

# 一阶动态条件下伪随机码信号相关函数研究

李春霞<sup>1,2</sup>, 王飞雪<sup>1</sup>, 郭桂蓉<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学电子科学学院卫星导航研发中心, 湖南长沙 410073; 2. 北京环球信息应用开发中心, 北京 100094)

**摘要:** 在直接序列扩频系统中, 受收发两端的相对运动和时钟频率不稳定等因素的影响, 接收伪码和本地伪码之间会存在一定的码率偏移. 本文首次采用对常规伪码相关函数积分的方法推导了一阶动态即恒定码率偏移条件下任意长积分时间伪随机码信号相关函数公式, 对所得公式进行了仿真验证, 在此基础上分析了一阶动态条件下伪随机码信号相关函数的特征, 包括主瓣展宽、峰值移位和损耗等现象. 本文结论为高动态接收机伪码同步技术提供了理论基础.

**关键词:** 扩频通信; 伪随机码; 相关函数; 一阶动态; 码率偏移

**中图分类号:** TN914.42      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112(2007)09-1789-05

## Correlation of PN Spread Spectrum Signal Under First Order Dynamics

LI Churxia<sup>1,2</sup>, WANG Feixue<sup>1</sup>, GUO Guirong<sup>1</sup>

(1. Satellite Navigation R&D Center, School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China; 2. Beijing Global Information Application and Development Center, Beijing 100094, China)

**Abstract:** In direct sequence spread spectrum systems, due to dynamic factors such as the relative motion between the transmitter and the receiver and the instability of clock, there is code frequency offset between the received and the local PN codes. In this paper, assuming first order dynamic, namely, constant code frequency offset, the formulas for the correlation function of PN code are derived for the first time by the method of integrating the normal PN code correlation function with an integration time interval of arbitrary length and then verified by simulation. Accordingly the characteristics of PN code correlation function under first order dynamic are studied, including spread of main lobe, shift and loss of peak. The conclusions drawn in this paper can guide the design of code synchronization in high dynamic receiver.

**Key words:** spread spectrum communication; PN code; correlation function; first order dynamic; code frequency offset

## 1 引言

伪随机码相关是直接序列扩频接收机必不可少的处理环节. 受发射机与接收机之间相对运动、时钟频率不稳定等因素的影响, 接收伪码和本地伪码之间存在码率偏移, 致使相关函数产生主瓣展宽、峰值移位和降低等现象. 通常情况下影响甚微, 在收发两端相对运动速度或其加速度较大的高动态条件下伪码速率偏差变大, 其影响不容忽视.

迄今为止, 高动态接收机方面的研究多仅考虑载波频偏及其对捕获、同步、滤波的影响<sup>[1-3]</sup>, 有关伪码码率偏移的影响, 尤其是码率偏移条件下伪随机码相关函数的研究并不多见<sup>[4-7]</sup>. 文献[4]采用数值分析的方法, 研究了码率偏移条件下伪随机码信号的周期相关函数. 该文没有给出相关函数的表达式. 文献[5]在码率偏移导

致的相对相位滑动不超过1码元的积分长度范围内, 采用逐个码元求接收伪码和本地伪码的相关函数的方法, 给出了码率偏移条件下伪随机码并行捕获通道的伪码相关输出表达式. 文献[6]在与文献[5]相同的积分长度范围内, 采用对常规伪码相关函数积分的近似方法, 分析了码率偏移条件下伪随机码信号的相关输出. 文献[7]与文献[6]的分析方法相似, 两文中均未给出相关函数的最终表达式. 现实中, 伪码码率相对偏移量通常小于 $10^{-4}$ . 研究表明, 在如此小的码率偏移条件下, 对常规伪码相关函数积分的近似方法与逐个码元相关的准确方法相比, 误差完全可以忽略. 由于没有给出表达式或者限制了积分长度, 以上文献尚未形成码率偏移对伪码相关函数影响分析的全貌.

