

用 Cassinian 变换 FDTD 方法分析 几种特殊截面波导传输特性

周晓军¹, 喻志远², 林为干²

(1. 电子科技大学光电子技术系, 成都 610054; 2. 电子科技大学应用物理研究所, 成都 610054)

摘 要: 本文把保角变换应用于紧凑格式 2D/ FDTD 算法, 给出了保角变换 FDTD 算法差分公式, 提出了焦点的处理方法. 用 Cassinian 变换分别计算了椭圆波导、茧形波导的截止波长与色散曲线, 以及屏蔽平行双线高阶模的截止波长.

关键词: 保角变换; FDTD 方法; 焦点; Cassinian 变换

中图分类号: TN151⁺.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 03-0053-04

Propagation Characteristics Analysis for Special Cross-Section Waveguides by Cassinian Transformation FDTD Method

ZHOU Xiao-jun¹, YU Zhi-yuan², LIN Wei-gan²

(1. Department of Photoelectron Technology, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China;

2. Institute of Applied Physics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract: In this paper, we apply conformal mapping into compact 2D/ FDTD algorithm, gave the difference formula of conformal mapping FDTD algorithm, propose the treatment method of focus. The cutoff wavelengths and dispersion curves of elliptic and of cocoon-section waveguides are calculated, and the cutoff wavelengths of high order modes of shield two parallel lines are also given by this method.

Key words: conformal mapping; FDTD method; focus; Cassinian transformation

1 引言

时域有限差分法 (finite-difference time-domain method) 是一种近年来发展起来的计算各种复杂电磁问题的数值方法. 标准的 Yee-FDTD 算法是在笛卡尔直角坐标下进行的, 弯曲的边界只能用“阶梯近似”, 因而带来很大的误差. 文献[1]提出了 Thompson 变换 FDTD 方法, 通过数值求解泊松方程将不规则形体的边界变换为规则边界, 在计算任意形状物体的电磁散射特性中获得了精度比 Yee-FDTD 方法高的数值结果^[2]. 利用解析函数的保角变换或数值求解拉普拉斯方程得到的数值保角变换也可将复杂边界的区域变换为简单边界的区域^[3]. 本文将保角变换与紧凑格式 2D/ FDTD 算法相结合, 利用 Cassinian 变换进行区域变换, 分别计算了椭圆波导、茧形波导模的截止波长和色散曲线. 另外, 还给出了屏蔽平行双线高阶模的截止波长.

2 基本算法和公式

设在 Z 平面 (波导横截面) 和 W 平面存在一个一一对应

的保角变换 $W = f(z)$ ($f(z)$ 是解析函数, $w = u + iv$, $z = x + iy$) 把 Z 平面上给定边界曲线变为 W 平面上 u, v 为常数的直线. 在 Z 平面和 W 平面上, 任意一个微小长度元可表示为:

$$dl^2 = h_1^2 du^2 + h_2^2 dv^2 = dx^2 + dy^2 \quad (1)$$

式中 h_1, h_2 是度量系数. 从式 (1) 可推出

$$\begin{aligned} dx^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 du^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 dv^2 + 2 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} du dv \\ dy^2 &= \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 du^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 dv^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} du dv \end{aligned} \quad (2)$$

解析函数 $f(z)$ 应满足柯西-黎曼条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

由此得到以下关系

$$h_1 = h_2 = \left| \frac{dw}{dz} \right|^{-1} = h(u, v) \quad (4)$$

保角变换是一种特殊的正交曲线坐标变换. 正交曲线坐标变换后在无源、各向同性、无耗的均匀媒质中 Maxwell 旋度方程可分解为由电磁场分量联系起来的六个偏微分方程:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_u}{\partial t} &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial H_v}{\partial v} - \frac{\partial H_v}{\partial z} \right\} \\
\frac{\partial E_v}{\partial t} &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial H_u}{\partial z} - \frac{\partial H_u}{\partial u} \right\} \\
\frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{\partial (hH_u)}{\partial u} - \frac{\partial (hH_v)}{\partial v} \right\} \\
\frac{\partial H_u}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\partial E_v}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial E_z}{\partial v} \right\} \\
\frac{\partial H_v}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{h} \frac{\partial E_z}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial z} \right\} \\
\frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu h^2} \left\{ \frac{\partial (hE_z)}{\partial v} - \frac{\partial (hE_u)}{\partial u} \right\}
\end{aligned} \quad (5)$$

