

# 基于整体变分降噪算法下的多频率超声衍射层析成像

方 杰<sup>1,2</sup>, 韦 穗<sup>1,2</sup>, 苏守宝<sup>1</sup>

(1. 安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽合肥 230039;  
2. 安徽大学安徽省现代成像与显示技术重点实验室, 安徽合肥 230039)

**摘 要:** 根据傅立叶衍射投影定理, 不同频率超声波得到的投影数据的傅立叶变换分布在复平面为不同半径的圆弧, 提出了多频率超声衍射层析成像思想, 并进行了实验研究, 重建的时间比单频率法短约 70%。由于多频率投影数据傅立叶变换比单频率法在复平面上分布更加不均匀, 故重建的噪声也更大, 整体变分法将图像恢复的数学模型转化为带有整体变分正则化项的能量泛函问题, 采用变分原理将其中的最小化问题转为偏微分方程的求解。降噪后的多频率超声图像的误差比降噪前的图像小约 50%。

**关键词:** 衍射层析成像; 傅立叶衍射投影定理; 整体变分; 正则化

**中图分类号:** TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2009) 04-0828-05

## The Multi-band Diffraction Ultrasound Tomography Images Based on the Total Variation Denoised Algorithm

FANG Jie<sup>1,2</sup>, WEI Sui<sup>1,2</sup>, SU Shou-bao<sup>1</sup>

(1. Education Ministry Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing of Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China;  
2. Anhui Modern Imagery and Display Technique Point Laboratory of Anhui University Hefei, Anhui 230039, China)

**Abstract:** According to the Fourier diffraction projection theory, the Fourier transform of projection data from multi-band frequency ultrasonic is distributed over complex plane in form of different radius arcs. The idea of multi-band ultrasound diffraction tomography is proposed, and the simulation of algorithm for image reconstruction shows its time shortens about 70% compared with that of single frequency method. Because the Fourier transform of projection data of multi-band diffraction ultrasound tomography spreads much more non-uniform on complex plane than that of single frequency, higher noises are produced in image reconstruction. The principle of total variation translates math model of image restoration into the problem of energy function with TV regularization, and the minimum problem is changed by the principle of variation into the solution of Partial Differential Equations. The reconstruction error of multi-band images with TV is reduced about 50%.

**Key words:** diffraction tomography; Fourier diffraction projection theory; total variation; TV regularization

### 1 引言

介质内部离子与入射波的波长相当或小于入射波的波长时, 会发生衍射现象。人体器官内部细胞的组织集团形成了各种生物组织, 直径一般在不到 1 毫米, 100KV 的 X 射线 CT 常用的射线波长是  $12 \times 10^{-6}$  mm, 远小于人体内部介质, 不会发生衍射现象, 故现在的 X 射线 CT 多用直线型。兆赫兹超声波长是毫米级 (如水中 10MHz 的超声波波长为 0.15mm) 和人体细胞组织集团相当, 会产生衍射现象, 射线模型超声 CT 的成像结果是不可信的, 因此, 为精确地描述声场, 必须同时考虑折射和衍射 (统称为散射) 的情况, 透射式衍射层析成像

(Diffraction Tomography) 方法就是这样一种技术<sup>[1]</sup>, 与 X 射线对应的傅立叶切片定理相似, 这一技术的理论基础是傅立叶衍射投影定理。

多频率超声 CT 近年来也引起了国内外学者的关注, 美国加州大学 Jee 等人研制的 HUTT<sup>[2~4]</sup> 系统对羊的肾脏做 CT 切片图像, Jee 等人是从不同频率成像效果来考虑的, HUTT 的换能器在不同时刻够发射不同频率超声波, 并用超声衰减层析成像算法来重建图像的, 低频超声 CT 的切片图像能够很好的反映肾脏切片的概貌, 而高频的更能反映肾脏内部细节信息, 将不同波段的 CT 切片图像融合, 可以获得分辨率比 MRI 图像更高的切片图像。与 Jee 等人的做法不同, 本文不是利用超声

收稿日期: 2008-03-27; 修回日期: 2008-11-11

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 60603083); 安徽省高校青年优秀人才基金 (No. 2008jq1156); 高等学校博士学科点专项科研基金 (No. 20070357003); 皖西学院应用项目 (No. WXZ0705)

波衰减系数层析算法成像来重建图像,而是利用衍射层析成像算法来重建图像的,提出多频率衍射 CT 思想,一方面,根据超声傅立叶衍射投影定理,不同频率超声波投影的傅立叶变换,对应于复平面不同半径圆弧,一次投影就可以获得不同半径的傅立叶频点值,可以用十几次投影就可以完成对空间的填充,大大减少了超声投影次数,缩短了超声 CT 成像时间.另一方面,超声波换能器的探头很难做到发射的超声波就是纯粹的单频信号,因此研究多频衍射层析成像具有实际意义.

