

不变性测试方程法在开边界 多导体静电系统分析中的应用

郭 飞, 韩社教, 王蓉蓉, 马西奎, 邱关源

(西安交通大学电气工程学院, 西安 710049)

摘 要: 在“测试环”概念的基础上, 提出了两种确定 MEI 系数的方法. 数值结果表明, 利用电偶极子层激励作为测试子和自由空间格林函数作为积分核确定 MEI 系数的方法, 比之其它方法具有更高的精度和明显的优点. 分析并总结了数值实验中的一些问题, 使得对 MEI 方法的理解更深入了一步. 另外, 对 MEI 方法的不稳定性和有效性也做了理论分析. 最后, 利用本文方法计算了一个较为复杂的微带线参数, 得到了满意的结果.

关键词: 不变性测试方程法; 无界电磁场; 数值分析

中图分类号: TN154.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 03-0057-04

Application of MEI Method in the Analysis of Unbounded Electrostatic System with Multi-conductors

GUO Fei, HAN She-jiao, WANG Rong-rong, MA Xi-kui, QIU Guan-yuan

(College of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: On the basis of the novel concept “measuring ring”, two new kinds of methods are presented to determine MEI coefficients in this paper. The numerical results demonstrate that the MEI coefficients obtained using the technique, which takes dipole layer excitation as the “Metron” and the Green function in free space as the integral Kernel, are of higher precision over other techniques. The analysis and summarization of numerical experimental results cause us to achieve a better comprehension of the MEI method. On the other hand, the instability and the validity of the MEI method are explained by using mathematical analysis approach. The parameters of complicated microstrip lines are calculated by the method here, and the results are in good agreement with those in references.

Key words: measured equation of invariance (MEI); unbounded electromagnetic field; numerical analysis

1 引言

随着电子设备工作频率的不断提高, 分布的电磁参数的提取对电子设备性能的分析和设计具有重要的实用意义. 大多数情况下准 TEM 分析已足够精确, 即电磁参数的提取仅需对二维静电系统进行分析. 这类问题一般都具有延伸至无穷区域截断为有限区域. 如何确定截断区域的大小并给出截断边界上的边界条件直接影响着计算量和计算精度, 它是有限元法或有限差分法计算开边界问题的关键.

不变性测试方程法^[1] (Measured Equation of Invariance) 是针对频域散射问题提出的一种极具吸引力的方法, 它可将场域截断至离导体很近的地方而能保证足够的计算精度, 同时保持系数矩阵的稀疏性, 这使得求解问题的计算量大大减少, 为开边界问题的计算提供了一个强有力的手段. 文献[2]针对多导体微带线参数提取问题, 提出了“测试环”这个新颖的概念, 从而使 MEI 方法的应用更加灵活. 这无疑为 MEI 方法应

用于静态场开边界问题的计算开辟了一条新的途径.

MEI 方法的关键在于确定 MEI 系数, 目前 MEI 系数的确定还没有一个统一的方法, 并且缺乏理论和实验依据. 本文从静电场等效原理出发, 首先通过数值实验比较了几种方法的精度, 对出现的现象作了理论分析, 通过这些工作使得对 MEI 方法有了更为深入的理解. 在此基础上, 采用有限元法结合不变性测试方程法对一个实例进行了计算, 得到了令人满意的结果.

2 确定 MEI 系数的几种方法

MEI 方法的关键在于建立截断边界上节点与其周围节点间的关系, 即

$$\sum_{i=0}^5 a_i u_i = 0 \quad (1)$$

MEI 节点分布如图 1 所示.

K. K. Mei 等人认为, 式(1)中 MEI 系数 i 满足三个假设: (1) 与节点位置无关; (2) 与物体的几何形状有关; (3) 与激励场无关. 文献[2]根据上面的第三个假设以及等效原理提出了“测试环”这个概念, 很好地解决了多导体电磁参数的提取问题.