本文首先采用对常规伪码相关函数积分的方法, 推导了码率偏移条件下任意长积分时间伪随机码信号相关

函数公式; 然后基于  $m$  序列对公式进行了仿真验证; 最后研究了码率偏移条件下伪随机码信号相关函数的主瓣展宽、峰值移位和峰值损耗三种现象. 本文沿用了上述文献中的一个假设, 即只考虑伪码频率的一阶因素, 假定在积分时间内码率偏移是常量.

## 2 一阶动态条件下的伪随机码信号相关函数

设  $C(t)$  是取值  $\pm 1$ , 码元宽度为  $T_c$  的伪随机码信号, 定义一阶动态条件下伪码相关函数

$$y(q) = \int_0^{MT_c} C(t + \delta - qT_c) C(t) dt \quad (1)$$

其中  $M$  表示积分码元数,  $\delta$  表示接收伪码的相对码率偏移,  $qT_c$  表示积分初始时刻接收伪码相对于本地伪码的相位滞后量.

令  $t' = t/T_c$ ,  $C_0(t') = C(tT_c)$ , 代入式(1)并化简得

$$y(q) = T_c \int_0^M C_0(t' + \delta' - q) C_0(t') dt' \quad (2)$$

$y(q)$  是与调制码型和积分区间的起始相位有关的随机变量, 对其求均值

$$E[y(q)] = T_c \int_0^M R_0(\delta' - q) dt' \quad (3)$$

式中  $R_0(\tau) = E[C_0(t) C_0(t - \tau)]$  是归一化伪码相关函数, 当伪码序列周期  $L \gg 1$  时, 忽略伪码信号自相关旁瓣, 有  $R_0(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| < 1 \\ 0, & |\tau| \geq 1 \end{cases}$ , 代入式(3)并推导化简可得

(1) 当  $\delta > 0$  时

(a) 当  $M\delta \leq 1$  时

$$E[y(q)] = \begin{cases} 0.5T_c(1+q)^2/\delta, & -1 < q \leq M\delta - 1 \\ MT_c(1+q-0.5M\delta), & M\delta - 1 < q \leq 0 \\ MT_c(1-0.25M\delta) - T_c(q-0.5M\delta)^2/\delta, & 0 < q \leq M\delta \\ MT_c(1-q+0.5M\delta), & M\delta < q \leq 1 \\ 0.5T_c(1-q+M\delta)^2/\delta, & 1 < q < M\delta + 1 \\ 0, & q \leq -1 \text{ 或 } q \geq M\delta + 1 \end{cases} \quad (4)$$

(b) 当  $1 < M\delta \leq 2$  时

$$E[y(q)] = \begin{cases} 0.5T_c(1+q)^2/\delta, & -1 < q \leq 0 \\ 0.5T_c(1+2q-q^2)/\delta, & 0 < q \leq M\delta - 1 \\ MT_c(1+q-0.5M\delta) - T_c q^2/\delta, & M\delta - 1 < q \leq 1 \\ MT_c(1+q-0.5M\delta) - 0.5T_c(q^2+2q-1)/\delta, & 1 < q \leq M\delta \\ 0.5T_c(1-q+M\delta)^2/\delta, & M\delta < q < M\delta + 1 \\ 0, & q \leq -1 \text{ 或 } q \geq M\delta + 1 \end{cases} \quad (5)$$

(c) 当  $M\delta > 2$  时

$$E[y(q)] = \begin{cases} 0.5T_c(1+q)^2/\delta, & -1 < q \leq 0 \\ 0.5T_c(1+2q-q^2)/\delta, & 0 < q \leq 1 \\ T_c/\delta, & 1 < q \leq M\delta - 1 \\ MT_c(1+q-0.5M\delta) - 0.5T_c(q^2+2q-1)/\delta, & M\delta - 1 < q \leq M\delta \\ 0.5T_c(1-q+M\delta)^2/\delta, & M\delta < q < M\delta + 1 \\ 0, & q \leq -1 \text{ 或 } q \geq M\delta + 1 \end{cases} \quad (6)$$