图像降噪是图像处理中的一个重要问题,它给图像的后续处理带来很大影响.图像的平滑和细节保持是一对矛盾关系,传统的方法虽然可以有效地降低噪声,但同时也会造成图像中的某些细节(比如边缘)的模糊,导致整个图像视觉效果的下.基于整体变分 TV (Total Variation) 的图像平滑方法可以在平滑噪声的同时保持图像的边缘信息,在能量泛函上添加正则化项的思想是最初是由 Tikhonov 和 Arsenin 在 1977 引入的<sup>[5]</sup>,在此基础上,Guy Gilboa, Yehoshua, Y. Zeevi 等人又提出了自适应 TV<sup>[6,7]</sup>,降噪的同时能够很好地保留图像纹理特征.由于每次投影由不同的频率组成,多频率投影数据比单频率投影数据的傅立叶变换在复平面上分布不均匀性更凸出,故重建的图像的噪声也更大,本文实验研究了多频率重建中的关键技术,将重建出来的多频率超声 CT 图像用整体变分法进行去噪,可得到很好的重建效果.

## 2 多频率超声 CT 的重建

平面超声波从不同角度照射物体得到的投影数据记为  $u_r(\cdot)$  (其中  $r$  为超声波换能器到接收端距离,  $\cdot$  为投影方向),其傅里叶变换值对应于未知函数的二维傅里叶变换分布在复平面上半径为  $r$  的半圆弧上的值<sup>[1,8]</sup>,傅里叶衍射投影定理表达式为:

$$FT\{u_r(\cdot)\}(\cdot) = FT\{O(x, y)\}(\cdot) \quad (1)$$

其中:  $O(x, y) = k_0[n^2(x, y) - 1]$ ;

$$n(x, y) = c_0(x, y) / c(x, y);$$

$$u = \cos \left[ \sqrt{k_0^2 - k^2} \right] \sin \left[ \sqrt{k_0^2 - k^2} \right];$$

$$v = \sin \left[ \sqrt{k_0^2 - k^2} \right] \cos \left[ \sqrt{k_0^2 - k^2} \right];$$

$$= \sqrt{u^2 + v^2}, \quad = \arctan \left[ \frac{v}{u} \right].$$

$u, v$  是复平面的坐标.

目标函数  $O(x, y)$  是关于折射系数  $n(x, y)$  的未知函数,折射系数声音在组织中传播速度有关的量,不像 B 超通过接收一次或几次回波信号来重建图像,超声层析成像是经过多次投影来精确重建物体内部随折射系

数变化情况的,从而达到非专业人事也能鉴别的水平.而衰减系数是与频率有关的函数,不同的频率声波穿过同一组织,衰减不一样.

式(1)就是傅立叶衍射投影定理的表达式,图 1 是其原理图<sup>[9]</sup>.在同一背景介质中,波长越短  $k_0$  越大,圆弧的半径越大,当半径超过  $10^8 \text{ rad/m}$ ,这个时候认为超声在物体内部和 X 射线一样是直线传播的,可以用傅立叶切片定理代替傅立叶衍射投影定理,滤波逆投影算法 (Filtered Back Projection, FBP) 能很好地重建出反映物体内部的图像.超声频率一般只能达到 MHz 数量级,波长在 mm 级,与动物的软组织内部介质大小相当,并能满足传播的弱散射性,故用衍射层析成像重建图像效果更好.

