

一种新的二维非线性提升小波变换方法

李宏亮,刘贵忠,侯兴松,李永利,张宗平

(西安交通大学电子与信息工程学院信息与通信工程系,陕西西安 710049)

摘 要: 根据图像的统计信息,本文构造了一种新的非线性算子即统计算子,提出了基于该算子的一种新的非线性提升小波分析方法.使图像经过该方法变换以后,在无量化失真的前提下,以较大概率取得零高频系数.本文将该方法与现存文献中所提出的非线性形态学小波等分析方法,进行了标准图像的测试分析,实验结果显示,利用本文所提出的基于统计算子的提升小波分析的方法得到的高频子带的熵都低于其它几种非线性小波变换,取得了很好的分析结果.

关键词: 非线性小波变换;统计算子;无失真图像编码;形态学小波

中图分类号: TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 01-0021-04

A New Method for 2D Nonlinear Lifting Wavelet Transform

LI Hong-liang, LIU Gui-zhong, HOU Xing-song, LI Yong-li, ZHANG Zong-ping

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shanxi 710049, China)

Abstract: Nonlinear multiresolution signal decomposition schemes is a new tool developed over the past years. The lifting scheme introduced by Sweldens also provides a useful way to construct nonlinear wavelet decompositions freely. In this paper, a new method of nonlinear wavelet decomposition is proposed, which is suited for the task of image compression, especially for lossless coding applications. It is based on a certain statistical operator defined here. It can be used to realize the integer-valued wavelet transform, which can avoid quantization with the image detail signals being zero (or almost zero) at the smooth graylevel variation areas at big probability. Numerical results show that the entropy of the coefficients in the transform domain obtained with this new method is smaller than that obtained with other nonlinear transform methods.

Key words: nonlinear wavelet transform; statistical operator; lossless image coding; morphological wavelet

1 引言

在传统的基于线性小波变换的图像压缩编码方法中,对图像进行不同水平的塔式分解,得到图像在各个频带中的小波系数,使得图像的主要能量集中在低频区域.根据得到的具有稀疏特性的高频小波系数,再利用各种方法进行编码.在此过程中,不可避免地要对小波系数进行量化,因而引入了编码的量化误差.此外,由于线性小波分解中低通滤波器的平滑特性,也会造成图像的边缘信息的损失.近几年来发展了针对线性小波的非线性扩展,有效避免了由于小波系数的量化而带来的误差,为图像的编码尤其是无失真图像编码提供了很好的变换手段.同时,非线性小波分解还更好地保留了图像的边缘信息.

由 Sweldens 引入的提升方法^[1]提供了一种有效的构造非线性小波分解的方法.文[2]中, Goutsias 和 Heijmans 对信号的非线性金字塔分解方法进行了详细的介绍,也为信号分析与综合的非线性金字塔的构造提出了一个一般性框架,同时给出了若干金字塔分解的例子,比如形态学骨架分解,形态学 Haar 金字塔等.文[3]中,他们在对非线性小波分解的发展详细介绍的同时,主要提出了一个公理化的线性和非线性小波分解的框架,讨论了基于数学形态学的小波,为借助于提升方法构造非线性形态学小波给出了一般且灵活的方法.文[4]

中, Cha 和 Chaparrro 运用形态学算子和一系列结构函数,提出了一种自适应的信号表示方法.该文中例举了两种情况:形态学多项式表示和形态学小波表示.文献[6][7][8]讨论了另外一种非线性的多分辨信号分析方法:非线性形态学尺度空间的理论,并利用形态学算子求解一类非线性差分等式.

前述文献提出了多种非线性小波分析的方法和一般性的结论.本文主要从二维信号角度出发,针对非线性小波分解方法的构造进行研究.其中的一些非线性算子包括:形态学的腐蚀和膨胀算子、中值算子和统计算子.本文讨论了文献[3]中所提出的非线性形态学小波分析方法在二维图像编码中的应用.实验研究表明,文[3]中所提出的基于形态学的最大值提升小波变换,保留了图像的几何信息,同时在图像的灰度值缓变区域的高频系数等于零(或几乎等于零).但是,文[3]在对二维图像信号处理时,采用了对图像的行列依次进行变换的手段,本质上,仍然是对一维信号的提升小波变换.这样就势必忽略了图像本身的统计特性.本文就是从图像的统计特性出发,根据提升算法,提出一种新的二维非线性小波变换方法,可使得得到的高频带小波系数以最大概率等于零(或几乎等于零),更有利于图像的数据压缩.通过与文献[3]中的方法的对比实验,证明本文提出的方法在图像压缩中能得到更加令人满意的结果.