(2) 当  $\delta < 0$  时

(a) 当  $-1 \leq M\delta < 0$  时

$$E[y(q)] = \begin{cases} -0.5T_c(1+q-M\delta)^2/\delta, & -1+M\delta < q < -1 \\ MT_c(1+q-0.5M\delta), & -1 \leq q < M\delta \\ MT_c(1+0.25M\delta) + T_c(q-0.5M\delta)^2/\delta, & M\delta \leq q < 0 \\ MT_c(1-q+0.5M\delta), & 0 \leq q < 1+M\delta \\ -0.5T_c(1-q)^2/\delta, & 1+M\delta \leq q < 1 \\ 0, & q \leq -1+M\delta \text{ 或 } q \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

(b) 当  $-2 \leq M\delta < -1$  时

$$E[y(q)] = \begin{cases} -0.5T_c(1+q-M\delta)^2/\delta, & -1+M\delta < q < M\delta \\ MT_c(1-q+0.5M\delta) + 0.5T_c(q^2-2q-1)/\delta, & M\delta \leq q < -1 \\ MT_c(1-q+0.5M\delta) + q^2T_c/\delta, & -1 \leq q < 1+M\delta \\ 0.5T_c(q^2+2q-1)/\delta, & 1+M\delta \leq q < 0 \\ -0.5T_c(1-q)^2/\delta, & 0 \leq q < 1 \\ 0, & q \leq -1+M\delta \text{ 或 } q \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

(c) 当  $M\delta < -2$  时

$$E[y(q)] = \begin{cases} -0.5T_c(1+q-M\delta)^2/\delta, & -1+M\delta < q < M\delta \\ MT_c(1-q+0.5M\delta) + 0.5T_c(q^2-2q-1)/\delta, & M\delta \leq q < 1+M\delta \\ -T_c/\delta, & 1+M\delta \leq q < -1 \\ 0.5T_c(q^2+2q-1)/\delta, & -1 \leq q < 0 \\ -0.5T_c(1-q)^2/\delta, & 0 \leq q < 1 \\ 0, & q \leq -1+M\delta \text{ 或 } q \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

从式(4)~(9)以及  $\delta < 0$  条件下的讨论可以得出, 一阶动态伪码相关函数的性质取决于参量  $M|\delta|$ . 又由于相对码率偏移量为  $\delta$ , 经过积分时间  $MT_c$ , 码率偏移使接收伪码和本地伪码之间的相位差改变了  $MT_c\delta$ , 即相对滑动了  $M|\delta|$  码元, 这正是参量  $M|\delta|$  的物理意义. 因此, 一阶动态伪码相关函数的性质取决于积分区间内接收伪码和本地伪码之间相对滑动码元数 (以标称码元宽度  $T_c$  计).

## 3 仿真验证

我们基于  $m$  序列对上述一阶动态条件下的伪随机

码相关函数公式进行了仿真验证. 为了消除码元宽度这一参量, 将相关函数定义式(1)除以相关时间长度  $MT_c$ , 形成归一化相关函数.

基于 MATLAB 6.5 软件平台, 首先产生一个  $m$  序列(周期为 1023)扩频码信号, 然后改变码元宽度形成存在码率偏移的另一个扩频码信号, 两者均是离散信号, 采样率为第一个扩频码信号码率的 1000 倍, 然后采用移位、相乘的方法直接计算两者的相关函数. 利用所得结果, 检验本文前面推导公式的正确性. 实验分两组, 一组取  $\delta = 0.001, M = 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, q \in [-1.5, 4.5]$ ; 另一组取  $\delta = -0.001, M = 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, q \in [-4.5, 1.5]$ . 两组实验分别用于检验  $\delta > 0$  和  $\delta < 0$  条件下的相关函数公式, 而且  $M, \delta$  的取值涵盖了  $M|\delta| \leq 1, 1 < M|\delta| \leq 2, M|\delta| > 2$  三种情况, 以确保各种不同参数条件下的一阶动态伪码相关函数式(4)~(9)都得到了检验. 自变量的取值也涵盖了整个相关函数主瓣, 以确保式(4)~(9)中的各个分支都得到了检验. 改变序列的长度, 令  $L = 16383; L = 131071$  重复相同的实验, 以检验不同序列长度条件下公式的符合情况.

