

# 一种新量子遗传算法及其应用

张葛祥<sup>1</sup>, 李 娜<sup>1</sup>, 金炜东<sup>1</sup>, 胡来招<sup>2</sup>

(1. 西南交通大学电气工程学院, 四川成都 610031; 2. 中国电子科技集团 29 研究所, 四川成都 610036)

**摘 要:** 提出一种新量子遗传算法(NQGA),其核心是采用量子比特相位比较法更新量子门和自适应调整搜索网格的策略,NQGA具有收敛速度快、全局寻优能力强和计算时间短的特点.文中通过典型复杂函数测试和应用实例表明,NQGA的优化质量和效率都优于传统遗传算法.

**关键词:** 遗传算法;量子遗传算法;IIR滤波器设计

**中图分类号:** TP18; TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2004)03-0476-04

## A Novel Quantum Genetic Algorithm and Its Application

ZHANG Ge-xiang<sup>1</sup>, LI Na<sup>1</sup>, JIN Wei-dong<sup>1</sup>, HU Lai-zhao<sup>2</sup>

(1. School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China;

2. China Electronic Technology Group Corporation No. 29 Research Institute, Chengdu, Sichuan 610036, China)

**Abstract:** This paper proposes a novel quantum genetic algorithm (NQGA), whose core is that the strategies of updating quantum gate using qubit phase comparison approach and adjusting search grid adaptively are introduced. NQGA is characterized by rapid convergence, good global search capability and short computing time. Test results of complex functions and application example demonstrate NQGA is superior to conventional genetic algorithms in quality and efficiency.

**Key words:** genetic algorithm; quantum genetic algorithm; IIR filter design

## 1 引言

量子遗传算法(Quantum Genetic Algorithm, QGA)是新发展起来的一种基于量子计算原理<sup>[1,2]</sup>的概率优化方法.它以量子计算的一些概念和理论为基础,用量子位编码来表示染色体,用量子门作用和量子门更新来完成进化搜索,具有种群规模小而不影响算法性能、同时兼有“勘探”和“开采”的能力、收敛速度快和全局寻优能力强的特点.文献[3~5]分别提出了量子遗传算法、遗传量子算法和并行量子遗传算法,并用来求解组合优化问题,结果表明,QGA的性能大大优于传统遗传算法(Conventional Genetic Algorithm, CGA).

本文在对QGA的机理和性能进行分析的基础上得出,文献[3~5]中的QGA不适于用来求解连续函数的优化问题,特别是多峰连续函数的优化问题.为了能将量子计算的强并行性应用到实际的优化问题中,探索新的量子算法是非常有必要的.因此,本文提出一种具有广泛适用性的新量子遗传算法(Novel Quantum Genetic Algorithm, NQGA).该算法的核心是采用量子比特相位比较法更新量子门和自适应调整搜索网格的策略.NQGA的最大特点是保持种群多样性的能力强.本文用几个典型函数进行了测试,结果表明,与QGA和几种CGA相

比,NQGA具有收敛速度快、迭代次数少、计算时间短和全局寻优能力强的特点.文中还将NQGA用于无限冲击数字滤波器(IIR)的优化设计,仿真结果显示,NQGA能获得比QGA和CGAs更好的滤波器性能.

## 2 新量子遗传算法

### 2.1 QGA的机理及性能分析

基于量子计算的一些原理和概念,QGA不是采用传统遗传算法的二进制、浮点数、符号等染色体编码方法,而是采用一种新颖的量子位染色体表示法.该表示法的特点是能同时表示任意的叠加态.传统GA采用交叉、变异等遗传操作来保持种群的多样性,QGA采用量子门作用于量子基态的概率幅的方式使种群多样性得以保持.因而,量子门的更新方法是QGA的关键.在QGA中,量子门更新采用二进制位、适应值和概率幅比较法.

正如文献[4,5]中指出的,这种量子门更新方法适于用来求解组合优化问题,甚至只适于求解背包问题.原因是这种更新策略是基于事先已知所优化问题的最优解原则.比如像背包问题这类组合优化问题,其最优解的原则是在满足约束条件的情况下使“1”的个数尽可能地多,因为在所得的解中,“1”

收稿日期:2002-12-23;修回日期:2003-11-25

基金项目:国家自然科学基金(No. 69574026);教育部高等学校骨干教师资助计划项目(教技司No. [2000]65);国防基金项目(No. 5143503 0101ZS0502,00JSOS.2.1. ZS0501)

的个数多就意味着其适应值大.然而,这种情况在连续函数和实际优化问题中是无法事先知道的,所以,文献[4,5]中的 QGA 适于求解背包问题一类的组合优化问题.在实际应用中,有很多优化问题都是属于多变量的连续函数优化问题,因此,探寻新的量子进化算法是重要且必要的.

