雷达目标互易性的 Frobenius 范数修正法

王雪松,李永祯,徐振海,肖顺平
(国防科技大学电子科学与工程学院,长沙 410073)

摘 要: 针对雷达目标互易性修正问题,研究了目标极化散射矩阵的 Frobenius 范数修正法. 阐述了 Frobenius 范数修正法的物理涵义和应用背景,利用拉格朗日乘子法研究了 Frobenius 修正散射矩阵的求解问题,证明了其与 Cameron 修正散射矩阵相差一个正标量因子,同时证明了 Frobenius 范数修正法的局部最优性和唯一性,最后通过仿真实验比较了两种修正算法的性能,验证了文中的结论.

关键词: 目标; 极化散射矩阵; 互易性修正; Frobenius 范数修正法
中图分类号: TN957.51 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2000) 03-0039-04

Frobenius Norm Correction Algorithm on Radar Target's Reciprocity

WANG Xue-song, LI Yong-zhen, XU Zhen-hai, XIAO Shun-ping
(*School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha* 410073, *China*)

Abstract: Frobenius norm correction algorithm on target's polarization scattering matrix is studied in connection with radar target's reciprocity correction. The physics and application background of Frobenius norm correction algorithm are stated. Frobenius corrected matrix is achieved by using the Lagrange Multiplier Method. It's shown that there is a little difference of a positive scalar factor between Frobenius corrected scattering matrix and the optimal Cameron corrected ones. The Frobenius algorithm is proved to be a local optimal algorithm with the Frobenius corrected matrix being unique. Finally, characteristics of two kinds of correction algorithm are compared by experiment and conclusions in this paper are verified.

Key words: target; polarization scattering matrix; correction on reciprocity; Frobenius norm correction algorithm

1 引言

在单静态条件下,线性雷达目标在特定观测状态下的相干极化散射特性可以用一个 2 阶复数矩阵予以完全地表征,这个复矩阵称为目标的 Sinclair 极化散射矩阵,它充分地描述了目标作为极化变换器的变极化效应[1]. 根据互易原理可知,在均匀、各向同性的传播介质中,线性目标的极化散射矩阵是一个对称矩阵[2]. 然而目标极化散射测量实验表明[3,4,6,7],通常情况下目标的实测极化散射矩阵都是非对称的,这意味着目标的互易性在测量过程中受到了破坏. 究其原因,主要有以下几个影响因素:首先,一般情况下的散射测量都是在准远场条件下进行的,这时目标处的入射波和接收天线处的散射波都不能视为严格的平面波;其次,大多数测量系统采用收发隔离天线,难以保证严格的单站条件;再次,由于极化散射矩阵测量系统的两个正交极化通道之间、以及收发天馈系统之间的幅相特性很难做到完全一致,即使经过校准以后,仍会引入不容忽视的幅相误差,特别是在高频和宽带测量条件下,测量系统幅相误差的影响变得尤为突出. 此外,在一般的极化散射矩阵测量过程中,除互易性以外,我们对于目标极化散射矩阵的其他先验信息几乎一无所知,对于复杂目标尤为如此,因此在对实测散射矩阵进行修正时,目标的互易性修正就成为必不可少的重要步骤.

迄今为止,关于目标互易性修正问题的研究成果很少见到报道. W.L. Cameron 在研究目标分解问题时提出了一种平均修正法[3],即以散射矩阵的对称分量作为真实散射矩阵的估计. 尽管 Cameron 修正法步骤简单,但是可以证明,在相当广泛的意义上 Cameron 修正法是目标互易性的最优修正算法[5]. 文献[4]在研究基于伪本征极化的目标识别的过程中,提出了目标互易性修正的 Frobenius 范数法,其核心思想是基于散射矩阵的能量不变性假设,寻求一个使误差矩阵 Frobenius 范数达到最小的对称散射矩阵. 正如下面将要阐明的,从数学意义上讲,Frobenius 范数修正法是一个局部最优算法,但是在一些特定的测量条件下,它的修正结果要优于 Cameron 修正法. 本文将详细地研究目标互易性修正的 Frobenius 范数法,阐述其物理涵义和应用背景,讨论它与 Cameron 修正法的关系,并证明它的局部最优性和唯一性.