收稿日期:2001-05-12;修回日期:2002-05-15

基金项目:国家教育部博士点基金(No. 2000069828);国家教育部骨干教师基金(2000年度)项目支持

2 基于图像统计特性的非线性提升小波变换

2.1 提升方法

由 Sweldens 提出的提升方法就是对小波变换的分解和综合算子加以修正,以得到对于不同信号的最佳分析结果.人们可以利用这种方法去构造多种非线性小波分解来满足不同场合的需要.提升方法包括两种形式:(a) 预测提升(prediction lifting):用来修改信号高频分解算子和信号低频综合算子;(b) 更新提升(update lifting):用来修改信号低频分解算子和信号高频综合算子.

为了能更加清楚地理解这两种形式的提升过程,首先,考虑信号空间 V_j ,这里 j 的范围可取有限或无限的整数集合.假定有两种算子,一种是把空间 V_{j-1} 映射到 V_j 的分解算子 d_j ,一种是把 V_j 把映射回到 V_{j-1} 空间的综合算子 s_j .这里,向上的箭头表示相应的算子把信号映射到更高水平,而向下的箭头表示相应的算子把信号映射到更低水平.分解算子 d_j 用来减少信号 $x_{j-1} \in V_{j-1}$ 的信息,产生一个分解后的 V_j 空间的低频信号 $x_j = d_j(x_{j-1})$.综合算子 s_j 把低频信号映射回到 V_j 空间的 $x_{j-1} = s_j(x_j)$.分解算子 d_j 产生一个分解后的 W_j 空间的高频信号 $y_j = d_j(x_{j-1})$.综合算子 s_j 把高频信号映射回到 V_{j-1} 空间的 $e_{j-1} = s_j(y_j)$.如果 $x_{j-1} \in V_{j-1}$, $x_j = d_j(x_{j-1})$, $y_j = d_j(x_{j-1})$,那么通过综合过程有: $x_{j-1} = s_j(x_j) + s_j(y_j)$ 它被重构得到.

$$(x)(m, n) = x(2m, 2n) \quad x(2m+1, 2n) \quad x(2m, 2n+1) \quad x(2m+1, 2n+1) \quad (5)$$

$$(x)(m, n) = (v(x)(m, n), \quad h(x)(m, n), \quad d(x)(m, n)) \quad (6)$$

$$v(x)(m, n) = \frac{1}{2} (x(2m, 2n) - x(2m, 2n+1) + x(2m+1, 2n) - x(2m+1, 2n+1)) \quad (7)$$

$$h(x)(m, n) = \frac{1}{2} (x(2m, 2n) - x(2m+1, 2n) + x(2m, 2n+1) - x(2m+1, 2n+1)) \quad (8)$$

$$d(x)(m, n) = \frac{1}{2} (x(2m, 2n) - x(2m+1, 2n) - x(2m, 2n+1) - x(2m+1, 2n+1)) \quad (9)$$

其中, v , h 和 d 分别表示垂直、水平和对角的分解.这里“ \wedge ”表示取最小,而“ \vee ”表示取最大.

(b) 提升的形态学 Haar 小波变换(耦合小波变换)

预测算子 $d_0: V_0 \rightarrow W_0$ 为:

$$(x)(n) = x(n) - x(n+1) \quad (10)$$

分解算子为:

$$p(x)(n) = x(2n) - x(2n+1) \quad (11)$$

$$p(x)(n) = 2(x(2n) - x(2n+1)) - (x(2n) - x(2n+1)) + (x(2n+2) - x(2n+3)) \quad (12)$$

(c) 基于中值算子的提升

预测算子:

$$(x)(n) = x(n) \quad (13)$$

更新算子:

$$(y)(n) = -\text{median}(0, y(n-1), y(n)) \quad (14)$$

分解算子:

$$p_u(x)(n) = x(2n) + \text{median}(0, x(2n-1) - x(2n-2), x(2n+1) - x(2n)) \quad (15)$$

$$p_u(x)(n) = x(2n+1) - x(2n) \quad (16)$$

预测提升构造了一个预测算子和一个差分算子.考虑一个耦合的小波分解方法,由低频分解算子 $d_j: V_{j-1} \rightarrow V_j$, 高频分解算子 $d_j: V_{j-1} \rightarrow W_j$ 和综合算子 $s_j: V_j \times W_j \rightarrow V_{j-1}$ 组成.在数据压缩中总是希望小波变换后产生小的高频系数 $y_j = d_j(x_{j-1})$.基于这种思想,可通过利用包含在信号 $x_j = s_j(x_{j-1})$ 中的信息来减小高频系数 y_j ,也就是采用下面的预测和差分算子:

$$d_j: V_j \rightarrow W_j \quad (1)$$

$$y_j = y_j - (x_j) \quad (2)$$

预测提升的主要目的是利用 V_j 中的信息来修正 W_j ,使得高频系数满足要求.在图像压缩中,就是希望得到的高频系数尽可能小,以便采用较小的码率对数据进行压缩.