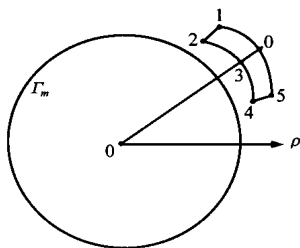


图1 截断边界节点与其邻近节点的关系示意图

根据静电场的等效原理^[3], 测试环外的电位可等效为由测试环上的单层源-电荷和双层源-电偶极子共同产生, 即:

$$\phi(r) = \sum_m \phi(r) G(r, r_m) d_m - \sum_m \phi(r) \frac{\partial G(r, r_m)}{\partial n} d_m \quad (2)$$

其中, 电荷分布 $\phi(r) = \frac{\partial \phi(r)}{\partial n}$; 电偶极子分布 (电位分布) $\phi(r) = \phi(r)$.

根据测试子选取的不同, 目前确定 MEI 系数的方法主要有两种:

(1) 自由空间格林函数, 用电荷测试子激励确定 MEI 系数^[2], 即

$$\phi(r) = \sum_m \phi(r) G(r, r_m) d_m \quad (3)$$

(2) 自由空间格林函数, 用电偶极子和电荷共同作为测试子激励来确定 MEI 系数^[4]. 文献[4]中通过选取两组测试子激励, 在每个截断边界点上分别产生两组关于同一 MEI 系数的 MEI 方程, 仍然采用最小二乘法求解. 但是, 两组不同性质的测试子之间存在着不同的组合, 它们之间的关系究竟如何尚不清楚.

针对这一问题, 本文提出以下两种方法.

(3) 齐次格林函数, 用电偶极子和电荷共同作为测试子激励来确定 MEI 系数.

可以看出, 当式(2)的右端仅取第一项时, 就是上面提到的第(1)种确定 MEI 系数的方法; 而当第一项和第二项都存在时, 就是上面提到的第(2)种确定 MEI 系数的方法. 一般情况下, 测试环上存在着两种不同性质的源, 即在确定 MEI 系数时需选择两组测试子, 无疑增加了问题的复杂性. 避免这一困难的一个简单方法是选取一个合适的 Green 函数, 使其在圆形测试环 r_m 上 $G(r, r_m) = 0$. 根据文献[5], [6]可知, 这样的 Green 函数如下:

$$G(r, r_m) = \frac{1}{4} \ln \left[\frac{R^4 + r^2 + r_m^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_m)}{R^2(r^2 + r_m^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_m))} \right] \quad (4)$$

其中, R 为测试环半径. 这时, 式(2)就变为:

$$\phi(r) = - \sum_m \phi(r_m) \frac{\partial G(r, r_m)}{\partial n} d_m \quad (5)$$

根据文献[7], 式(5)中 Green 函数的法向导数可展开为级数的形式, 即为:

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R_m}{r} \right)^m \cos m(\theta - \theta_m) d_m \quad (6)$$

现在, 利用上式在圆形测试环情况下确定 MEI 系数, 由式(4)以及三角函数的正交性, 很容易知道圆形测试环测试子应选择为三角函数, $\{1, \cos \theta, \sin \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots\}$. 这样, 由式(7)

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R_m}{r} \right)^m \cos m(\theta - \theta_m) d_m \quad (7)$$

可知:

- (1) $k=0$ 时, $\phi_0 = 1, \phi_0 = 1$;
- (2) $k = \cos k, \phi_k = k \left(\frac{R_m}{r} \right)^k \cos k \theta$;
- (3) $k = \sin k, \phi_k = k \left(\frac{R_m}{r} \right)^k \sin k \theta$;

可以看出, 选择圆形测试环使得计算简单. 利用式(1)可以建立起 MEI 系数的线性方程组, 当阶数大于 2 时, 可采用最小二乘法求解.

应该指出, 该方法中测试环是圆形的. 通过上面的分析可以看出, MEI 系数的确定是多种多样的. 并且文献[8]为各种方法奠定了理论基础, 即测试环外区域的电位可以认为是仅由测试环上的电荷产生的; 或由测试环上的电荷和电偶极子产生的. 同样, 也可认为是仅由测试环上的电偶极子产生的, 这样就避免了寻求不同形状测试环的问题.