收稿日期:1998-07-05;修订日期:1999-10-10
基金项目:国家自然科学基金(No.69772032)资助课题

2 目标互易性 Frobenius 范数修正法的物理涵义及其拉格朗日解法

2.1 目标互易性 Frobenius 范数修正法的物理涵义及应用背景

对于大多数极化散射测量系统,特别是微波暗室测量系统,通常都采用收、发隔离体制,这对天线系统的极化正交性以及收发天馈系统之间的极化一致性提出了很高的要求.换言之,在发射或接收过程中,不但要求两个正交极化天线具有很好的极化隔离度,同时还要求收、发正交极化天线之间具有良好的一致性.但是在实际情况中,这两个条件通常是难以得到严格满足的[2,7].

假设待测目标在给定观测条件下的散射矩阵为 $S(HV)$,其为在水平、垂直极化基 $(\hat{h},\hat{v})$ 上测量得到.设实际测量系统的一对发射正交极化矢量为 h_{t1} 和 h_{t2},它们与真实的水平、垂直极化基 $\hat{h}$、$\hat{v}$ 之间的过渡关系为

$$(h_{t1}, h_{t2}) = \left(\hat{h}, \hat{v}\right) U_t$$

其中 U_t 为一个满秩复阵.若假设 h_{t1} 与 h_{t2} 之间的正交程度足够好,且均具有单位增益,那么 U_t 近似地为一个酉矩阵,特别地,当 $U_t = I_2$ 时(I_2 为 2 阶单位阵),h_{t1} 和 h_{t2} 就成为 $\hat{h}$ 和 $\hat{v}$.类似地,假设接收天线系统的一对正交极化矢量为 h_{r1} 和 h_{r2},其满足

$$(h_{r1}, h_{r2}) = \left(\hat{h}, \hat{v}\right) U_r$$

其中 U_r 为酉矩阵.

在实际的极化测量系统中,收、发天馈系统之间的幅相特性很难做到完全一致,特别是在高频和宽带测量条件下,这种不一致程度尤为严重.这就意味着,在目标极化散射矩阵的真实测量过程中,收、发天馈系统所用的极化基通常是不同的,换言之,即 $U_t \neq U_r \neq I_2$.根据散射矩阵的测量方程[8],不难写出实测目标散射矩阵为

$$S = [h_{r1}\quad h_{r2}]^T S(HV)[h_{t1}\quad h_{t2}] = U_r^T S(HV) U_t \tag{1}$$

由此式可以看出,尽管 $S(HV)$ 是一个对称矩阵,但是由于收、发天馈系统所用极化基的不一致性,使得实测的散射矩阵 S 变为非对称的,也就是说破坏了目标的互易性.在这种情况下,若要进行目标互易性修正,那么除了已知 $S(HV)$ 的对称性以外,还必需考虑式(1)带来的限制条件.通常情况下,收、发天馈系统正交极化矢量与水平、垂直极化基之间的过渡矩阵 U_r 和 U_t 是未知的(尽管它们未必是由偶然误差造成的),但是注意到,

$$\|S\|_F = \|U_r^T S(HV) U_t\|_F = \|S(HV)\|_F$$

上式表明,实测散射矩阵与真实散射矩阵的 Frobenius 范数是相等的,因此在修正过程中,还应当使修正散射矩阵与实测散射矩阵具有相等的 Frobenius 范数.

设目标的修正散射矩阵为 $\hat{S}$,则目标互易性的 Frobenius 范数修正法可以用如下的一个带约束最优化问题来描述:

$$\min f = \|\hat{S} - S\|_F^2 \tag{2}$$

$$s.t. \begin{cases} \|\hat{S}\|_F = \|S\|_F \\ \hat{S}^T = \hat{S} \end{cases}$$

我们知道,散射矩阵的 Frobenius 范数在物理意义上对应着目标在一对正交极化波照射下后向散射回波的总的能流密度,因而 Frobenius 范数修正法的物理涵义即为:在对称复矩阵空间中寻找一个与实测散射矩阵能量(Frobenius 范数)相等、且与之误差能量最小的点,以之作为真实散射矩阵的估计.