用文献[4]提出的紧凑格式 2D/FDTD 算法将导模电磁场沿 z 轴的变化取为 $\exp(-jz)$, 对 z 的导数用 $(-j)$ 代替 (是导模的传播常数, $j = \sqrt{-1}$). 计算波导的色散特性时, 只需预先设置一个值, 代入方程组 (5) 的差分公式, 经一段时间计算, 对波导内任一点的随时间变化的场量作傅里叶变换后, 在电磁场量频谱图上的那些谐振峰值点对应的频率, 就是波导内的电磁场在传播常数下的各个导模的传输频率. 这种方法可在一次时域场的计算中得到多个模式的导模频率. 设置不同的值, 逐点计算, 即可得到多个导模的色散曲线. 取 $\omega = 0$, 可计算出导模的截止波长. 为了在实数域计算, 我们取^[5]

$$\begin{aligned}
[E: H] &= \{ jE_u(u, v), jE_v(u, v), E_z(u, v); \\
&H_u(u, v), H_v(u, v), jH_z(u, v) \}
\end{aligned}$$

得到方程组 (5) 的实数差分公式:

$$\begin{aligned}
H_u^{n+1/2}(i, j+1/2) &= H_u^{n-1/2}(i, j+1/2) + \frac{c-t}{v} \{ E_v^n(i, j+1/2) \\
&\cdot v - \frac{1}{h(i, j+1/2)} [E_z^n(i, j+1) \\
&- E_z^n(i, j)] \} \\
H_z^{n+1/2}(i+1/2, j) &= H_z^{n-1/2}(i+1/2, j) + \frac{c-t}{u} \{ \frac{1}{h(i+1/2, j)} \\
&\cdot [E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i, j)] \\
&- E_u^n(i+1/2, j) \cdot u \} \\
H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2) &= H_z^{n-1/2}(i+1/2, j+1/2) + \frac{c-t}{u} \cdot \frac{1}{v} \\
&\cdot \frac{1}{h^2(i+1/2, j+1/2)} \{ [h(i+1/2, j+1) E_u^n(i+1/2, j+1) \\
&- h(i+1/2, j) E_u^n(i+1/2, j)] \cdot u - [h(i+1, j+1/2) E_v^n(i+1, j+1/2) \\
&- h(i, j+1/2) E_v^n(i, j+1/2)] \cdot u \} \\
E_u^{n+1}(i+1/2, j) &= E_u^n(i+1/2, j) + \frac{c-t}{v} \{ \frac{1}{h(i+1/2, j)} \\
&\cdot [H_z^{n-1/2}(i+1/2, j+1/2) \\
&- H_z^{n-1/2}(i+1/2, j-1/2)] + v H_v \} \\
E_v^{n+1}(i, j+1/2) &= E_v^n(i, j+1/2) - \frac{c-t}{u} \{ H_u^{n+1/2}(i, j+1/2) \cdot u \\
&+ \frac{1}{h(i, j+1/2)} [H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2) \\
&- H_z^{n+1/2}(i-1/2, j+1/2)] \} \\
E_z^{n+1}(i, j) &= E_z^n(i, j) + \frac{c-t}{u} \cdot \frac{1}{v h^2(i, j)} \{ [h(i+1/2, j) H_v^{n+1/2}(i+1/2, j) - h(i-1/2, j) H_v^{n+1/2}(i-1/2, j)] \cdot v \\
&- [h(i, j+1/2) H_u^{n+1/2}(i, j+1/2) - h(i, j-1/2) H_u^{n+1/2}(i, j-1/2)] \cdot u \}
\end{aligned} \quad (6)$$