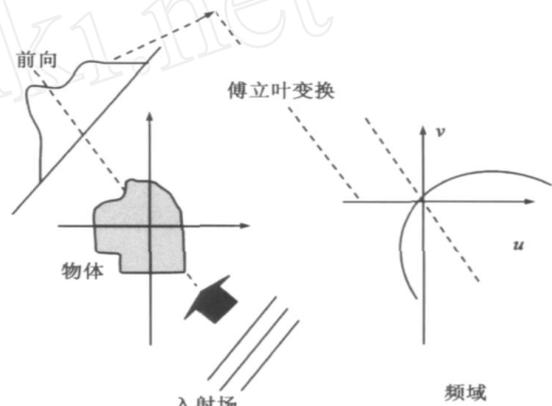


图1 傅立叶衍射投影定理

鉴于不同频率的声波所得到的投影数据傅立叶变换对应的圆弧在复平面上的半径不同(如图 2),用可以发射多种频率段的超声换能器探头对物体发射超声波,一次投影就可以在复平面上获得不同半径多个圆弧(如图 3 图所示),这样就可以用较少的投影在复平面上获得足够多的未知函数的样点值,再根据这些样点值快速地重建出 CT 图像.

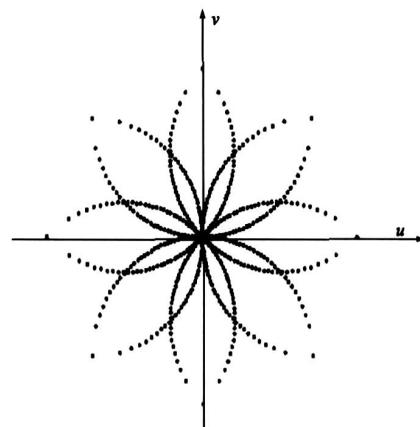


图2 左图单频率8次投影的傅立叶频点在复平面上的分布  
超声层析成像重建算法主要包括频域法和空域法,另外国内外学者为了提高图像质量提出了各类迭

代算法,一定程度上改善图像重构的质量,M. Bronstein<sup>[10]</sup>将非均匀快速傅立叶变换 NUFFT 用于超声 CT 图像重建,取得了很好的效果. 超声波(MHz)透射式衍射 CT,理论上是根据傅立叶衍射定理来重建图像的,衍射层析成像 FBP 算法不适用,如果假设没有发生衍射现象,用基于傅立叶切片定理的 FBP 算法来重建图像,只是对实际衍射层析成像的近似,故重建的图像可靠性差. Devany<sup>[11]</sup>在 1982 年提出与 X 射线 CT 常用的 FBP 算法相似的滤波逆传播算法 (Filtered Back Propagation, FBPP),能提供高质量的重构图像. 后来研究者进行了改进<sup>[12]</sup>,使之更适合具体的应用领域,两者的区别在于:超声 FBPP 算法除了通常的斜面滤波器外,还有一个依赖于几何深度的滤波器,用来校正反向传播时的衍射效应. 通常认为这个方法由于不会引进插值误差,所以重构的精度相对较高,但是由于深度独立的滤波处理使算法变得复杂. 为了得到可接受的重构图像质量需要大量的投影,使运算量加大,当投影数不充分时会因角度混叠而产生误差,所以这种方法不常使用.

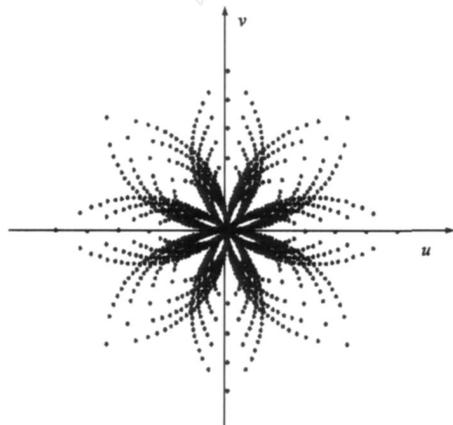


图3 4个频率8次投影的傅立叶频点在复平面上的分布

因此如何用频域法快速的重建出高分辨率的超声 CT 图像是一项值得挑战的工作,本文的实验都是利用频域法来重建图像的.