由于以上参数分类的情况比较多, 这里仅给出  $M = 3000, \delta = 0.001$  条件下的结果作为示例. 公式与数值仿真所得相关函数曲线如图 1, 两条曲线几乎重合, 相关峰值的相对误差约为 0.1%. 误差与  $1/L$  同数量级, 应该是忽略伪码序列自相关旁瓣所致. 可见当  $L \gg 1$  时, 公式的误差比较小, 完全可以忽略不计. 其他参数

条件下的实验结果均与该图类似. 因此, 仿真实验验证了本文推导的一阶动态条件下伪随机码信号相关函数公式的正确性.

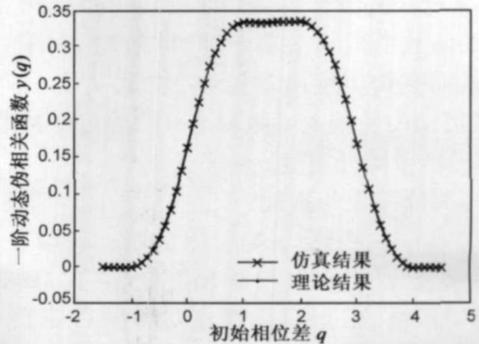


图 1 理论与仿真伪码相关函数曲线,  $M=3000, \delta=0.001$

#### 4 一阶动态伪码相关函数特征分析

图 2 给出了常规及一阶动态伪码相关函数曲线, 其中图 2(a) 中常规伪码相关函数  $y_0(q) = \int_0^{MT_c} C(t - qT_c)C(t)dt, M = N_0, 2N_0, 3N_0, N_0$  为整数, 一阶动态伪码相关函数的参数取  $M|\delta| = 0.5, 1.5, 2.3$ , 图 2(b) 和图 2(c) 分别对应于  $\delta > 0$  和  $\delta < 0$  的情况. 可见常规相关函数形状为三角形, 随着积分长度的增加, 其主瓣宽度恒为 2 码元, 峰值的位置恒在  $q = 0$  处, 峰值大小与积分长度成正比. 一阶动态使伪码相关函数形状不再是简单的三角形, 而且还产生了主瓣展宽、峰值移位和峰值降低甚至削平的现象. 下面对这些现象展开研究.

