

多重网格技术与波恩迭代法相结合的反演新方法

赵延文, 聂在平

(电子科技大学电子工程学院, 四川成都 610054)

摘 要: 本文将多重网格技术与波恩迭代法(BIM)相结合, 利用时域散射数据对二维无耗非均匀介质剖面进行了反演. 在反演迭代过程中, 待反演目标区域的离散网格由粗逐渐变细. 由于在反演的初期, 目标区域离散网格较粗, 离散反演积分方程所得到的矩阵方程的维数较小、条件数较低, 使得该方法具有稳定性好、更容易收敛到真解的特点. 通过反演实例表明, 该方法极大地降低了反演过程的计算量, 与传统的 BIM 方法相比能更精确地反演高对比度的散射目标. 更为重要的是本文方法简单可行, 可以与其它任何反演方法相结合.

关键词: 时域逆散射; 波恩迭代法; 多重网格技术

中图分类号: TN011

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2003) 02-0171-04

A Novel Inversion Method Combining Born Iterative Method with Multi-Grid Technique

ZHAO Yan-wen, NIE Zai-ping

(College of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

Abstract: A novel inversion method combining the Born iterative method (BIM) with multi-grid technique is developed to solve the nonlinear inverse scattering problem for two-dimensional lossless dielectric inhomogeneities using time-domain scattering data. In the inversion procedure, the size of the discretization grid inside objects is reduced gradually. In the previous inversion procedure, because the condition number and dimension number of the matrix obtained by discretizing the integral equation are relatively small, this method has a good robustness and ability to converge more easily to the true profile. Several examples are given to show that this method reduces vastly computational time of the inversion procedure and can accurately reconstruct the higher-contrast scattering object than that of the BIM. It is more important that this method has the simplicity and can be used to other arbitrary inverse scattering method.

Key words: inverse scattering in time-domain; Born iterative method; multi-grid technique

1 引言

逆散射方法可以分两大类, 一类是基于一阶波恩(Born)或里托夫(Rytov)近似的线性反演方法^[1~4], 另一类是非线性反演方法^[5,6]. 线性反演方法数学原理简单, 但仅仅适用反演小尺寸散射目标或弱散射目标^[7]; 非线性反演方法数学原理较为复杂, 可以克服一阶线性反演方法的缺点, 能够反演较高对比度或较强散射的目标, 但是其计算量较大. 最初的非线性反演方法首先求出散射体内部的电磁场, 然后代入关于测量散射场的积分方程以寻求逆散射问题的解^[8]; 为了克服该方法所具有非常严重的病态特征, 提出了伪反演技术(pseudoinversion technique)^[9]; 另外的一种非线性反演方法就是将逆散射问题转化为一优化问题, 然后采用牛顿迭代法(Newton-type iterative method)^[10]或修正共轭梯度法(modified gradient

method)^[11]求解. 最近, 对比源反演方法(contrast source inversion method)的提出进一步改进了修正共轭梯度法^[12].

本文在波恩近似的基础上, 结合多重网格技术^[13], 利用时域散射数据对二维无耗散射目标进行了迭代反演. 在迭代反演过程的初期, 我们将反演目标区域的离散网格划分得较粗. 随着迭代反演的进行, 重构的目标剖面越来越接近原来的真实剖面, 目标区域离散网格的划分也越来越细. 通过反演实例表明, 该方法表现出了比 BIM 迭代法具有更好的稳定性; 既能够反演更高对比度的散射目标, 还可以减少反演过程的计算时间.

2 公式

若考虑的问题为二维问题(如图1), 媒质的介电常数 $\epsilon(x, y)$ 为 x 和 y 的函数, 并假定介质为无耗介质. 假设激励

收稿日期: 2002-05-18; 修回日期: 2002-09-28

基金项目: 国家自然科学基金(No. 49874032)

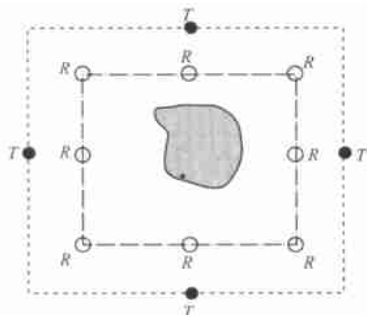


图1 数据获取情况, R 和 T 分别代表接收和激励

源为指向 z 轴方向的无限长脉冲线电流源 $J_z(x, y, t)$, 则其产生的电场满足标量波动方程,

$$\nabla^2 E_z(x, y, t) - \mu(x, y) \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_z(x, y, t) = \mu \frac{\partial}{\partial t} J_z(x, y, t) \quad (1)$$