### 3 TV (Total Variation) 正则化去噪模型

TV (Total Variation) 模型最早是由 Rudin, Osher 和 Fatemi<sup>[12]</sup>提出的,他们选择整体变分  $TV(O) =$

$\int |\nabla O| dx dy$  作为正则化函数,积分区域为  $d$  维空间  $R^d$  中的凸集(这里表示图像的定义域). 我们采用噪声约束的正则化方式<sup>[13]</sup>:

$$\min_u TV(O) \quad \text{st.} \quad \|O_0 - HO\|^2 = \epsilon^2 \quad (2)$$

那么图像恢复问题就变成了在满足上式的约束下求解使 TV 能量最小的  $O$ . 利用 Lagrange 乘子可以将上述的约束问题转为无约束模型:

$$\min_u \left\{ E_{TV}(O) = \int |\nabla O| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int (O_0 - HO)^2 dx dy \right\} \quad (3)$$

其中,  $\lambda$  是 Lagrange 乘子. TV 正则化方法最大的优势就是抑制噪声,但并不对解过分的强加平滑,从而使估计出来的  $O$  中的边缘得以较好地保持.

整体变分正则化就是寻找具有最小 TV 能量的观测图像  $O_0$ . Acar 和 Volel<sup>[14]</sup>证明了整体变分正则化的收敛性和良性性,D. M. Strong<sup>[15]</sup>对总变分正则化进行了详细的理论分析,并证明了整体变分正则化在降噪的同时能精确地保留图像边缘. 泛函  $E$  取得极值的一个必要条件是它的一阶变分为零. 通过推导可得:

$$\nabla \left[ \frac{\nabla O}{|\nabla O|} \right] - H^*(HO - O_0) = 0 \quad (4)$$

上式是一个二阶的偏微分方程,可以通过偏微分方程的数值解法来求解,通常的做法是引入额外的时间参数  $t$  并利用梯度下降法来求解,即:

$$\frac{\partial O}{\partial t} = \nabla \left[ \frac{\nabla O}{|\nabla O|} \right] - H^*(HO - O_0) \quad (5)$$

上式中的  $t$  是我们额外地引入的时间演化参数. 在实际的求解过程中,为了避免  $|\nabla O|$  为 0 而导致的解的不稳定,我们选取  $\sqrt{|\nabla O|^2 + \epsilon^2}$  来表示图像  $O$  的 TV 模,这里的  $\epsilon$  是一个正常数.

现分析引入常数  $\epsilon$  后的扩散项  $\nabla \left[ \frac{\nabla O}{\sqrt{|\nabla O|^2 + \epsilon^2}} \right]$ , 我们想通过此项的分析来得到 TV 模型在恢复图像的特性和优势.

首先来考虑图像的平滑部分(不存在边缘),在这一区域  $|\nabla O|$  很小有可能近似为 0, 那么有

$$\frac{1}{\sqrt{|\nabla O|^2 + \epsilon^2}} \approx \frac{1}{\epsilon}, \quad \text{则:}$$

$$\nabla \left[ \frac{\nabla O}{\sqrt{|\nabla O|^2 + \epsilon^2}} \right] \approx \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\nabla O)$$

$$= \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{\partial^2 O}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 O}{\partial y^2} \right] = \frac{1}{\epsilon} \Delta O \quad (6)$$

是拉普拉斯算子,这时式(4)就等价于各向同性的热扩散,也就是意味着在图像平滑区域会形成较强的扩散,这就允许我们对图像中的噪声进行去除. 假如扩散到了图像的边缘部分,这时的  $|\nabla O|$  会相对较大,那么

对于扩散系数  $\frac{1}{\sqrt{|\nabla O|^2 + \epsilon^2}}$  就会很小,这就抑制了沿图像的梯度方向的扩散,也就是说,  $O$  的扩散只会发生在图像梯度  $|\nabla O|$  的正交方向上,在保持图像轮廓清晰的同时沿轮廓进行平滑和去噪. 这样就使得图像在边缘两侧以及区域内部得到充分的平滑,从而使得图像的细节特征得到较好的保持.

### 4 实验

实验选用医学图像中常用的 Shepp and Logan(128 × 128) 标准的测试图像来进行仿真实验,用图像的灰度值代表折射系数,来对多频率超声 CT 图像重构实验研究. 投影数据椭圆的傅立叶变换可用下式计算<sup>[8]</sup>:

$$E_i(u, v) = e^{-i(u x_0 + v y_0)} \times AJ_1(B \times P) / P$$

其中:

$$P = [((u \cos a + v \sin a) A / B)^2 + (-u \sin a + v \cos a)^2]^{1/2}$$

$$且: E(u, v) = \sum_{i=0}^N E_i(u, v) \quad (7)$$

为椭圆的灰度值, A、B 分别为椭圆的长轴和短轴的长度,  $J_1$  为一阶贝塞尔函数. 重建后图像的误差计算式为:

$$ERROR = \frac{|Im(m, n) - Reim(m, n)|}{|Im(m, n)|} \quad (8)$$

其中  $Im(m, n)$  为标准测试图,  $Reim(m, n)$  为重建后图像. 实验所用的电脑是 Pentium(R) D CPU 2.80GHz, 软件版本 matlab7.0, 操作系统 Windows XP.