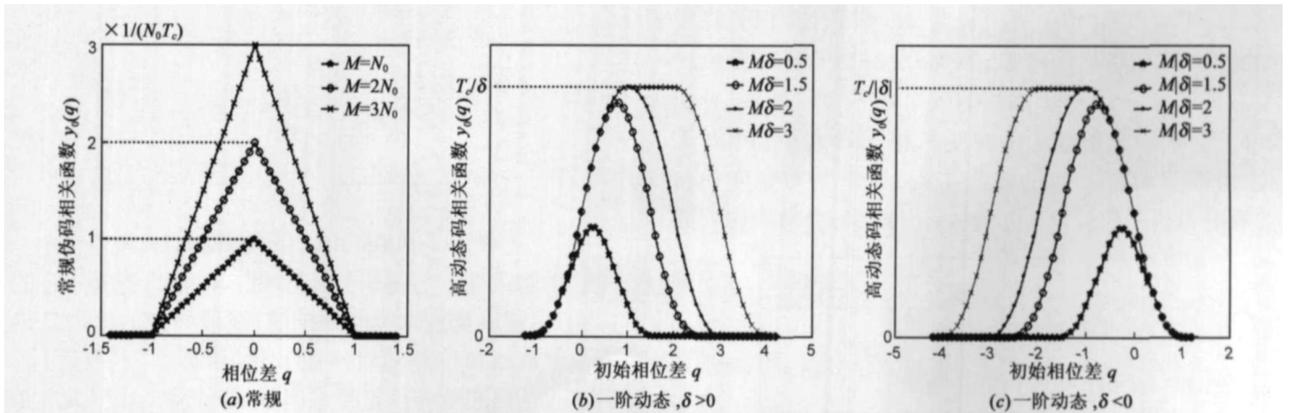


图 2 常规及一阶动态伪码相关函数曲线示意图

##### 4.1 一阶动态伪码相关函数的对称性

由式(4)~(9)可以证明, 一阶动态条件下伪码相关函数  $y(q)$  的均值关于  $q = M\delta/2$  轴对称, 即  $E[y(q)] = E[y(M\delta - q)]$ .

事实上, 如果重新定义一阶动态伪码相关函数

$$y'(q) = \int_{-MT_c/2}^{MT_c/2} C(t + \delta - qT_c)C(t)dt \quad (10)$$

同理可得, 一阶动态条件下伪码相关函数  $y'(q)$  的均值

关于  $q = 0$  轴对称即  $E[y'(q)] = E[y'(-q)]$ .

注意到  $y(q), y'(q)$  中的  $q$  分别表示积分起点处和积分中点处接收伪码相对于本地伪码的相位滞后. 可见在一阶动态条件下, 接收伪码和本地伪码的相位差是时变的, 导致相关函数的对称轴随自变量的不同而改变. 而常规条件下, 接收伪码和本地伪码的相位差是恒定的, 选择相关区间内任意时刻的相位差作为自变量, 相关函数的对称轴不变, 在相位差为 0 处.

### 4.2 一阶动态伪码相关函数主瓣宽度及峰值分析

#### (1) 主瓣展宽

以  $\delta > 0$  的情形为例, 根据式(4)~(6), 当  $q \leq -1$  时,  $E[y(q)] = 0$ ; 当  $q > -1$  时,  $E[y(q)] \neq 0$ , 故  $q = -1$  是相关函数主瓣的左端点. 同样易知  $q = 1 + M\delta$  是右端点. 从而主瓣宽度由常规的 2 扩展为  $2 + M\delta$ , 这里主瓣宽度定义为使相关函数取非 0 值的自变量范围, 可见展宽了  $M\delta$  个码元宽度.

#### (2) 相关峰移位与损耗

当  $M\delta \leq 1$  时, 根据式(4)可以证明一阶动态条件下伪码相关函数  $y(q)$  在其对称轴左侧  $(-1, M\delta/2)$  区间内是单调增函数, 根据对称性在对称轴右侧是单调减函数, 从而在对称轴处取得最大值. 图 2(b) 中的函数曲线也表明了这一点. 因此,  $y(q)$  的峰值出现在  $q = M\delta/2$  (初始相位差  $M\delta/2$  码元) 处,  $y'(q)$  的峰值出现在  $q = 0$  (积分中点处相位对齐) 处. 事实上, 初始相位差为  $M\delta/2$  和中点处相位对齐互相等价. 将  $q = M\delta/2$  代入公式(4)得  $\max\{E[y(q)]\} = MT_c(1 - 0.25M\delta)$ .

同理当  $1 < M\delta \leq 2$  时, 当  $q = M\delta/2$  时相关函数取得峰值, 其大小与  $M\delta \leq 1$  的情况相同.

当  $M\delta > 2$  时, 根据式(6)可以证明  $y(q)$  在  $(-1, 1)$  区间内是单调增函数, 在  $[1, M\delta - 1]$  区间内是常函数, 在  $(M\delta - 1, M\delta + 1)$  区间内是单调减函数. 故  $y(q)$  在  $[1, M\delta - 1]$  区间内的取值是其极值, 大小为  $T_c/\delta$ .