2.2 Frobenius 范数修正法的拉格朗日解法

我们知道,一个 2 阶复矩阵中包含 8 个实变量,可以将其张成一个 8 维实矢量,这个矢量与原矩阵是一一对应的.具体张成方法很多,本文采用如下方法:设实测得到的变质极化散射矩阵为 $S \in C^{2\times2}$,记为

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\, s_{11} + j\mathrm{Im}\, s_{11} & \mathrm{Re}\, s_{12} + j\mathrm{Im}\, s_{12} \\ \mathrm{Re}\, s_{21} + j\mathrm{Im}\, s_{21} & \mathrm{Re}\, s_{22} + j\mathrm{Im}\, s_{22} \end{bmatrix}$$

定义 8 维实矢量

$X = [\mathrm{Re}\, s_{11}, \mathrm{Im}\, s_{11}, \mathrm{Re}\, s_{22}, \mathrm{Im}\, s_{22}, \mathrm{Re}\, s_{12}, \mathrm{Im}\, s_{12}, \mathrm{Re}\, s_{21}, \mathrm{Im}\, s_{21}]^T$,显然 X 与 S 是一一对应的.事实上,X 与 S 的对应关系构成了 2 阶复矩阵空间 $C^{2\times2}$ 与 8 维实矢量空间 R^8 之间的一一映射[5],可以证明 $\|S\|_F = \|X\|$,也就是说,$C^{2\times2}$ 中的 Frobenius 范数与 R^8 中的欧氏范数是等价的.利用这个等价映射关系,可以将 $C^{2\times2}$ 中的散射矩阵修正问题变换到 R^8 空间中进行.容易证明,$C^{2\times2}$ 空间中的对称矩阵集合(记为 $C_S^{2\times2}$)在 R^8 中映射为一个线性子空间 R_S^8.

如果将 $C^{2\times2}$ 空间中的 2 阶散射矩阵投影到 R^8 空间中,则 Cameron 修正问题可以用 R^8 空间中的矢量语言描述为[5]:对 $C^{2\times2}$ 空间中的任意一个实测散射矩阵 S,其在 R^8 空间中的映象为 X,S 的 Cameron 修正散射矩阵为 $S_C = (S + S^T)/2$,其中在 R^8 空间中的映象为 X_C,则 X_C 是 X 在 R_S^8 空间的正交投影.下面就来讨论 Frobenius 范数修正法的建模与求解问题.

记目标互易性修正散射矩阵为

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} \\ \hat{s}_{21} & \hat{s}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\hat{s}_{11} + j\mathrm{Im}\,\hat{s}_{11} & \mathrm{Re}\,\hat{s}_{12} + j\mathrm{Im}\,\hat{s}_{12} \\ \mathrm{Re}\,\hat{s}_{21} + j\mathrm{Im}\,\hat{s}_{21} & \mathrm{Re}\,\hat{s}_{22} + j\mathrm{Im}\,\hat{s}_{22} \end{bmatrix},$$

注意到目标互易性修正散射矩阵应为对称矩阵,即应有 $\mathrm{Re}\,\hat{s}_{12} = \mathrm{Re}\,\hat{s}_{21}$,$\mathrm{Im}\,\hat{s}_{12} = \mathrm{Im}\,\hat{s}_{21}$,因而修正散射矩阵只有 6 个实变量,这样也可以将 $C^{2\times2}$ 中的散射矩阵修正问题变换到 R^6 空间中进行.具体地,记

$$Y = \left[\mathrm{Re}\,\hat{s}_{11}, \mathrm{Im}\,\hat{s}_{11}, \mathrm{Re}\,\hat{s}_{22}, \mathrm{Im}\,\hat{s}_{22}, \mathrm{Re}\,\hat{s}_{12}, \mathrm{Im}\,\hat{s}_{12}\right]^T$$

则式(2)给出的带约束最优化模型可以转化为

$$\min f = \|MY - X\|^2$$

$$s.t.\ g = \|MY\|^2 - \|X\|^2 = 0 \tag{3}$$

其中 M 为一个 8×6 实矩阵,

$$M = \begin{bmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}, \quad E = [I_2\quad I_2]^T,$$

$\|\cdot\|$ 代表 R^8 空间中的欧氏范数.下面应用拉格朗日乘子法来求解式(3)的带约束最优化问题.