更新提升就是不修改信号的高频系数 y_j ,而选用 W_j 中的信息来修正 V_j 中的低频信号 x_j .也就是构造了一个更新算子和差分算子,分别为:

$$s_j: W_j \times V_j \rightarrow V_j \quad (3)$$

$$x_j = x_j - (y_j) \quad (4)$$

一般选择更新算子要求信号 x_j 满足某种规定的限制.

下面给出文献[3]中所列举和给出的几种非线性小波变换方法:

(a) 二维形态学 Haar 小波变换

(d) 最大值提升方法

$$(x)(n) = x(n) - x(n+1) \quad (17)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

$$(y)(n) = - (0 - y(n-1) - y(n)) \quad (18)$$

2.2 基于图像统计信息的一种非线性小波变换方法

贝尔实验室的 Kretzmer^[9]对相邻像素间的差值进行了测

定,由其分布密度曲线可知,相邻像素振幅的差大部分集中于零差值附近.这也就说明了相邻像素间有较大的相关性.由此可知,如果能充分地考虑图像的这种统计特性,借助于相邻像素点之间的强相关性,就可通过提升的非线性小波分解的方法,使高频小波系数以最大概率等于零,或者接近于零值.本文所提出的这种提升的非线性小波变换方法,就是基于图像的这种内在像素之间的信息所构造的.为了能更加清楚地阐述本文所提出的方法,首先介绍下面几个概念.

像素的邻域 对于图像中的某一像素点 x 如图 1 所示,那么称图中 x_{01} 、 x_{10} 、 x_{12} 、 x_{21} 是像素点 x 的 4-邻域,为方便起见,记为: $N_{4C}(x)$. 而 x_{00} 、 x_{02} 、 x_{20} 、 x_{22} 为像素点的 4-对角邻域,记为: $N_{4D}(x)$.

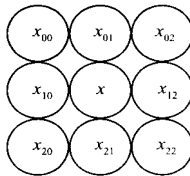


图 1 像素 x 的邻域

统计算子 $\text{stat}(X)$ 其中 X 表示数组 $\{x_i\}_{i=1}^4$. 本文构造下面的统计算子:

$$\text{stat}(X) = \begin{cases} \text{median}(X) & \text{如果 } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ 互不相等} \\ \min(x_1, x_2, x_3, x_4) & \text{如果 } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ 有两对相等} \\ \text{取相等的值} & \text{如果 } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ 仅有一对相等, 或至少有三个相等} \end{cases} \quad (21)$$

根据式 (21) 所构造的算子,利用提升小波分析方法就得到了本文中所提出的新的非线性小波分析方法.

预测算子:在采用下面构造的高频分解算子 v 进行分解时,采用的预测算子是:

$$(x)(m, n) = \text{stat}(N_{4D}(x(m, n))) \quad (22)$$

而在采用下面构造的高频分解算子 h 和 d 进行分解时,采用的预测算子是:

$$(x)(m, n) = \text{stat}(N_{4C}(x(m, n))) \quad (23)$$

二维低频和高频分解算子:

$$(x)(m, n) = x(2m, 2n) \quad (24)$$

$$(x)(m, n) = (v(x)(m, n), h(x)(m, n), d(x)(m, n)) \quad (25)$$

$$v(x)(m, n) = x(2m+1, 2n+1) - \text{stat}(N_{4D}(x(2m+1, 2n+1))) \quad (26)$$

$$h(x)(m, n) = x(2m, 2n+1) - \text{stat}(N_{4C}(x(2m, 2n+1))) \quad (27)$$

$$d(x)(m, n) = x(2m+1, 2n) - \text{stat}(N_{4C}(x(2m+1, 2n))) \quad (28)$$

二维低频和高频综合算子:

$$(x)(2m, 2n) = x(m, n) \quad (29)$$

$$(x)(2m+1, 2n) = (x)(2m, 2n+1) = (x)(2m+1, 2n+1) = 0 \quad (30)$$

$$(x)(2m+1, 2n+1) = y_v(m, n) + \text{stat}(N_{4D}(x(2m+1, 2n+1))) \quad (31)$$

$$(x)(2m, 2n+1) = y_h(m, n) + \text{stat}(N_{4C}(x(2m, 2n+1))) \quad (32)$$

$$(x)(2m+1, 2n) = y_d(m, n) + \text{stat}(N_{4C}(x(2m+1, 2n))) \quad (33)$$

$$(x)(2m, 2n) = 0 \quad (34)$$

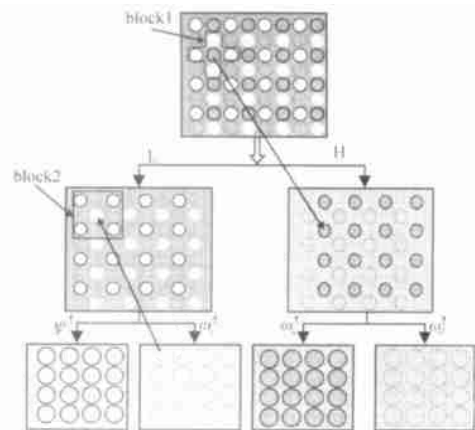


图 2 8 × 8 像素点的基于统计算子非线性小波分解过程

为了更加清楚的了解本文提出的统计算子的分解过程,以 8 × 8 像素点块为例,给出了该算法变换的示意过程,如图 2 所示.首先,对 8 × 8 像素块进行类似于 lazy 小波的二维抽取得到了低频(L)系数和低频(H)系数.而后对低频(L)系数采用本文构造的二维低频分解算子 v 和低频分解算子 h 进行非线性小波变换,就得到了低频子带(LL)的系数和高频子带(LH)的系数.比如高频系数 $y_v(0, 0)$ 就是由 Block2 中像素点经分解算子 v 作用得到,即:

$$\begin{aligned} y_v(0, 0) &= x(1, 1) - \text{stat}(N_{4D}(x(1, 1))) \\ &= x(1, 1) - \text{stat}(x(0, 0), x(0, 2), x(2, 0), x(2, 2)) \end{aligned}$$

而对高频(H)系数采用本文构造的二维高频分解算子 h 和低频分解算子 d 进行非线性小波变换,就得到了高频子带(HL)的系数和高频子带(HH)的系数.比如高频系数 $y_h(1, 0)$ 就是由 Block1 中像素点经分解算子 h 产生,即:

$$\begin{aligned} y_h(1, 0) &= x(2, 1) - \text{stat}(N_{4C}(x(2, 1))) \\ &= x(2, 1) - \text{stat}(x(1, 1), x(2, 0), x(2, 2), x(3, 1)) \end{aligned}$$

在对图像进行基于统计算子的非线性小波变换时,要注意选择不同分解算子, v 、 h 或 d . 否则就不能达到完备重构.需要重构图像时,采用的综合算子的次序为:

$$v \quad (h \text{ 或 } d).$$

3 实验研究

本文选取了三种标准测试灰度图像,如表 1 所示.其中表 1 以及后面所提及的熵的计算采用了信息论中熵的定义:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^M P_i \log_2 P_i \quad (35)$$

式中 $H(X)$ 代表熵, P_i 代表第 i 个消息出现的概率.

对 Lena、Goldhill、Barbara 三幅灰度图,本文分别选取了前面四种非线性小波分析算法,包括:二维形态学 Haar 小波变换、提升的形态学 Haar 小波变换、基于中值算子的提升小波变换、最大值提升方法的小波变换.下面文中分别以算法 (a)、(b)、(c) 和 (d) 表示.同时将上面四种算法以及整数 Haar 小波变换与本文所提出的非线性统计小波变换进行实验对

比.统计出了图像经不同算法所得到的第一水平分解后的高频子带中含零总数,如表 2 所示.并且计算了变换后的高频子带的信息熵,结果如表 3 所示.从计算的结果可以看出,采用本文提出的基于统计算子的提升小波变换方法,相应的高频子带的熵在列举的几种非线性方法中最低,而且高频子带中且所含零的个数也最多.这也验证了本文构造的算子的正确性,采用该方法不仅可取得对图像的整数非线性小波分解,而且可使分解后的细节以较大的概率等于零或几乎等于零.这些特性对于图像的无损编码十分有利.另外,从计算的结果也可看出文献[3]中所提出的最大值提升小波变换具有较好的分析结果,高频子带的熵也较小,同样也与文献[3]的分析结果相一致.