3 Cassinian 变换与 Cassinian 曲线族

3.1 Cassinian 变换^[6]

Cassinian 变换为

$$z = c(e^w + 1)^{1/2} \quad (7)$$

$z = x + jy$, $w = u + jv$, c 是实常数. 由式 (7) 可推导出度量系数

$$h = \frac{ce^u}{(2e^{2u} + 2e^u \cos v + 1)^{1/4}} \quad (8)$$

展开式 (8) 可得出一组 w 的实部 u 为常数的曲线族或等 k 曲线 ($k = ce^{u/2}$ 族)

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = k^4 - c^4 \quad (9)$$

当 $k \geq \sqrt{2}c$ 时, 式 (9) 表示接近于椭圆的曲线族 (如图 1 曲线 k_4); $c < k < \sqrt{2}c$ 时, 式 (9) 表示茧形曲线族 (如图 1 曲线 k_3); $k = c$ 时, 式 (9) 表示双纽线 (如图 1 曲线 k_2); $k < c$ 时, 式 (9) 表示非常接近圆的两个 Cassinian 卵形曲线族 (如图 1 曲线 k_1). 展开式 (7) 还可得出一组 w 的虚部 v 为常数的曲线族

$$v = \arctg \left[\frac{2xy}{x^2 - y^2 - c^2} \right] \quad (10)$$

如图 1 所示. 利用导波结构的对称性, 我们只考虑波导在第一象限的区域. 正 x 轴和正 y 轴分别作为电壁、磁壁进行计算, 得到的模式为 TE_{xyn} 或 TM_{xyn} . 正 x 轴、正 y 轴的对称性和模式的表示方法如表 1 所示. 下标 x 表示 x 轴的对称性, y 表示 y 轴的对称性, n 表示第 n 个谐波频率对应的模式. s 表示对称, a 表示反对称. 从式 (7) 得到正 x 轴和正 y 轴用 U, V 的表达方式为

$$\begin{aligned}
\text{正 } x \text{ 轴} \quad &\begin{cases} v = 0, & u \leq 0, (0 \leq x < c) \\ v = 0, & -c < u < 0 (x > c) \end{cases} \\
\text{正 } y \text{ 轴} \quad &v = \pi, u > 0
\end{aligned} \quad (11)$$

表 1 正 x 轴、正 y 轴的对称性和模式的表示方法

正 x 轴	电壁	磁壁	电壁	磁壁
正 y 轴	磁壁	电壁	电壁	磁壁
模式	TE_{asn}, TM_{asn}	TE_{san}, TM_{san}	TE_{aan}, TM_{aan}	TE_{ssn}, TM_{ssn}

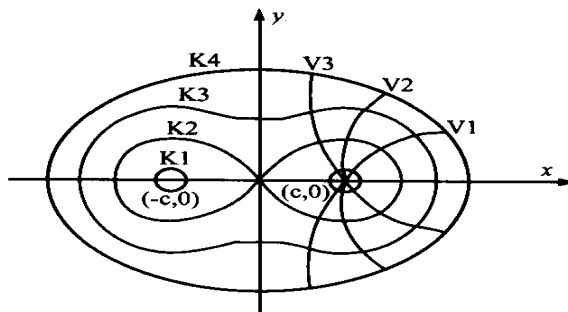


图 1 Cassinian 曲线族

3.2 焦点的处理

Cassinian 变换有两个焦点, 分别在 $(-c, 0)$ 和 $(c, 0)$. 考虑第一象限, 在正 x 轴上有一个焦点 $(c, 0)$, 如图 2(a) 所示. 在

