indiana Univ. Math J. 1972, 22(1): 75 ~ 90