图 3 给出了一阶动态条件下伪码相关函数的峰值位置和大小随参量  $M\delta$  变化的曲线. 以  $M\delta = 2$  为分界点, 当  $M\delta \leq 2$  时, 相关峰位置与  $M\delta$  成正比, 相关峰大小随着  $M\delta$  的增加而增加; 当  $M\delta > 2$ , 相关峰位置由一个点扩展为一个区间, 函数曲线出现“平顶”现象(见图 2(b)中  $M\delta = 3$  条件下的曲线), 相关峰大小与  $M\delta$  无关, 恒等于  $M\delta = 2$  时的峰值  $T_c/\delta$ . 以上主瓣宽度和相关峰的分析中假设  $\delta > 0$ . 当  $\delta < 0$ , 根据式(7)~(9), 同

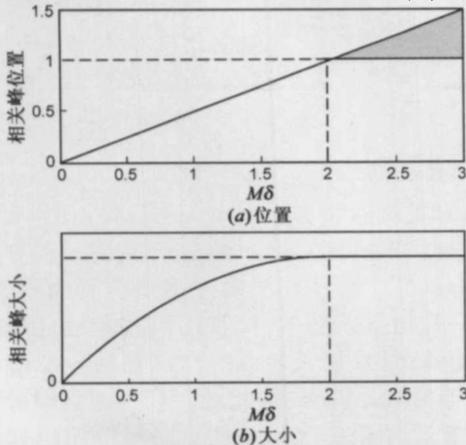


图 3 一阶动态伪码相关函数峰值位置及大小曲线

理可得: 主瓣宽度扩展为  $2 - M\delta$ . 相关峰仍出现在初始相位差  $M\delta/2$  的情形. 当  $M|\delta| \leq 2$  时, 相关峰大小为  $MT_c(1 + 0.25M\delta)$ ,  $M|\delta| > 2$  时, 相关峰大小为  $-T_c/\delta$ .

综合  $\delta > 0$  和  $\delta < 0$  两种情况得: 一阶动态伪码相关函数主瓣展宽了  $M|\delta|$ , 峰值出现在初始相位差  $M\delta/2$  处; 峰值大小为

$$\max\{E[y(q)]\} = \begin{cases} MT_c(1 - 0.25M|\delta|), & M|\delta| \leq 2 \\ T_c/|\delta|, & M|\delta| > 2 \end{cases} \quad (11)$$

当  $M > 2/|\delta|$  时, 相关峰不再增大. 这说明在动态情况下, 当相关积分长度超过  $2/|\delta|$  时已经不能通过简单延长相关时间来增大相关峰.

定义码率偏移引起的相关峰损耗  $L_p$  为无码率偏移条件下的相关峰值与码率偏移条件下的相关峰值能量之比, 即

$$L_p = \frac{\max^2\{y_0(q)\}}{\max^2\{E[y(q)]\}} \quad (12)$$

将  $\max\{y_0(q)\} = MT_c$  和式(11)一同代入上式, 得

$$L_p = \begin{cases} (1 - 0.25M|\delta|)^{-2}, & M|\delta| \leq 2 \\ (M\delta)^2, & M|\delta| > 2 \end{cases} \quad (13)$$

其函数曲线见图 4, 可见损耗随着积分长度和码率偏移的增加而变大. 特殊地, 当  $M|\delta| = 2$  时, 损耗为 6dB.

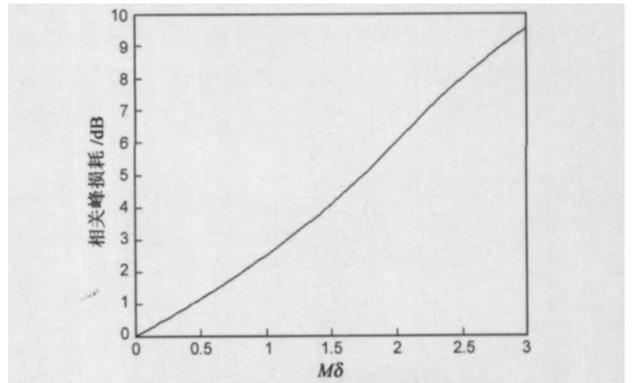


图 4 码率偏移引起的相关峰值损耗曲线

动态条件下伪码相关函数变形对捕获造成一定的影响: 主瓣展宽意味着能量扩展; 峰值移位的原因是码率偏差造成相位差随时间而变化, 给捕获到了信号以后接收伪码相位的确定带来困难; 峰值降低则导致 SNR 损耗.