焦点的附近沿 Cassinian 卵形线作一个小弧线 BC , 把挖掉焦点的 x 轴, y 轴与第一象限的 Cassinian 曲线所围区域 $ABCDE$ 作为计算域, 保角变换后的计算区域为矩形 $A'B'C'D'$, 如图 2 (b) 所示。

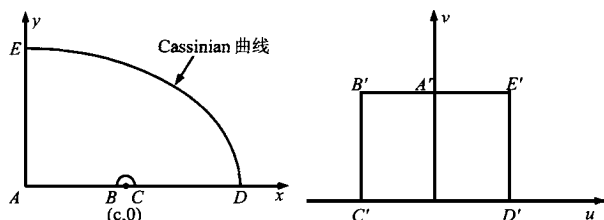


图 2 (a) z 平面上的区域 $ABCDE$, (b) 变换到 w 平面上的区域 $A'B'C'D'$

4 数值结果

本节用 Cassinian 变换 FDTD 算法计算椭圆波导, 茧形波导的截止波长与色散曲线以及屏蔽平行双线高阶模的截止波长。在以下的计算中, 大多数情况下计算域为 20×20 , 时间步长是 $4 \sim 8 \times 10^{-14} t$, 共用 10000 个时间步。激励源为波导内一点设置的高斯脉冲。以下计算常数 c 均取为 1 厘米。焦点附近的围线 BC 为 $k=0.1\text{cm}$ 的 Cassinian 卵形线 (当 $k \leq 0.1\text{cm}$ 时, 计算结果不变, 因此可不考虑焦点围线 BC 对计算产生的误差)。

实例 1 椭圆波导

表 2 椭圆波导的截止波长 (c/a)

	TE_{as1} (TE_{c11})	TE_{sa1} (TE_{s11})	TE_{aa1} (TE_{c21})	TE_{ss1} (TE_{s21})	TM_{as1} (TE_{c11})	TM_{sa1} (TE_{s11})
文献[7]	3.39895	3.08548	1.97146	1.94807	1.59409	1.51249
本方法	3.42467	3.09770	1.96946	1.94666	1.59150	1.52083
误差 %	0.757	0.396	-0.101	-0.070	-0.162	0.551

Cassinian 曲线在 $\exp(u/2) = 3.086473$ 时与长半轴为 $a = 3.24442839\text{cm}$, 短半轴为 $b = 2.919985544\text{cm}$ 的椭圆曲线基本重合。为了验证本文提出的保角变换 FDTD 算法的正确性我们用 Cassinian 变换结合紧凑格式 2D/FDTD 公式计算了椭圆波导的截止波长, 其结果如表 2 所示。与文献[7]的结果比较发现两者符合得相当好。此外, 我们用如前所述算法, 预先设

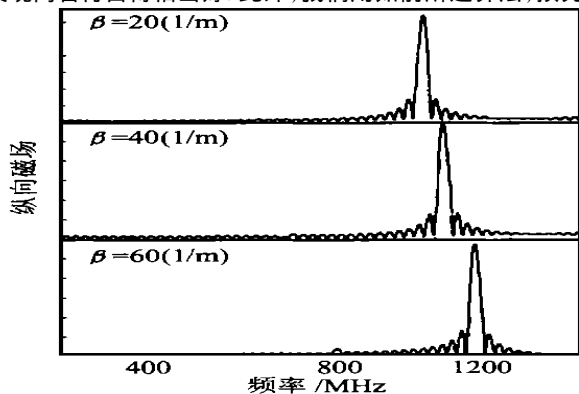


图 3 TE_{ss1} 模在不同传播常数下的谐振特性

置值, 在时域计算后, 对波导内任一点进行傅氏变换得到场量的频谱图。随着 β 的增加模频逐渐增大, 如图 3 所示。逐点记录模频与 β 可得到色散曲线。椭圆波导几种模式的色散曲线如图 4 所示。