(4) 自由空间格林函数, 电偶极子作为测试子激励来确定 MEI 系数.

$$\phi(r) = \sum_m \phi(r) \frac{\partial G(r, r_m)}{\partial n} d_m \quad (8)$$

以上归纳出了四种确定 MEI 系数的方法. 下面通过数值实验来对这四种方法的计算精度进行比较, 并希望从中得到一些规律和加深对 MEI 方法的认识.

3 关于四种方法的数值实验和结果分析

3.1 数值实验

为了比较上面四种方法, 这里对同一实例用这四种方法确定的 MEI 系数来分别计算. 如图 2 所示, 自由空间中放入一无限长圆柱体, 已知其表面电位分布为:

$$\phi(R, \theta) = (\cos k \theta + \sin k \theta), \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

无限长圆柱体的轴线与 z 轴重合, 其半径为 $R=2\text{cm}$.

根据分离变量法, 表面激励引起的电位分布如式(9)所示

$$\phi(r, \theta) = \left(\frac{R}{r} \right)^k (\cos k \theta + \sin k \theta) \quad (9)$$

这里针对表面电位分布角频率 k 取不同值时, 采用差分法计算圆柱体外空间中的电位分布. 其中测试环的半径 $R_m = R + dh$, 截断边界 r_c 的半径为 $R_c = R + 2 * dh$, 这里 dh 为径

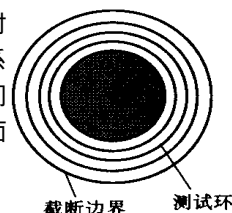


图2 圆柱体表面激励引起的电位分布

向差分的步长,测试环与柱体之间差分网格的层数为 1,测试环与截断边界之间差分网格的层数为 1.图 3 为表面电位分布角频率 k 取不同值时,分别采用上面四种方法计算得到的最大相对误差与测试子阶数的关系.其中,最大相对误差为:

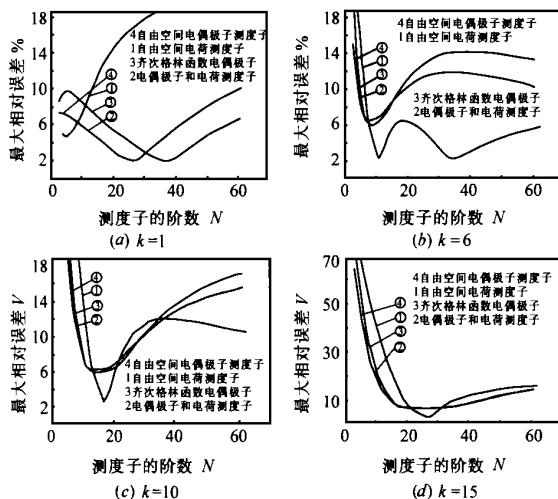


图 3 例 1 的计算结果

$$\max = \max \left(\left| \frac{\text{计算} - \text{解析}}{\text{解析}} \right| \right) \quad (\text{除去电位为 0 的点}).$$

3.2 结果分析

根据图 3 的计算结果可以得到如下一些初步结论:

(1) 当电位分布函数的角频率较小时,第一种方法的误差较为显著,并且随着测试子阶数的增加而变大;

(2) 当电位分布函数的角频率较大时,四种方法的误差相差并不明显,并且第一种方法的误差甚至小于其他方法;但总体看来第一种方法最不稳定;

(3) 第二种和第四种方法的误差始终是一样的,并且当电位分布函数的角频率较大时,第二、四种和第三种方法的误差随着测试子阶数的增加而越来越接近.