根据式(3)构造拉格朗日函数

$$L(Y, \mu) = f + \mu g,$$

其中 μ 为拉格朗日乘子.对上式求关于 Y 的一阶导数并令其为零,得到

$$Y=\lambda(M^TM)^{-1}M^TX,$$

这里 λ 为等效拉格朗日乘子,$\lambda=1/(1+\mu)$. 将上式代入式(3)的约束条件中,即可解得:

$$\lambda_{1,2}=\pm\|M(M^TM)^{-1}M^TX\|^{-1}\|X\|,$$
$$Y_{1,2}=\lambda_{1,2}(M^TM)^{-1}M^TX,$$

$Y_{1,2}$ 即为该约束极值问题的两个 Kuhn-Tucker 点[9]. 进一步地,求解拉格朗日函数在 (Y_1,λ_1) 和 (Y_2,λ_2) 处的二阶导数,得到

$$\nabla^2L(Y_j,\lambda_i)=\frac{1}{\lambda_i}M^TM,\ i=1,2$$

注意到 f、g 皆为 R^6 空间上二次连续可微实函数,且 M^TM 为正定矩阵,故知 λ_1(对应着正号者)和 Y_1 为原约束最优化问题的全局最优解.

将 M 矩阵的表达式以及 X 与 S 的对应关系代入 λ_1 的表达式中不难解得

$$\lambda_1=\|S_C\|_F^{-1}\|S\|_F,\tag{4}$$

相应地得到 Frobenius 范数修正散射矩阵为

$$S_F=\frac{\|S\|_F}{\|S_C\|_F}S_C=\lambda_1S_C\tag{5}$$

由此式可见,Frobenius 范数修正散射矩阵与 Cameron 修正散射矩阵相差一个正标量因子.

3　Frobenius 修正散射矩阵的唯一性和局部最优性

下面将要证明,Frobenius 修正散射矩阵 S_F 是式(2)给出的带约束最优化问题的唯一解,也就是说,对任意一个实测散射矩阵,其 Frobenius 修正散射矩阵是唯一的.

用反证法. 反设存在一个矩阵 S_0,它也是问题(2)的一个解,并且 $S_0\neq S_F$. 下面我们将这一问题的证明等价地变换到 8 阶实矢量空间 R^8 中进行.

由式(5)可知 S 的 Frobenius 修正散射矩阵为 $S_F=\lambda_1S_C$,则它在 R^8 空间中的映象为

$$X_F=\lambda_1X_C\tag{6}$$

显然 $X_F\in R_S^8$,即有 $X_F=AX_F$,这里 A 为一个 8 阶实矩阵,

$$A=\begin{bmatrix}I_4&0\\0&D\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0&I_2\\I_2&0\end{bmatrix},$$

记所有与 S 的 Frobenius 范数相等的对称散射矩阵在 R^8 空间中的映象所构成的集合为 $B(X)$,即

$$B(X)=\{Y\in R_S^8\mid\ \|Y\|=\|X\|\tag{7}$$

显然

$$X_F\in B(X),\tag{8}$$

那么由式(2)的约束条件可知,对 $B(X)$ 中的任意元素 Y,都有

$$\|X_F-X\|\leq\|Y-X\|\tag{9}$$

这表明,Frobenius 修正矩阵在与 $B(X)$ 相对应的 $C^{2\times2}$ 的子集 $C_S^{2\times2}$ 中是最优的,换言之,Frobenius 范数修正法在与实测散射矩阵能量相等的对称矩阵空间中是最优的,而在整个对称矩阵空间中,它未必是最优的.

根据反设,S_0 也满足式(2),因而它在 R^8 空间中的映象 Y_0 满足

$$Y_0\in B(X),\tag{10}$$
$$\|X_F-X\|=\|Y_0-X\|,\tag{11}$$

并且

$$Y_0\neq X_F\tag{12}$$

将式(11)展开后有

$$(Y_0-X)^T(Y_0-X)=(X_F-X)^T(X_F-X),$$

再将式(8)和(9)代入上式便得

$$(Y_0-X_F)^TX=0,\tag{13}$$

由于 $Y_0\in R_S^8$ 和 $X_F\in R_S^8$,所以有 $Y_0-X_F\in R_S^8$,即有

$$Y_0-X_F=A(Y_0-X_F),$$

代入式(13)便有

$$(Y_0-X_F)^TAX=0,\tag{14}$$

其中利用了 A 为对称矩阵这一性质. 将式(13)和(14)相加,并由 $X_C=\frac{1}{2}(X+AX)$[5],得到:

$$(Y_0-X_F)^TX_C=0,$$

再将式(6)代入有 $(Y_0-X_F)^TX_F=0$,或者 $Y_0^TX_F=\|X_F\|^2=\|Y_0\|\cdot\|X_F\|$,根据 Schwartz 不等式立即可知 $Y_0=X_F$,这与式(12)矛盾,故假设不真,原命题得证. 换言之,仅当 $Y=X_F$ 时,式(9)中等号才能成立. 至此就证明了 Frobenius 修正散射矩阵的唯一性.

4　实验结果及结语

针对因收、发天馈系统极化基不一致而造成的散射矩阵变质情况,文中进行了目标互易性修正的计算机仿真实验,对变质散射矩阵分别采用 Frobenius 范数法和 Cameron 平均法进行修正,并比较它们的修正性能.

在实验中,首先产生一个真实散射矩阵 S_0,然后按照式(1)对其做变基处理,从而得到实测的变质散射矩阵 S,再分别对 S 做 Frobenius 和 Cameron 修正,就得到 S_F 和 S_C. 定义

$$\eta=\frac{\|S_C\|^2}{\|S\|^2},\ \gamma=\frac{\|S_C-S_0\|^2}{\|S_F-S_0\|^2},\ \delta=\frac{\|S_C-S\|^2}{\|S_F-S\|^2},$$

显然,$0<\eta\leq1$,它表征了 Cameron 修正法对散射矩阵能量不变性的约束的破坏程度,η 越小,说明 Cameron 修正散射矩阵的能量越小于真实值. γ 可以用来衡量 S_F 和 S_C 与真值 S_0 的接近程度:γ 越接近于 1,说明两种修正法的性能越接近;反之,若 $\gamma<1$,说明 Cameron 修正散射矩阵更接近于真实值;若 $\gamma>1$,则表明 Frobenius 修正散射矩阵更接近于真实值. δ 用来衡量 S_F 和 S_C 与实测变质散射矩阵 S 的接近程度,在理论上显然应有 $\delta\leq1$. 表 1 给出了部分计算机仿真实验结果. 其中 ρ_t 和 ρ_r 分别为 U_t、U_r 的表征参量[8],即

$$U_i=\frac{1}{\sqrt{1+|\rho_i|^2}}\begin{bmatrix}1&-\rho_i^*\\\rho_i&1\end{bmatrix},\ i=r,t$$

通常情况下,应当有 $|\rho_i|\ll1$,这意味着收、发天馈系统的极化基与水平、垂直极化基的偏离程度不是很大,换言之,即收、发天馈系统的极化纯度不是很低. 此外,表 1 中参数 η、γ 和 δ 均为经 5000 次实验得到的统计平均值.

实验结果表明:(1) Cameron 平均修正法较明显地破坏了

散射矩阵的能量不变性约束. 一般而言,若收、发天馈系统极化基之间的不一致性(这种不一致性可以用 ρ_t 和 ρ_r 之间的极化状态距离来衡量[10],限于篇幅,此处不予详述)越强,Cameron 修正法造成的散射矩阵的能量损失就越大;反之亦然. (2)由 δ 可以看出,Cameron 修正散射矩阵总是比 Frobenius 修正散射矩阵更接近于实测值,这一点验证了 Cameron 修正法的最优性[5]. (3)由 γ 可以看出,Cameron 修正法与 Frobenius 修正法的性能优劣与散射矩阵真值、收发极化基间的不一致性等因素有关,通常不能一概而论;在收、发天馈系统极化基不一致性较弱时,二者的性能相差不多.