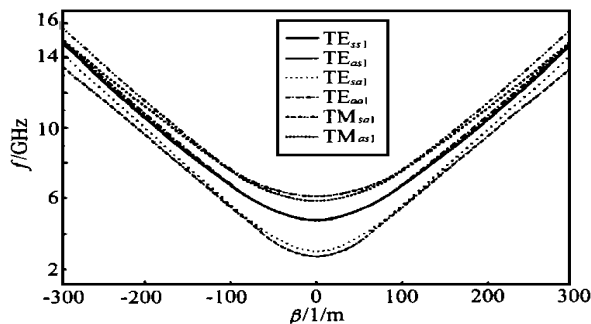


图 4 椭圆波导几种模式的色散曲线

实例 2 茧形波导^[8]

茧形波导的几何形状由参数 k 决定。 $c \leq k \leq \sqrt{2}c$ 均称为茧形波导。用类似于求解椭圆波导的方法, 我们求出了 $1.05c \leq k \leq \sqrt{2}c$ 时茧形波导的截止波长, 如图 5 所示。由图可见, 随着 k 值的减小, 基模 TE_{as1} 截止波长增大, 第一高阶模的截止波长略有减小。 $k < 1.1\text{cm}$ 时, 茧形波导具有明显的宽带特性, 且波导随 k 的减小宽带特性更加明显。图 6 给出了 $k = 1.3\text{cm}$ 时茧形波导几种模式的色散曲线。

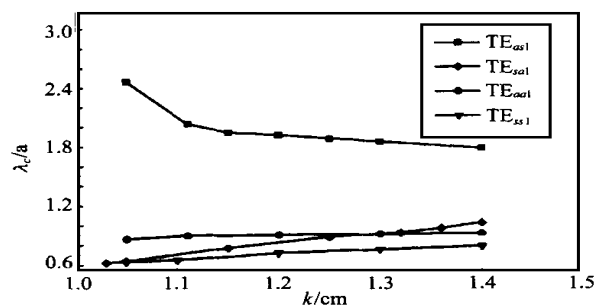


图 5 茧形波导几种模式的截止波长

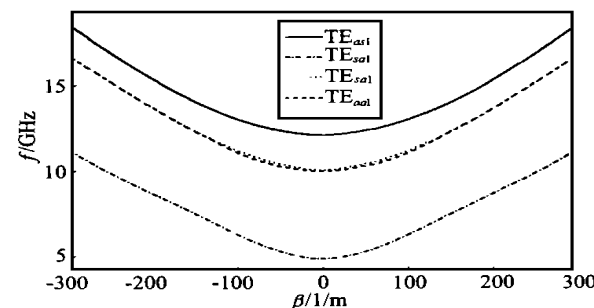


图 6 $k = 1.3\text{cm}$ 茧形波导几种模式的色散曲线

实例 3 屏蔽平行双线

屏蔽平行双线在通常情况下传输 TEM 模, 但在特殊的激励条件下可能出现高阶模。我们用两个 Cassinian 卵形线表示平行双导线 ($k = 0.8\text{cm}$, 直径 d 为 0.6806cm , 间距 D 为 1.2cm), 用 Cassinian 椭圆表示屏蔽管 ($k = 2\text{cm}$, 长半轴为 2.236cm , 短半轴为 1.732cm)。计算了屏蔽平行双线 TE 高阶模

的截止波长,如表 3 所示. 由于高阶模的传输速度与基模不同,高阶模的出现将使传输信号产生色散. 图 7 示出了第一高阶模截止波长与双线导体直径与导体间距之比的关系. 当 $d/D = 0.195$ 时,第一高阶模的截止波长最短,可得到宽带基模传输. 这一结果对屏蔽平行双线的工程设计有参考价值.