由上式可得电场所满足的时域积分方程为:

$$\begin{aligned} E_z^{scat}(x, y; x', y', t) \\ = -\mu \int_{-\infty}^{\infty} dt \iint G(x, y; x', y'; t, t') E_z^{inc}(x', y', t') dx' dy' \end{aligned} \quad (2)$$

其中带上标 t 的坐标 (x', y') 表示激励源的位置坐标, 散射场 $E_z^{scat}(x, y; x', y', t) = E_z(x, y; x', y', t) - E_z^{inc}(x, y; x', y', t)$, $G(x, y; x', y'; t, t')$ 为时域标量格林函数, $(x, y) = (x, y) - b$ 为待求的目标函数, b 为均匀背景介质, 而入射场为:

$$E_z^{inc}(x, y; x', y', t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \iint G(x, y; x', y'; t, t') \mu \frac{\partial}{\partial t} J_z(x', y', t') dx' dy'$$

在离散方程(2)时需要计算的对时间的积分非常费时, 同时电场对时间的二阶导数将导致数值计算的不稳定性. 若对方程(2)两边进行快速傅立叶变换(FFT), 不但可以将时间卷积关系变成乘积关系, 而且不必再对电场求二阶导数. 于是通过傅立叶变换, 由方程(2)可得,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z^{scat}(x, y; x', y'; j) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \iint G(x, y; x', y'; j) \tilde{E}_z^{inc}(x', y', j) dx' dy', \\ j = 1, 2, \dots, N_s \end{aligned} \quad (3)$$

其中, 散射场 $\tilde{E}_z^{scat}(x, y; x', y'; j) = \tilde{E}_z(x, y; x', y'; j) - \tilde{E}_z^{inc}(x, y; x', y'; j)$, N_s 为时间取样的个数.

假设有 N_R 个接收、 N_S 个时间取样、 N_T 个激励, 且 $i = 1, 2, \dots, N_R, j = 1, 2, \dots, N_S, k = 1, 2, \dots, N_T$. 由于在目标区域内的电场 $\tilde{E}_z(x, y; x', y'; j)$ 和目标函数 (x, y) 均是未知的, 为了数值求解目标函数, 将式(3)中目标区域内的电场采用波恩近似: $\tilde{E}_z(x, y; x', y'; j) \approx \tilde{E}_z^{inc}(x, y; x', y'; j)$, 并将目标函数离散成,

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{N_p} f_n(x, y) \quad (4)$$

其中 N_p 表示目标区域被离散成的未知数的个数, 而 f_n 为一

已知基函数(本文取单位脉冲函数). 这样方程(3)就可以离散成矩阵方程

$$A \cdot x = b \quad (5)$$

其中

$$b = (E_{z, (1,1,1)}, E_{z, (1,1,2)}, \dots, E_{z, (1,2,1)}, E_{z, (1,2,2)}, \dots, E_{z, (N_R, N_S, N_T)})^T \quad (6)$$

$$x = (1, 2, 3, \dots, N_p)^T \quad (7)$$

矩阵 A 的元素为,

$$A_{(i,j,k), n} = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \iint G(x_i^r, y_j^r; x, y; j) f_n(x, y) \cdot \tilde{E}_z^{inc}(x, y; x_k^r, y_k^r; j) dx dy \quad (8)$$

其中 S_n 是展开函数 $f_n(x, y)$ 不为零区域的面积. 由帕萨维尔(Parseval)定理和吉洪诺夫(Tikhnov)正则化方法, 为求解出未知的目标函数, 需要极小化下列代价函数(cost function)^[2,3],

$$C = \|b - A \cdot x\|^2 + R \cdot \|x\|^2 \quad (9)$$

其中 λ 为正则化参数, R 为正则化矩阵(本文取单位矩阵). 极小化代价函数(9)可以得到,

$$(A^* \cdot A + R^* \cdot R) \cdot x = (A^* \cdot b) \quad (10)$$

其中上标 $*$ 代表共轭转置. 矩阵方程(10)的求解可以采用共轭梯度(CG)方法.

为了评估重建结果的精确程度, 我们定义散射场数据的计算值与测量值之间的相对剩余误差 RRE 为:

$$RRE = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N |(\tilde{E}_z^{scat})_k^n - (E_z^{meas})_k|^2}{\sum_{k=1}^N |(E_z^{meas})_k|^2}} \quad (12)$$

其中 \tilde{E}_z^{scat} 为散射场的测量值, $(\tilde{E}_z^{scat})^n$ 为第 n 次迭代后散射场的计算值; 同时定义目标区域内介质分布的重构剖面与真实剖面之间的相对均方根误差 MSE 为:

$$MSE = \frac{\sum_{(x,y)} |(x, y) - {}^n(x, y)|^2}{\sum_{(x,y)} |(x, y)|^2} \quad (13)$$

其中 (x, y) 为目标区域内介质分布的真实剖面, ${}^n(x, y)$ 为第 n 次迭代后介质分布的重构剖面.