本实验单频率和多频率都采用衍射层析成像法, 实验中单频率法投影次数为 128 次, 每次采样样点数为 128, 多频率投影次数为 16, 选用 6 个频率, 接收器每次采样样点数为 128, TV 正则化步长选取 0.02 秒, 迭代次数为 80, 图 4(b) 是重建后的图像, (c) 是用 TV 方法对 (b) 去噪后的结果. 图 5 画出的是图 4 中 (b)、与 (c) 与 (a) 图的误差图像, 由于绝大部分像素值较小, 为了方便观察, 画出误差的彩色图像, 用蓝色代表像素值较小的点, 比较图 5 中的左图和右图可以看出, 右图的蓝色区域比较均匀, 故图 5 中 (c) 图误差要小于 (b) 图的.

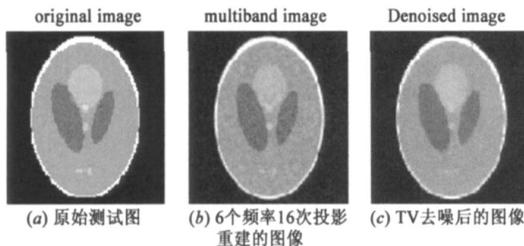


图4

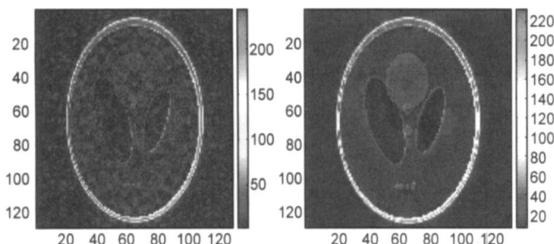


图5 左图是图4中(b)图与(a)图的误差, 右图是(c)图与(a)图的误差

实验主要包括投影数据获取、图像重建和 TV 去噪

三部分, 其中投影数据获取时间是主要部分, 多频率法由于在低频段投影点数过于密集, 故 3 个较低的频率是用的欠采样, 总共样点数为  $M = 9026$ , 单频率衍射层析成像的样点数为  $M = 16384$ , 运算的样点数要少 7322 点, 另外, 多频率法只要调用计算式(7)的子程序 16 次来填充空间, 而单频率法需要填充 128 次, 故计算机多频率法获得投影数据用时约为单频法的 1/3. 实际中这部分是通过接收超声 CT 发射数据再经过傅立叶变换获得的, 由于实际多频率法投影次数远少于单频率法, 因此获取投影数据时间也远少于单频率法, 故这种方法能对实际超声 CT 很好地模拟. 图像重建部分是用双线性网格插值方法将非均匀样点值插值到均匀的笛卡儿网格上, 再用傅立叶反变换, 算法的复杂度为  $O(N^2 \log_2 N + 4M)$ ,  $N = 128$ , 这部分占有的时间较少, 多频率法由于  $M$  的值小于单频率法, 因此时间也略少. 第三部分是 TV 去噪的时间, 与实际迭代次数有关, 多频率法用时 0.68 秒.

表 1 四种超声衍射层析成像图像重建算法速度与误差比较

重建方法	时间/秒	误差 ERROR2
单频率法	35.43	0.1875
单频率法 + TV 去噪	36.12	0.1408
多频率法	11.14	0.2885
多频率法 + TV 去噪	11.82	0.1501

表 1 中给出的数据可以看出多频率法 + TV 速度比单频率法快约 70%, 重建误差比多频率法要小约 50%, 和单频率法 + TV 法误差大小也差不多, 综合重建速度和质量两个因素, 多频率法 + TV 去噪法要好于其它方法.