### 2.2 新量子遗传算法

在 NQGA 中,最小的信息单元用量子位来表示,量子位又称为量子比特.一个量子位不仅可以表示 0 和 1 两种状态,而且可以同时表示这两种状态之间的任意叠加态.即一个量子位可能处于 1 或 0,或者处于两者之间的中间态,即 1 和 0 的不同叠加态,因此一个量子位的状态可表示为:

$$= \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (1)$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  分别是 1 和 0 的概率幅,且满足下列归一化条件:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2)$$

在式(2)中,  $|\alpha|^2$  表示量子态的观测值为 0 的概率,  $|\beta|^2$  表示量子态的观测值为 1 的概率.

定义 1 满足式(1)和(2)的一对实数  $\alpha, \beta$ , 称为一个量子位的概率幅,记为  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ .

定义 2 角度  $\theta$  ( $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ) 定义为一个量子位的相位,即  $\theta = \arctan(\beta/\alpha)$ .

用符号  $d$  表示  $\alpha$  和  $\beta$  的乘积,即  $d = \alpha * \beta$ .其中  $d$  的正负值代表此量子位的相位在平面坐标中所处的象限,如果  $d$  的值为正,则表示  $\alpha$  处于第一、三象限,否则处于第二、四象限.于是,  $m$  个量子位的概率幅可表示为

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \alpha_m & \beta_m \\ \alpha_2 & \beta_2 & \dots & \alpha_m & \beta_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m & \beta_m & \dots & \alpha_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中,  $|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1, i = 1, 2, \dots, m$ .由定义 2,第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 个量子位的相位为  $\theta_i = \arctan(\beta_i/\alpha_i)$ .

设种群的大小为  $n$ ,其染色体用量子位表示为  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ,其中  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 如式(3)所示.量子逻辑门选用量子旋转门  $G$ ,即

$$G = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中,  $\theta$  为量子门的旋转角,取值为:

$$\theta = k * f(i, j) \quad (5)$$

其中,  $k$  是一个与算法收敛速度有关的系数,  $k$  的取值必须合理选取,如果  $k$  的值取得太大,算法搜索的网格就很大,容易出现早熟现象,算法易收敛于局部极值点,反之,如果  $k$  的值得太小,算法搜索的网格就很小,速度太慢,甚至会处于停滞状态.由此,本文将  $k$  视为一个变量.在传统遗传算法中,自适应调整的系数往往与当前代的最大适应值和平均适应值有关,但在 NQGA 中,这种策略会影响到 NQGA 的计算时间短的特点.本文利用 NQGA 收敛速度快的特点,将  $k$  定义为一个与进化代数有关的变量,以便自适应地调整搜索网格的大小.如  $k = 10 * \exp(-t/\max t)$ ,其中  $t$  为进化代数,  $\max t$  是一个根据优化问题复杂性而定的一个常数.函数  $f(i, j)$  的作用是使算法朝着最优解的方向搜索.本文采用如表 1 所示的搜索

策略,其原理是使当前解逐渐逼近搜索到的最佳解,从而确定量子旋转门的旋转方向.在表 1 中,当  $d_1$  和  $d_2$  同时大于 0 时,意味着当前解和搜索到的最佳解均处于第一或第三象限,当  $|\alpha_1| > |\alpha_2|$  时,表明当前解应朝着逆时针方向旋转,其值为 +1,反之应为 -1.同理,可推出其他三种情况.

表 1 函数  $f(i, j)$  的查询表

$d_1 > 0$	$d_2 > 0$	$f(i, j)$	
		$ \alpha_1  >  \alpha_2 $	$ \alpha_1  <  \alpha_2 $
True	True	+1	-1
True	False	+1	+1
False	True	-1	-1
False	False	-1	+1

注:在表 1 中,  $\alpha_1$  和  $\beta_1$  是搜索到的最佳解的概率幅,  $d_1 = \alpha_1 * \beta_1, \theta_1 = \arctan(\beta_1/\alpha_1)$ ,  $\alpha_2$  和  $\beta_2$  是当前解的概率幅,  $d_2 = \alpha_2 * \beta_2, \theta_2 = \arctan(\beta_2/\alpha_2)$ .