3 多重网格技术及反演结果分析

为了得到一定的反演精度, 目标区域离散网格的剖分尺寸一般应取得比较小, 而此时我们所得到的矩阵方程(10)的系数矩阵 $(A^* \cdot A + R^* \cdot R)$ 的阶数就变得相对较大, 这使得其条件数

$$\text{cond}(A^* \cdot A + R^* \cdot R) = \frac{\lambda_{\max}(A^* \cdot A + R^* \cdot R)}{\lambda_{\min}(A^* \cdot A + R^* \cdot R)} \quad (14)$$

也随之变坏. 系数矩阵 $(A^* \cdot A + R^* \cdot R)$ 的条件数是按 $O(N_p^2)$ 的速率增加的, 再加上由于逆散射问题本身所具有的病态特征和非唯一性, 使得矩阵方程(10)的求解稳定性较差且在采用迭代方法求解的收敛速度较慢.

基于多重网格技术, 本文首先将整个目标区域内待反演的目标函数作为一个未知量, 通过波恩迭代法近似求出目标函数的平均值, 此时方程(10)系数矩阵的条件数为 1, 它的求解总是稳定的. 然后随着迭代反演的进行, 目标剖面越来越靠近真实剖面, 目标区域的离散网格也逐渐由粗变细. 在迭代反

演的初期,目标区域内的计算场与实际的总场相差较大,但是由于目标区域的网格划分较粗,离散积分方程所得到的矩阵方程的维数较小、条件数也较小;随着反演迭代次数的增加,虽然由于目标区域的网格划分越来越细,所得到的矩阵方程(10)的维数越来越大,其条件数也随之增加,但因为目标区域中的计算场越来越靠近真实的总场,逆散射问题所具有的病态特征和非线性特征却有所降低,其矩阵方程(10)仍然保持了较小的条件数。所以本方法大大提高了波恩迭代反演方法的稳定性,与传统的波恩迭代方法相比,能够得到更接近于原真实剖面的重构剖面。同时利用共轭梯度法(CG)求解方程(10)的计算量也大为减少,一方面由于反演迭代的初期,离散目标函数的未知量较少,得到的矩阵方程(10)的维数较小,其求解的计算量大为减少;另一方面矩阵方程(10)的条件数较低,共轭梯度迭代求解方法的收敛速度也较快。

在正演问题中,我们利用 FDTD 方法计算的散射场作为反演算法的输入数据,并且采用了完全匹配层(PML)来截断 FDTD 算法的求解空间,极大地降低了截断边界的反射,提高了计算精度和计算速度。求解空间分为 101×101 差分网格,网格的大小为 $x = y = 0.003\text{m}$,而重建区域(目标区域)占据 8×8 个网格的方形区域。背景介质设为自由空间,并假设介质为非铁磁性物质即 $\mu = \mu_0$ 。采用的 z 轴方向的脉冲线电流源为

$$J_z(x, y) = I(t) \delta(x - x_k) \delta(y - y_k), k = 1, \dots, N_T \quad (15)$$

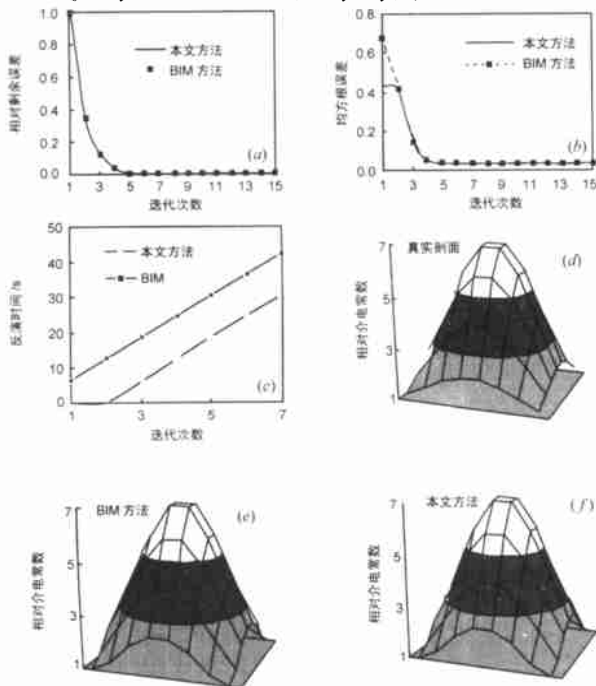


图2 本文方法与 BIM 方法反演结果的对比。(a) 散射场的相对剩余误差随迭代次数的变化关系;(b) 介质分布剖面的均方根误差随迭代次数的变化关系;(c) 反演过程的计算时间随迭代次数的变化关系;(d) 原真实的介质分布剖面;(e) BIM 方法迭代 7 次后的介质分布剖面;(f) 本文方法迭代 7 次后的介质分布剖面