为了理解实验中出现的现象,首先假定在图 2 测试环外电位分布为如下的级数:

$$(\cdot, \cdot) = \left(\frac{R_m}{R_m} \right)^k [A_k \cos k + B_k \sin k], \quad \geq R_m \quad (10)$$

当假定电位仅由电荷分布激励时,将式(10)带入式(3)所示积分方程右端,并取自由空间格林函数为积分核,求解该积分方程,得到测试环上的电荷分布的表达式为:

$$(R_m, \cdot) = \left(\frac{k}{R_m} \right) [A_k \cos k + B_k \sin k] \quad (11)$$

而当假定电位仅由电偶极子分布激励时,根据式(4)所示积分方程,当将式(10)带入其右端项,取自由空间格林函数对测试环的法向导数为积分核时,通过求解该积分方程,得到测试环上电偶极子分布的表达式为:

$$(R_m, \cdot) = [A_k \cos k + B_k \sin k] \quad (12)$$

比较式(10)、(11)和(12),若空间的电位的级数表达式中第 k 项为 $\{A_k, B_k\}$,那么测试环上电荷激励的第 k 项应为 $\{k/R_m\}$

$A_k; (k/R_m) B_k\}$;而电偶极子激励的第 k 项应为 $\{A_k, B_k\}$.由此可以看出,电荷激励与测试子的阶数 k 有关.而在前面的计算中测试子的系数都是相同的,由于这时电荷测试子激励对 MEI 系数的贡献与电偶极子测试子激励对 MEI 系数的贡献相比可以忽略,因此出现了数值实验中的结论(3).

数值实验的结论说明在确定 MEI 系数时,第四种方法优势是明显的.首先,不必象第三种方法那样构造关于测试环的齐次格林函数;其次,与第二种方法具有相同的精度;最后,电偶极子的大小与电位的大小直接相关,在同一数量级上.

3.3 MEI 方法的不稳定性和有效性

MEI 方法自提出以来引起了广泛的关注,其理论基础的完善性^[9]使其应用受到限制.但是应指出,该方法对于很多问题却是十分有效的,这不得不使我们对其做进一步的探讨.从图 3 的计算结果也可以看出,最大相对误差最小的测试子的阶数与电位分布的角频率并不完全相等,这说明了该方法的不稳定性.下面以单一导体上的电荷测试子激励产生的电场为例,来说明 MEI 方法的不稳定性和有效性.对于测试环上电荷或电偶极子分布情况的分析与此类似.

文献[10]给出了 MEI 方法的变为解释,在此基础上与文献[9]中关于误差的分析相结合可以得到对 MEI 方法的进一步认识.对于任意导体柱上任意电荷分布 (r) 所产生的电位可以用式(3)表示,将其代入 MEI 方程可以得到

$$(r) \left[\sum_{i=0}^{N-1} C_i G(r_i, r) \right] d = 0 \quad (13)$$

显然,要使 MEI 系数对于导体表面上的任意电荷分布都满足式(13),在理论上必有下列式严格成立(一般情况下 $N=6$)

$$\sum_{i=0}^5 C_i G(r_i, r) = 0 \quad (14)$$

根据格林函数的对称性,上式意味着分别位于节点 i ($i=0, 1, 2, 3, 4, 5$) 处强度为 C_i 的线电荷在任一 r 处产生的电位为零,这显然是不成立的^[9,10].因此,MEI 方法中第三假设是不成立的.但是对于某些特定的电荷分布模式,式(14)严格成立是可能的,文献[10]也验证了这个事实.为了进一步理解

MEI 方法,定义 $\text{null}(r_i) = \sum_{i=0}^5 C_i G(r, r_i)$,它表示零场.这样式(13)就可改写为:

$$(\cdot(r), \text{null}) = 0, \quad \forall (\cdot(r)) \in H(\cdot) \quad (15)$$

其中, $H(\cdot)$ 为导体边界上所有可能电荷分布组成的 Hilbert (内积) 空间,进一步可知: (r) 可用 $H(\cdot)$ 空间基底 $(^{(k)}(r), k=1, 2, \dots)$ 的线性组合表示,可以看出测试子是 $H(\cdot)$ 空间基底的一个子集合.于是变分方程(15)可等效为:

$$(^{(k)}(r), \text{null}) = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

很明显,式(16)是式(13)的简写形式.