表 2 图像经不同算法所得到的
高频子带中含零总数

	Lena	Goldhill	Barbara
算法 a	2850	9696	10164
算法 b	1613	5355	5884
算法 c	3726	13197	13680
算法 d	3971	14387	14881
整数 Haar 变换	4351	15141	15832
本文算法	4362	16217	15956

表 1 三种标准测试图像的规格
及其原始熵

	尺寸	灰度值	原始熵
Lena	256 × 256	256	7.4457
Goldhill	512 × 512	256	7.4778
Barbara	512 × 512	256	7.6321

表 3 图像经不同算法所得到的
高频子带的熵

	Lena	Goldhill	Barbara
算法 a	5.9397	5.8259	6.3059
算法 b	6.7879	6.6484	7.0888
算法 c	5.4376	5.2645	5.8337
算法 d	5.2400	5.0158	5.5280
整数 Haar 变换	5.2736	5.1253	5.6296
本文算法	5.1147	4.9166	5.4807



图 3 Barbara 图像及其对比结果

以 Barbara 图为例,分别对其进行最大值提升小波变换,以及本文提出的统计提升小波变换. Barbara 的原始图像如图 3(a) 所示.图 3(b) 和图 3(c) 分别为最大值提升形态学小波变换和本文算法的提升小波变换的效果图.

4 结论

本文根据图像的统计信息,构造了一种新的非线性算子:统计算子,并提出了基于这种统计算子的提升非线性小波变换方法.把该方法与其它非线性小波变换方法和文献[3]中所提出的最大值提升形态学小波分析进行了实验对比,结果显示,对于二维的图像信号本文所提出的方法取得了更好的分析结果,使变换以后图像的平滑区域中的系数以较大的概率等于零或接近于零.

本文方法同样实现了整数非线性小波变换.因此,它不仅可用在一般的图像编码中,尤其是用于一些要求无失真压缩的图像编码中.对图像的变换后的系数,即可采用一般的嵌入式编码,也可利用文献[5]所提出的基于熵的三种编码方式,对系数进行有效的编码.这将在以后的文章中详细讨论.

非线性小波变换在图像压缩编码中的应用仍然处于发展

阶段,有许多问题尚需进一步解决,本文所提出的方法也仅仅是在该领域中进行的一点探索性研究,还有许多不足之处,比如在保留的低频子带中的系数仍是采用简单的 lazy 小波变换的系数,并未考虑对其进行更新提升.这也需要今后对其进行进一步的完善.

参考文献:

- [1] W Sweldens. The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet Constructions [A]. Proc. SPIE Wavelet applications signal image processing [C]. :SPIE,1995.
- [2] John Goutsias, Henk J A M Heijmans. Nonlinear multiresolution signal Decomposition schemes-Part : Morphological pyramids [J]. IEEE Trans. Image Processing, 2000, 9(11): 1862 - 1876.
- [3] Henk J A M Heijmans, John Goutsias. Nonlinear multiresolution signal decomposition schemes-Part : Morphological wavelets [J]. IEEE Trans. Image Processing, 2000, 9(11): 1897 - 1913.
- [4] Hyungtae Cha, Luis F Chaparrro. Adaptive Morphological Representation of signals: Polynomial and wavelet methods [J]. Multidimensional systems and signal processing. 1997, 8(3): 249 - 271.
- [5] Amir Said, William A Pearlman. An image multiresolution representation for lossless and lossy compression [J]. IEEE Trans. Image Processing, 1996, 5(9): 1303 - 1310.
- [6] Rein van den Boomgaard, Arnold Smeulders. The morphological structure of images: the differential equations of morphological scale-space [J]. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 1994, 16(11): 1101 - 1113.
- [7] Roger W Brockett, Petros Maragos. Evolution equations for continuous-scale morphological filtering [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1994, 42(12): 3377 - 3385.
- [8] Paul T Jackway, Mohamed Deriche. Scale-space properties of the multiscale morphological dilation-erosion [J]. IEEE Trans. Pattern Analysis and machine intelligence, 1996, 18(1): 38 - 51.
- [9] E R Kretzmer. Statistics of Television Signals, The Bell System Technical Journal [R]. 1952.

作者简介:



李宏亮 男, 1970 年 8 月出生于河南许昌, 西安交通大学电信学院在读博士生, 主要研究兴趣包括: 小波分析、时频分析、非平稳信号处理、多媒体通信、视频图像编码. e-mail: hlli@mailst.xjtu.edu.cn



刘贵忠 男, 1962 年 6 月出生于陕西延安, 1989 年 6 月获荷兰 Eindhoven 大学博士学位, 现为西安交通大学电子与信息学院教授、博士生导师, 主要从事非平稳信号的分析与处理、音视频数据压缩、模式识别、反演等方面的理论与应用研究.