激励和接收的位置如图 1 所示,而电流的时间激励 $I(t)$ 为:

$$I(t) = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{t}{\tau} \right)^4 e^{(-t/\tau)} \right] \quad (16)$$

取 $\tau = 0.125\text{ns}$,时间取样步 $N_S = 256$ 、接收线圈个数为 $N_R = 8$ 、激励源个数为 $N_T = 4$ 。

在所有例子的 BIM 反演方法中,待反演的目标区域被分成 8×8 个离散网格(即方程(10)有 64 个未知数)。在第一个例子中,散射目标的对比度较低(如图 2(d) 所示),其峰值为 6.73。在本文的反演方法中目标区域分别划分为 1×1 (此时只有 1 个未知数,其解对应于目标函数的平均值)、 4×4 (方程(10)有 16 个未知数)和 8×8 (方程(10)有 64 个未知数)共 3 个级别的离散网格。对于前 2 个级别的离散网格,每一个离散网格形式下的反演迭代 1 次。本文方法和 BIM 方法的反演结果如图 2 所示。从图 2(a) 和 (b) 中可以看出,两种方法的散射场的相对剩余误差和介质分布剖面的均方根误差均较小。传统的 BIM 方法和本文方法迭代 7 次后的反演结果均与原来的真实介质剖面吻合得很好,这说明传统的 BIM 方法和本文方法在反演低对比度的散射目标时的收敛速度和反演结果的精度都非常类似。而反演过程中的计算量本文方法略微减少(如图 2(c) 所示),这是因为在较粗离散网格上总共只迭代反演了两次。

为能够体现本文方法的优越性,在第二个例子中我们提

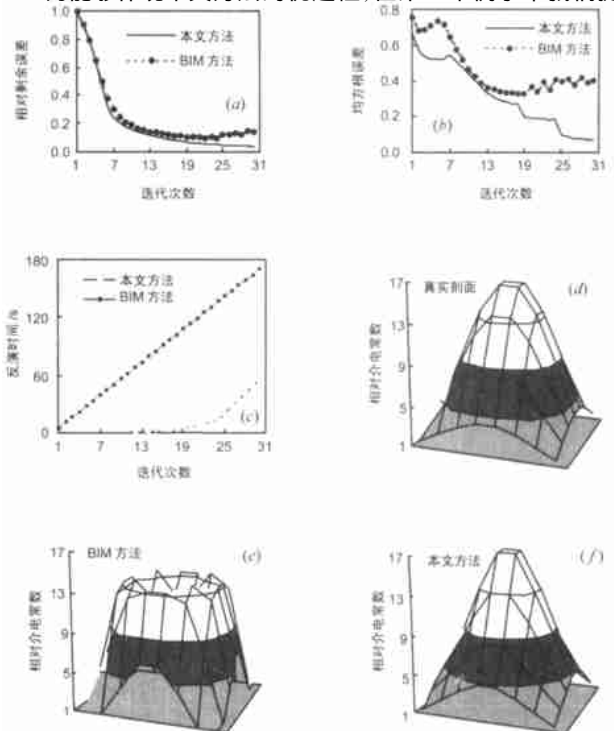


图3 本文方法与 BIM 方法反演结果的对比。(a) 散射场的相对剩余误差随迭代次数的变化关系;(b) 介质分布剖面的均方根误差随迭代次数的变化关系;(c) 反演过程的计算时间随迭代次数的变化关系;(d) 原真实的介质分布剖面;(e) BIM 方法迭代 30 次后的介质分布剖面;(f) 本文方法迭代 30 次后的介质分布剖面