### 5 结论

现代 CT 不光要求有高的成像质量, 对射线无害性, 低功耗和快速性也有很高的要求. 超声波的危害性要远小于 X 射线和正电子束, 多频率超声波衍射 CT, 可以用几次投影, 获得足够多的傅立叶变换频点值来重建出 CT 切片图像, 大大提高了成像的速度, 多频率投影数据的傅立叶变换在复平面上是非均匀分布, 故由于插值处理引起的重建图像的噪声更大, 基于整体变分 TV 正则化方法可以在平滑噪声的同时保持图像的边缘信息, 该方法能够很好地去除噪声. 另外, 不同频率下成像质量及特点也是一个值得探讨的问题.

### 参考文献:

[1] Mueller R K, Mostafa Kaveh, Glen Wade. Reconstructive tomography and applications to ultrasonic[J]. Proceedings of the IEEE, 1979, 67(4) :567 - 587.  
 [2] Jeong-Won Jeong, Syn-Ho Do, Dae C Shin, Tae-Seong Kim.

- 3-D high resolution images of ultrasonic transmission tomography compared to magnetic resonance and optical images [A]. Proceedings of IEEE International Symposium on Biomedical Imaging [C]. Macro to Nano: IEEE Press, 2004, Vol 1, 968 - 971.
- [3] Jeong-Won Jeong, Syn-Ho Do, Dae C Shin, Tae-Seong Kim. Soft tissue differentiation using multiband signatures of high resolution ultrasonic transmission tomography [J]. IEEE Transaction on Medical Imaging, 2005, 24(3): 399 - 408.
- [4] Jeong-Won Jeong, Syn-Ho Do, Dae C Shin, Tae-Seong Kim. Segmentation methodology for automated classification and differentiation of soft tissues in multiband images of high resolution ultrasonic transmission tomography [J]. IEEE Transaction on Medical Imaging, 2006, 25(8): 1068 - 1078.
- [5] A N Tikhonov, V Y Arsenin. Solutions of ill-posed problems [J]. Mathematics of Computation, 1978, 32(144): 1320 - 1322.
- [6] G Gilboa, N Sochen, Y Zeevi. Texture preserving variational denoising using an adaptive fidelity term [A]. Proceedings of Variational and Level Set Methods in Computer Vision (VLSM) [C]. Nice, France, 2003, 137 - 144.
- [7] Gilboa, G Sochen, N Zeevi, Y Y. Variational denoising of partially textured images by spatially varying constraints [J]. IEEE Transactions on Image Processing 2006, 15(8): 2281 - 2289.
- [8] Kak A C, Slaney M. Principles of Computerized Tomographic Imaging [M]. The Institute of Electronics Engineers, Inc. New York: IEEE Press, 2001. 203 - 273.
- [9] S X PAN, Kak A C. A computational study of reconstruction algorithms for diffraction tomography interpolation versus filtered backpropagation [J]. IEEE Transactions on acoustics, speech, and signal processing. 1983, 31(5): 1262 - 1275.
- [10] Michael M Bronstein, Alexander M Bronstein, Haim Azhari. Reconstruction in diffraction ultrasound tomography using non-uniform FFT [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2002, 21(11): 1395 - 1401.
- [11] A J Devaney. A filtered back propagation algorithm for diffraction tomography [J]. Ultrasonic Imaging, 1982, 4(4): 336 - 350.
- [12] Hebert T J, Gopal S S. An improved filtered back projection algorithm using pre-processing [A]. Proceedings of the IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference [C]. IEEE Press, 1991, Vol. 3, 2068 - 2072.
- [13] L Rudin, S J Osher, E Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Physica D, 1992, 60(1 - 4): 259 - 268.
- [14] Vogel C R, Omen M E. Fast total variation based image reconstruction [A]. Proceedings of the 1995 ASME Design Engineering Conference [C]. 1995, Vol. 3, 1009 - 1015.
- [15] Strong D M, Chan T F. Spatially adaptive local feature-driven total variation minimizing image restoration [A]. Proceedings of SPIE [C]. CAM, 1997, 97 - 32.

#### 作者简介:



方杰 男, 1978 年出生, 博士研究生. 研究方向: 计算机层析成像.

E-mail: fangjie @wxc. edu. cn



韦穗 女, 1946 年出生, 教授、博士生导师. 1969 年毕业于南京工学院, 中国图象图形学会副理事长, 安徽大学原副校长, 现为安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室主任. 研究领域为计算机视觉、计算全息、医学图像处理.

苏守宝 男, 1967 年出生, 副教授, 博士研究生, 研究领域为计算智能与数据挖掘、医学图像处理.