(1) 当 $(^{(k)}(r))$ 选取为基底中任意五个元素时,式(16)为五个未知数的五阶方程,解此方程就可以得到 MEI 系数,若实际表面电荷分布可用这五个测试子的线性组合表示,那么它必然与 null 正交,使得式(13)严格成立.一般情况下,将 (r) 分为两部分,即

$$(r) = \text{met}(r) + \text{res}(r) \quad (17)$$

其中 $\text{met}(r)$ 表示实际表面电荷分布中能用测试子线性组合表示的部分, 而 $\text{res}(r)$ 为不能用测试子线性组合表示的部分, 它导致式 (13) 不成立. 为了进行定量描述, 定义 MEI 方程的误差为 $R = \sum_{i=0}^5 C_i$, 那么根据式 (3)、(13) 和 (17) 以及 null 的定义得到:

$$R = \text{null}(r) \text{res}(r) d \quad (18)$$

当测试子集合 $f^{(k)}(r)$, $k=1, 2, 3, \dots, j$ 选取多于五个元素时, 式 (16) 为一矛盾方程组, 可采用最小二乘法求解. 这时, 误差分析变得复杂了, 定量描述不大可能. 但是定性地说, 在这里, 最小二乘法是测试子集合中所有元素对于 null 的最小化过程, 即由式 (16) 或式 (13) 确定的 MEI 系数是对全体“测量”数据的最小平方拟合, 对于某一测试子 $f^{(k)}(r)$, 它的误差 $R_k = \text{null}(r) f^{(k)}(r) d$ 不一定为零, 但比较小; 而对于 $\text{res}(r)$, 它产生的误差较为显著. 如图 4 所示, 考虑带电圆柱金属导体的 R_k , 发现它随测试子阶数的变化与上面的分析基本吻合, 其中导体半径为 2cm, 边界上共有 120 个节点. 截断边界与导体边界之间层数为 2, 径向的步长为 0.05cm.

由图 4 还可以看出, $\text{res}(r)$ 产生的误差虽然较为显著, 但它是振荡的, 这也就是 MEI 方法不稳定的原因.

4 实例计算

为了进一步说明 MEI 方法的有效性, 这里采用本文提出的确定 MEI 系数的第四种方法来计算一个较为复杂的例子. MEI 方法很容易与有限元法或有限差分法相结合, 文献 [2] 和文献 [11] 分别采用有限差分法及有限元法提取矩形多导体传输线的电容矩阵. 有限差分法处理介质分界面较为复杂, 另外

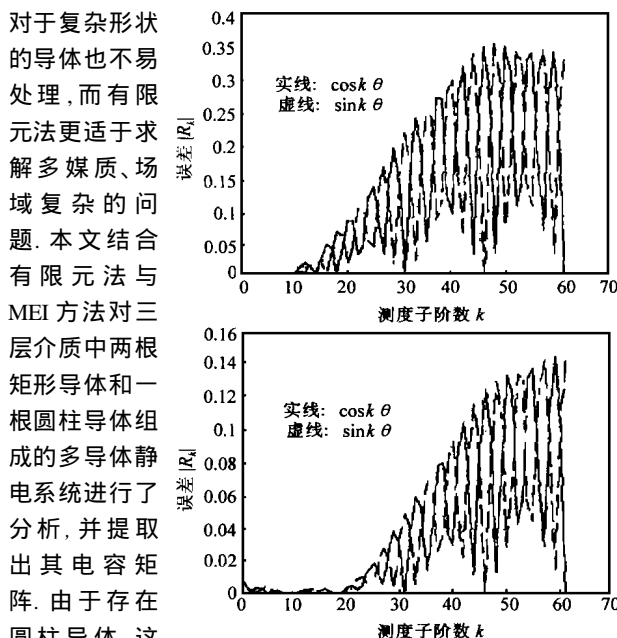


图 4 测试子阶数的变化与 $|R_k|$ 的关系. (a) MEI 系数由 0, 1, 2 阶测试子确定, (b) MEI 系数由 0, 1, 2, ..., 20 阶测试子确定

便.