表 1 散射矩阵修正性能比较结果

ρ_t	0.1	0.1	$0.1+0.1j$	$0.1j$	0.3	0.01
ρ_r	0.01	-0.1	$-0.1+0.1j$	-0.1	$0.1+0.2j$	-0.3
η	.9974	.9870	.9871	.9935	.9757	.9700
δ	.9735	.9403	.9408	.9578	.9165	.9084
γ	1.0003	1.1427	.9937	.9969	.9879	1.0046

随着极化信息在现代雷达技术领域中的应用日益深入广泛,雷达目标极化特性的研究已经受到国内外学术界的普遍重视,作为目标极化特性研究的信息获取手段和理论验证工具,目标极化散射矩阵精确测量技术也成为一个研究热点. 在目标极化散射矩阵测量过程中,对于大多数待测目标而言,散射矩阵的对称性是极为重要的先验信息,因而目标互易性修正就成为测量校准过程的一个不可或缺的重要环节. 在实际的极化散射矩阵测量过程中,导致目标互易性受到破坏的因素很多、也很复杂,往往难以用统一的模型来描述,这就需要针对不同的情况具体分析散射矩阵的变质原因,建立相应的数学模型,进而得到有效的修正算法.

本文详细研究了目标互易性修正的 Frboenius 范数法. 同目标互易性修正的最优算法 ——Cameron 平均法相比,Frobenius 范数法是一种"局部"最优算法,用数学的语言描述就是,在与实测散射矩阵能量相等的对称矩阵空间中,它是最优的;从物理意义上讲,它特别地适用于收发天馈系统分离、并且二者极化基不一致的情况.

参考文献

[1] G. Sinclair. The transmition and reception of elliptically polarized waves. Proc. IRE, Feb., 1950, 38

[2] [美]H. Mott 著,林昌禄译. 天线和雷达中的极化. 成都:电子科技大学出版社. 1989

[3] W. L. Cameron, L. K. Leung. Feature motivated polarization scattering matrix decomposition. International Conf. Rec. Radar-90

[4] 肖顺平,郭桂蓉,庄钊文,王雪松. 基于本征极化的雷达目标识别. 国防科技大学学报,1995(4):43～50

[5] 王雪松,肖顺平,庄钊文. 论目标互易性 Cameron 修正法的最优性. 电子学报,1999(6):33～35

[6] J. R. Huynen. Measurement of the target scattering matrix. Proc. IEEE, August 1965:936～943

[7] W. Wiesbeck and S. Rigger. A complete error model for free space polarimetric measurements. IEEE Trans. on AP, 1991, 39(8):1105～1111

[8] A. B. Kostinski, W. M. Boerner. On foundations of radar polarimetry. IEEE Trans. on AP, 1986, 34(12):1395～1404

[9] 盛昭瀚,曹忻. 最优化方法基本教程. 南京:东南大学出版社,1990

[10] 肖顺平. 宽带雷达极化目标识别的理论与应用[博士学位论文]. 长沙:国防科技大学电子工程学院,1995

王雪松 1972 年出生. 1994 年毕业于国防科技大学电子技术系,1999 年 6 月于国防科技大学获博士学位. 已在国际、国内期刊及会议发表论文 40 余篇,获部委级科技进步二、三等奖各 1 项. 研究兴趣为:雷达极化信息处理,目标检测与识别、综合电子战等.

李永祯 1976 年出生. 1999 年毕业于国防科技大学电子工程学院,同年保送直接攻读博士学位. 已在国内期刊及学术会议发表论文 3 篇. 研究方向为:雷达极化信息处理,目标检测与识别.

(上接第 72 页)

参考文献

[1] A. J. Poelman and J. R. F. Guy. Multinotch logic-product polarization supperession filters. A typical design example and its performance in a rain clutter environment. Pro. IEE, July 1984, 131:383～396

[2] A. J. Poelman, J. R. F. Guy. Nonlinear polarization-vector translation in radar systems: A promissing concept for Real-time polarization-vector signal processing via a single-notch polarization suppression filter. IEEE Proc., 1984, 131(5):451～464

[3] W. L. Stutzman. Polarization in Electromagnetic Systems. Norwood, MA: Artech House, 1993:136

[4] G. A. Deschamps. Geometrical representation of the polarization of a plain electromagnetic wave. Proc. IRE., May 1951, 39:540～544

[5] K. L. Nielsn and J. H. Vanlonkhuyzen, Plane and Spherical Trigonometry. New York: Barnes and Nobel. 1954:110～119

[6] D. Giuli. Polarization Diversity in Radars. Proc. IEEE, Feb. 1986, 74(2):245～269

[7] A. B. Kostinski and W-M. Boerner. On foundation of radar polarimetry. IEEE Trans. Antenna Propagat., Dec. 1986, AP-34:1395～1404