高目标函数的对比度,在真实剖面的形状保持不变的情况下,将例子一中的剖面峰值由原来的 6.73 增加为 16.28 (如图 3(d) 所示). 在本文的反演方法中目标区域分别划分为 1×1 、 2×4 、 4×4 、 8×4 和 8×8 共 5 个级别离散网格. 对于前 4 个级别的离散网格,每一个离散网格形式下的反演迭代 5 次. 采用本文方法和 BIM 方法的反演结果如图 3 所示. 从图 3(a) 中可以看出,两种方法的散射场的收敛效果均较好,而本文方法的收敛效果更好一些;但从图 3(b) 可以清楚地看出,本文方法反演所得的介质分布剖面的均方根误差比传统的 BIM 方法要小得多,并且此时传统的 BIM 方法已经出现了严重的震荡,而本文方法却表现出了稳定的一致收敛性. 图 3(d)、(e) 分别给出了传统的 BIM 方法和本文方法迭代 30 次后的反演结果,本文的反演方法与原来的介质剖面吻合得很好,而传统的 BIM 方法已经不能收敛到真解. 图 3(c) 给出了两种方法反演过程中的计算时间随着迭代次数的变化关系,从图上可以看出本文方法的反演时间明显少于传统 BIM 方法所需的反演时间,这两种方法的正演计算时间和将反演积分方程离散成矩阵方程的计算时间完全相同. 在反演的前期当目标区域的网格划分较粗时,本文方法的反演时间更少.

4 结论

本文将多重网格技术与变形波恩迭代法(BIM)相结合,利用时域散射数据对二维无耗非均匀介质剖面进行了反演. 在反演迭代过程中,待反演目标区域的离散网格由粗逐渐变细. 通过反演实例表明,该方法具有稳定性好、更容易收敛到真解的特点;而且该方法极大地降低了反演过程的计算量,与传统的 BIM 方法相比能更精确地反演高对比度的散射目标. 更为重要的是本文方法简单可行,若与非线性优化方法相结合,其优点将更加突出,这也是我们以后将要进一步研究的内容.

参考文献:

- [1] Devaney A J. A filtered backpropagation algorithm for diffraction tomography[J]. Ultrason Imaging, 1982, (4): 336 - 350.
- [2] Moghaddam M, et al. Nonlinear two-dimensional velocity profile inversion using time domain data[J]. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 1992, 30: 147 - 156.
- [3] 赵延文, 聂在平. 轴对称二维位场的变形波恩迭代反演[J]. 电子学报, 1997, 25(12): 10 - 14.
- [4] 赵延文, 聂在平. 双侧向电阻率测井反演算法研究[J]. 地球物理学报, 1998, 41(3): 424 - 430.
- [5] Ladas K T, et al. Inverse scattering using a variational principle[J]. J Electromagn Waves Applicat, 1996, (10): 3 - 17.
- [6] Ladas K T, et al. On the reconstruction of dielectric objects from scattered field data using the Heitler equation[J]. Electromag, 1996, 16: 17 - 34.
- [7] Slaney M, et al. Limitations of imaging with first order diffraction tomography[J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1984, 32(8): 860 - 873.
- [8] Ghodgaonkar D K, et al. Estimation of complex permittivities of three-dimensional inhomogeneous biological bodies[J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1983, 31(6): 442 - 446.
- [9] Caorsi S, et al. Redundant electromagnetic data for microwave imaging of three-dimensional dielectric objects[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 1994, 42(5): 581 - 589.
- [10] Joachimowicz N, et al. Convergence and stability assessment of Newton-kantorovich reconstruction algorithms for microwave tomography[J]. IEEE Trans Med Imag, 1998, 17(8): 562 - 570.
- [11] Kooij B J, et al. Nonlinear inversion in TE scattering[J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1998, 46(11): 1704 - 1712.
- [12] van den Berg P, et al. A contrast source inversion method[J]. Inverse Problems, 1997, 13: 1607 - 1620.
- [13] 刘超群. 多重网格法及其在计算流体力学中的应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.

作者简介:

赵延文 男, 1965 年出生于四川, 1997 年于电子科技大学微波工程系获博士学位, 1998 ~ 1999 年在香港城市大学电子工程系作访问学者, 主要研究兴趣: 电磁辐射、散射与逆散射和计算电磁学等, 在国内外发表学术论文近 30 篇, 并获国家科技进步二等奖、四川省科技进步一等奖各一项.

聂在平 男, 1946 年生于陕西西安, 教授, 博士生导师, 电子科技大学副校长, IEEE 高级会员, 1981 年电子科技大学电磁场与微波技术专业研究生毕业并获硕士学位, 1987 ~ 1989 年曾在美国伊利诺依大学电磁实验室从事研究工作, 近年来主持并完成近 20 项科研课题, 先后获国家科技进步二等奖一项, 省、部级一、二、三等科技进步奖共五项, 在国内外发表学术论文 160 余篇, 主要研究兴趣: 计算电磁学、电磁散射与逆散射、移动通信中的智能天线技术等.