### 5 结论

本文首次采用常规伪码相关函数积分的方法, 推导了一阶动态即恒定码率偏移条件下任意长积分时间伪随机码信号相关函数公式, 并对公式进行了仿真验证, 基于所得公式分析了一阶动态伪随机码信号相关函数主瓣和峰值的特征.

研究表明, 一阶动态条件下, 伪随机码信号相关函数的形状不再是简单的三角形, 而且与常规伪码相关函数相比发生了主瓣展宽、峰值移位和损耗现象: 主瓣展宽了  $M|\delta|$  码元, 峰值出现在积分初始相位差为  $M\delta/2$  码元, 或者等效地, 积分中点处相位对齐的情形; 峰值损耗随着  $M|\delta|$  的增大而增大, 当  $M|\delta| = 2$  时损耗为 6dB

#### 参考文献:

- [1] R A Stirling-Gallacher, et al. A fast acquisition technique for a direct sequence spread spectrum signal in the presence of a large Doppler shift [A]. IEEE 4th International Symposium on Spread Spectrum Technique & Application [C]. Mainz, Germany: IEEE, 1996, 1. 156- 160.
- [2] Povey G J R, Talvãie J. Doppler compensation and code acquisition techniques for LEO satellite mobile radio communications [A]. 5th International Conference on Satellite Systems for Mobile Communications and Navigation [C]. London: IEEE, 1996. 16- 19.
- [3] Syang Myau Hwang, Mao Yu, Lin Yang. A low complexity carrier recovery and frequency estimation algorithm for Iridium handset system [A]. 1999 IEEE Wireless Communications and Networking Conference [C]. New Orleans, LA, USA: IEEE, 1999, 3. 1208- 1211.
- [4] R F Ormondroyd, V E Comeley. Limits on the search rate of a pseudonoise sliding correlator synchroniser due to self noise and decorrelation [J]. IEE Proceedings, 1984, 31 ( 7 ): 742 -

750.

- [5] Unjeng Cheng, William J Hurd, Joseph I. Statman. Spread spectrum code acquisition in the presence of Doppler shift and data modulation [J]. IEEE Trans on Communications, 1990, 38(2): 241- 250.
- [6] Dr Ing Petr Bezucha. Mean acquisition times of serial spread spectrum PN acquisition system in the presence of code Doppler [A]. IEEE 7th Int Sym on Spread Spectrum Tech & App [C]. Prague, Czech Republic: IEEE, 2002, 3. 751- 755.
- [7] Alfred W Fuxjaeger, Ronald A Iltis. Acquisition of timing and Doppler shift in a direct sequence spread spectrum system [J]. IEEE Trans on Commun, 1994, 42( 10 ): 2870- 2880.

#### 作者简介:



李春霞 女, 1977 年生于湖北麻城, 国防科技大学电子科学与工程学院博士研究生. 主要研究方向为扩频通信和高动态卫星导航接收机.

E mail: chunxia54@sina.com

王飞雪 男, 1971 年生于福建长汀, 博士, 国防科技大学电子科学与工程学院教授、博士生导师, IEEE 会员. 主要研究领域包括卫星导航定位、扩频信号处理、全数字接收机等. 主要研究方向为卫星定位与制导、扩频信号处理、智能信号处理及通信抗干扰等. 已发表国内外期刊论文十余篇, 获部委级科技进步一等奖两项, 二等奖一项.

郭桂蓉 男, 1937 年生, 教授, 博士生导师, 中国科学院院士.