这样,量子门的更新过程可描述为

$$P_j^{t+1} = G(t) * P_j^t \quad (6)$$

其中,上标  $t$  为进化代数,  $G(t)$  为第  $t$  代的量子门,  $P_j^t$  为第  $t$  代的某个个体的概率幅,  $P_j^{t+1}$  为第  $t+1$  代相应个体的概率幅,  $P_j^t$  和  $P_j^{t+1}$  的表示如式(3).

新量子遗传算法的具体过程如下:

(1) 初始化:确定种群大小  $n$  和量子位的数目  $m$ , 包含  $n$  个个体的种群  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , 其中  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 为种群中的第  $j$  个个体,其描述如式(3),所有的  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 均取为  $1/\sqrt{2}$ ,表示在初始搜索时所有状态以相同的概率进行叠加;

(2) 根据  $P$  中各个体的概率幅构造出量子叠加态的观测态  $R, R = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 其中  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 为每个个体的观测状态,即一个二进制串.在 NQGA 算法中,由概率幅  $P$  构造观测态  $R$  的过程包含算法的解码过程,解码后便得到各优化参数的当前实际值;

(3) 用适应度函数对种群中的所有个体进行适应值评价;

(4) 保留最佳个体,并判断是否满足终止条件,若满足,则算法终止,否则,执行下一步;

(5) 根据式(5)计算量子旋转门的旋转角,并用式(4)中的量子门作用于种群中的所有个体的概率幅,即更新  $P$ ;

(6) 进化代数增 1,算法转至(2)继续执行,直到算法结束.

### 3 算法性能测试

为了验证算法的可行性和有效性,下面用 5 个典型复杂函数进行验证,并与改进遗传算法(IGA)、最佳保留遗传算法(OMGA)和改进量子遗传算法(IQGA)进行对照比较.

#### 3.1 典型测试函数

(1) 简单平方和函数<sup>[6]</sup>:

$$F_1 = x_1^2 + x_2^2, -5 \leq x_i \leq 5, i = 1, 2$$

该函数只有一个极小点  $f(0, 0) = 0$ .

(2) De Jong 函数<sup>[6]</sup>:



$$F_2 = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2, -2.048 \leq x_i \leq 2.048, i = 1, 2$$

这是一个二维函数,它在整个解域中只有一个全局最小点  $f(1, 1) = 0$ ,该函数虽然是单峰值函数,但它却是病态的,难以进行全局优化.

(3) Coldstein-Price 函数<sup>[7]</sup>:

$$F_3 = [1 + (x_1 + x_2 + 1)^2(19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)] \sqrt{30 + (2x_1 - 3x_2)^2 \cdot (18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)}, -2 \leq x_i \leq 2, i = 1, 2$$

该函数在其定义域内只有一个全局最小点  $f(0, -1) = 3$ .

(4) Schaffer 函数<sup>[7]</sup>:

$$F_4 = 0.5 + \frac{\sin^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 0.5}{[1.0 + 0.001(x_1^2 + x_2^2)]^2}, -100 \leq x_i \leq 100, i = 1, 2$$

该函数在其定义域内只有一个全局最小点  $f(0, 0) = 0$ .

(5) 六峰驼背函数<sup>[7]</sup>:

$$F_5 = (4 - 2.1x_1^2 + (1/3)x_1^4)x_1^2 + x_1x_2 + (-4 + 4x_2^2)x_2^2, -3 \leq x_1 \leq 3, -3 \leq x_2 \leq 3$$

该函数共有六个局部极小点,两个全局最小点  $f(-0.0898, 0.7126) = f(0.0898, -0.7129) = -1.031628$ .

### 3.2 算法简介与参数选择

(1) 最优保留遗传算法 (OMGA): 种群大小  $P = 200$ , 串长  $L = 30$ , 采用蒙特卡罗法选择, 单点交叉, 交叉概率  $P_c = 0.8$ , 基本位变异, 变异概率  $P_m = 0.05$ , 采用最优保留策略, 终止代数  $g = 10000$ .

(2) 改进遗传算法 (IGA): 种群大小  $P = 200$ , 串长  $L = 30$ , 采用排序法选择, 两点交叉, 交叉概率  $P_c = 0.8$ , 基本位变异, 变异概率  $P_m = 0.05$ , 终止代数  $g = 10000$ .

(3) 改进量子遗传算法 (IQGA): 种群大小  $P = 50$ , 量子位数目  $m = 30$ , 量子门更新的查询表如表 2 所示, 终止代数  $g = 1000$ .