图 5 中 1 号导体电位为 1V, 其余导体接地.

图 6 为采用有限元网格自适应加密技术后计算得到的等位线图. 采用有限元网格自适应加密技术可以使得网格布局更加合理, 在场变化剧烈的地方剖分很密集而在场变化缓慢的场域剖分相对稀疏, 从而有效地提高计算精度.

表 1 给出了本文方法计算出的电容矩阵, 根据对称性只列出了矩阵的上三角部分. 与文献 [12] 的结果比较发现二者是很接近的, 从而说明了本文方法的有效性. 应该指出, 整体上增加剖分的单元数还会提高计算的精度.

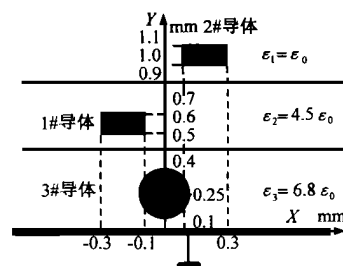


图 5 接地导板上方三层介质中的三根导体传输线

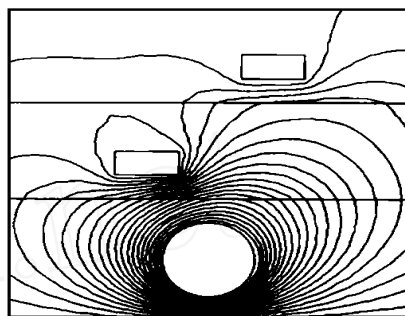


图 6 等位线图

表 1 图 5 所示微带线结构的电容矩阵

导体编号		电容 C_{ij} (pF)	
i	j	本文方法的结果	文献 [12] 的结果
1	1	121.74	124.44
1	2	-10.49	-13.00
1	3	-65.79	-68.25
2	2	30.27	33.40
2	3	6.191	7.191
3	3	343.40	352.00

5 结论

提出了两种确定 MEI 系数的方法, 通过数值实验比较了目前确定 MEI 系数的四种方法, 通过对结果的分析得到了一些有用的结论, 说明了利用自由空间格林函数作为积分核和电偶极子作为测试子激励确定 MEI 系数的优点.

通过理论分析说明了 MEI 方法的不稳定性, 同时, 也说明了该方法的有效性. 最后通过实例计算进一步证明了 MEI 方法的有效性.

郭 飞 1972 年出生, 博士. 主要研究方向为电磁场数值计算、神经网络.

韩社教 1965 年出生, 博士生. 主要研究方向为电磁场数值计算.

(下转第 28 页)

4.4 可预测性

考虑到可预测性的验证不需要很高的精度,因此采用简单的局部预测法.在预测过程中,训练向量取 2000 个,预测向量为 400 个.同时,还计算了误差值,误差计算公式为 $e(k) = |p(k) - v(k)| / |v(k)|$. 其中, $p(k)$ 为预测值, $v(k)$ 为真实值. 30 公里的距离门数据的预测结果如图 5(a) 所示,误差信号如图 5(b) 所示. 一步预测的精度非常高,说明高频回波信号有很好的短期可预测性.图 6(a) 为 30 公里处时域信号和迭代预测信号的比较,图 6(b) 为相应的误差信号.可以看到,长时间的预测误差越来越大,混沌信号短期可预测而长期不可预测的特点.

从以上三个方面的检验结果来看,高频波段海洋回波确实表现了一定的混沌特性,我们完全可以利用混沌动力学方法分析高频波段无线电波与海浪的作用机制,建立高频雷达海洋回波的数学模型,并进一步开展高频波段海洋回波混沌信号处理的研究.

5 结论

本文首先从海洋波动和分形表面两个方面定性的分析了高频波段海洋回波信号发生混沌行为的可能性,并采用实际数据计算了回波信号的混沌特性参数,证明了海洋回波信号具有有限分维数,正的 Lyapunov 指数及短期可预测和长期不可预测的特点,从而得出了高频雷达海洋回波信号呈现混沌特性的结论.