表 3 屏蔽平行双线 TE 高阶模的截止波长

	TE _{su1}	TE _{ss1}	TE _{as1}	TE _{au1}	TE _{su2}	TE _{ss2}	TE _{as2}	TE _{au2}
d/a	1.4427	0.9652	1.8009	1.0036	0.6845	0.5314	0.7118	0.6725

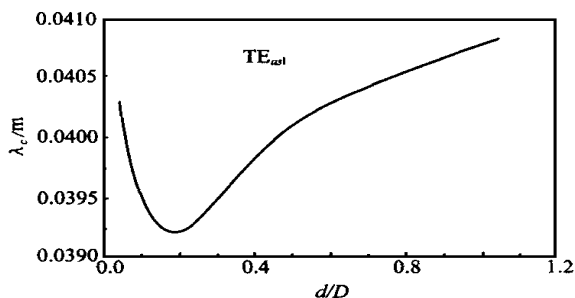


图 7 屏蔽平行双线第一高阶模截止波长

本文提出了保角变换 FDID 算法. 以 Cassinian 变换为例, 计算了椭圆波导、茧形波导的截止波长与色散曲线, 给出了屏蔽平行双线高阶模的截止波长. 其中椭圆波导截止波长计算结果与文献[7]完全一致, 证明本文提出的基本算法、焦点的处理方法是正确的. 用其他保角变换, 本方法还可求解其他复杂边界波导的传输特性.

参考文献

- [1] Cheng Liao, Yusheng Zhao, Weigan Lin. New method for numerical solution Maxwell's equation. Electronics Letters, 1995, (31): 261 ~ 262
- [2] 廖成, 任朗. Thompson FDID 与经典 FDID 方法之比较. 电波科学学报, 1997, (4): 356 ~ 360

- [3] S. Chakravarthy, D. Anderson. Numerical conformal Mapping. Math. Comp., 1979, (33): 953 ~ 969
- [4] A. Asi, L. Shafai. Dispersion analysis of anisotropic inhomogeneous waveguides using compact 2D-FDTD. Electronics Letters, 1992, (15): 1451 ~ 1452
- [5] S. Xiao, R. Vahldiech. An efficient 2-D FDTD algorithm using real variables. IEEE Microwave & Guided Wave Letters, 1993, (3): 127 ~ 129
- [6] P. Mbon, D. E. Spencer. Field Theory Handbook. New York: Springer-Verlag, 1971
- [7] 张善杰, 沈耀春. 任意偏心率椭圆波导的本征模序. 电子学报, 1994, (3): 86 ~ 89
- [8] 黄志洵, 王晓金. 微波与传输线理论与实用技术. 北京: 科学出版社, 1996, 370 ~ 376



周晓军 分别于 1983 年、1999 年在电子科技大学获硕士和博士学位, 现为电子科技大学光电技术系副教授. 主要从事电磁场数值计算和光纤传感器研究.

喻志远 教授, 1987 年在电子科技大学获博士学位. 主要从事电磁场数值计算和微波电路的研究.

林为干 教授、博士生导师、中科院院士. 1950 年在美国 Berkeley 大学获博士学位, 1949 年至 1951 年为 Berkeley 大学讲师. 1984 年和 1993 年分别赴加拿大 Manitoba 大学和日本九州大学作访问教授. 曾任中国电子学会微波分会主席、美国《电磁波和应用》杂志主编.

(上接第 86 页)

参考文献

- [1] Oflazer Kemal. Error-tolerant finite-state recognition with applications to morphological analysis and spelling correction. Computational Linguistics, 1996, 22(1): 83 ~ 89
- [2] Wang Zuoying, Gao Hongge. An inhomogeneous HMM recognition algorithm. Chinese Journal of Electronics Jan. 1998, 7(1): 73 ~ 77
- [3] Wang Hsin-Min, Ho Tai-Hsuan, et al. Complete recognition of contin-

uous mandarin speech for Chinese language with very large vocabulary using limited training data. IEEE Trans. Speech & Audio Processing, March 1997, 5(2): 195 ~ 200

- [4] Oommen B J. . Recognition of noisy subsequences using constrained edit distances. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1987, 9: 676 ~ 685
- [5] Marzal A, Vidal E. Computation of normalized edit distance and applications. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1993, 15(9): 926 ~ 932