最后需要强调的是,海洋的混沌运动与高频波段无线电波的作用机制的理论研究是有待探讨的课题,这需要有关海洋物理学研究人员的合作.

参考文献

- [1] 周志鑫. 高频地波雷达海洋信息提取, 哈尔滨工业大学博士论文, 1997
- [2] S. Haykin, Detection of signals in chaos. Proceeding of the IEEE, 1995, 83(1): 94 ~ 122
- [3] P. J. Olver and D. H. Sattinger. Solution in Physics, Mathematics, and Nonlinear Optics. New York: Springer-Verlag, 1990
- [4] J. Chen. The use of fractals for modeling EM waves scattering from rough sea surface. IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing, 1994, 34(4): 966 ~ 972
- [5] A. R. Osborne. Nonlinear Fourier structure of complex surface wave trains: A search for integrable and chaotic effects in the dynamics of ocean waves. Office of Naval Research Report, Contract No. N00014-92-J-1330, 1995
- [6] E. J. Kostelich and T. Schreiber. Noise reduction in chaotic time series data: A survey of common methods. Phys. Rev. E, 1993, 48: 1752 ~ 1783
- [7] H. F. von Bremen. An efficient QR based method for the computation of Lyapunov exponents, Phys. D, 1997, 101: 1 ~ 16



董华春 1974 年出生, 助教, 1996 年开始攻读博士学位. 研究方向有混沌信号处理, 混沌神经网络, 高频雷达数据处理等.

宗成阁 (见本期第 8 页)



权太范 1949 年出生, 教授, 哈尔滨工业大学电子工程研究所副所长, 博士生导师. 十几年来一直从事高频雷达研究, 曾获得国家科技进步一等奖, 航天部科技进步一等奖. 研究方向有雷达信号与数据处理、多站数据融合、神经网络——模糊推理, 高频雷达海态遥感等.

(上接第 60 页)

参考文献

- [1] K. K. Mei, Rafacl Pous and Zhaoqing Chen. Measured Equation of Invariance: A New Concept in Field Computations. IEEE Trans on AP. 1990, 42(3): 320 ~ 327
- [2] 洪伟, 朱震海, Wagen W. M. Dai. 一种提取多层介质多导体互连线电磁参数的快速算法: 有限差分-不变性测试方程法. 电子学报, 1997, 25(9): 37 ~ 42
- [3] 马西奎. 电磁场理论及应用, 西安: 西安交通大学出版社, 2000
- [4] Wei Hong, Yao Wu Liu, Kenneth K. Mei. Application of the measured equation of invariance to solve scattering problems involving a penetrable medium. Radio Science, 1994, 29(4)
- [5] 钱伟长. 格林函数和变分法在电磁场和电磁波计算中的应用. 上海: 上海科学技术出版社, 1989
- [6] 符果行. 电磁场中的格林函数法. 北京: 高等教育出版社, 1993
- [7] J. D. Jackson. 朱培豫译. 经典电动力学, 上册. 北京: 人民教育出版社, 1978
- [8] 复旦大学数学系主编. 数学物理方程(第二版). 上海: 上海科学技术出版社, 1978
- [9] 文舸一. 测试不变方程法及其应用. 电子学报, 1995, 23(3): 73 ~ 77
- [10] Jovan O. Jevtic, Robert Lee. A Theoretical and Numerical Analysis of Measured Equation of Invariance. IEEE Trans on AP. 1994, 42(8): 1097 ~ 1105
- [11] 赵阳, 王蕴仪. 超大规模集成电路互连算法研究. 中国科学(E 辑). 1998, 28(2): 125 ~ 129
- [12] Cao Wei, Roger F. Harrington, Joseph R. Mautz, et al. Multiconductor Transmission Lines in Multilayer Dielectric Media. IEEE Trans on MTT. 1984, 32(4): 439 ~ 450