表 2 IQGA 的查询表

$x_i$	$b_i$	$f(x) > f(b)$		$S(i, i)$			
				$i_i > 0$	$i_i < 0$	$i_i = 0$	$i_i = 0$
0	0	F	0	0	0	0	0
0	0	T	0	0	0	0	0
0	1	F	0	0	0	0	0
0	1	T	0.05	+1	-1	0	±1
1	0	F	0.01	+1	-1	0	±1
1	0	T	0.025	-1	+1	±1	0
1	1	F	0.005	-1	+1	±1	0
1	1	T	0.025	-1	+1	±1	0

(4) NQGA: 种群大小  $P = 20$ , 量子位数目  $m = 30$ , 终止代数  $g = 1000$ .

### 3.3 计算结果与分析

计算结果和比较内容如表 3 所示, 共有 5 个函数, 每个函数用 OMGA、IGA、IQGA 和 NQGA 各计算 100 次. 算法的性能从质量和效率两方面来考虑, 算法的质量用成功率、最佳值、最佳值的平均值三个指标来衡量, 效率用平均计算时间和终止代数两个指标来衡量. 从算法的成功率来看, NQGA 最好, IQGA 和 IGA 次之, OMGA 最差; 从平均计算时间来看, NQGA 和 IQGA 要比 IGA 和 OMGA 好得多; 从计算精度来看, NQGA 比其它三种都要好. 总之, 表 3 中的测试结果表明, NQGA 在对连续函数进行优化时, 其性能是优于其它三种算法的.

表 3 测试函数计算结果与比较

函数	算法	平均计算时间	成功率(0.001) (%)	成功率(0.01) (%)	最佳值	平均值	平均代数	最优解
F1	OMGA	4.00521	100		0.00003376	0.0005737	278.4500	0
	IGA	2.86565	100		0.00002371	0.0009665	171.9392	
	IQGA	0.90312	100		0.00004587	0.0005263	102.3000	
	NQGA	0.16491	100		0.00008108	0.000527	17.8000	
F2	OMGA	22.00824	70		0.000067959	0.00060724	3974.8500	0
	IGA	2.64225	80		0.00003686	0.00059643	156.2778	
	IQGA	1.56197	65		0.00007074	0.00058494	162.8462	
	NQGA	0.69321	100		0.00003541	0.00043370	67.8890	
F3	OMGA	17.24235	0	53	3.006272689	3.00632974	3213.4000	3
	IGA	6.83746	0	81	3.005259279	3.00715336	478.3750	
	IQGA	7.82975	20		3.000362450	3.00048548	873.2750	
	NQGA	1.94972	100		3.000121210	3.00058551	190.1333	
F4	OMGA	41.08321	0	62	0.001656941	0.00367764	2759.000	0
	IGA	29.53713	0	74	0.004455683	0.00455683	1605.000	
	IQGA	8.536267	0	69	0.003874521	0.00889486	952.540	
	NQGA	3.568514	100		0.000018627	0.00024215	329.127	
F5	OMGA	3.98615	0	89	-1.03158591	-1.0311455	299.500	-1.031628
	IGA	2.52787	0	97	-1.03137671	-1.0309703	123.200	
	IQGA	2.56443	77		-1.03152343	-1.0312915	282.083	
	NQGA	0.856656	100		-1.03158079	-1.0313833	79.818	

#### 4 用 NQGA 进行 IIR 数字滤波器优化设计

当设计任意频率响应的 IIR 数字滤波器时,不存在明显的解析方法,一般采用最优化方法.下面采用 NQGA 直接在频率域进行 IIR 数字滤波器的优化设计<sup>[8]</sup>.

算例 设计一带通 IIR 数字滤波器,性能指标为:

$$|H_d(e^j\omega)| = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq 0.28, 0.7 \leq \omega \leq 1 \\ 0, & 0.32 \leq \omega \leq 0.68 \end{cases} \quad (3)$$

选取滤波器的阶数为 6,频率采样点数取为 46.分别采用 NQGA、OMGA、IGA 和 IQGA 进行 IIR 数字滤波器优化设计,所得的结果如表 4 和图 1 所示.表 4 对四种算法设计出的滤波器的性能进行对照比较,图 1 直观地给出了四种算法设计出的滤波器的频率响应的幅值.从表 4 和图 1 可看出,采用 NQGA 设计的 IIR 数字滤波器的通带最大波动( $A_p$ )最小,阻带最小衰减( $A_s$ )最大,这表明采用 NQGA 优化设计的 IIR 数字滤波器的性能优于 OMGA、IGA 和 IQGA 设计的滤波器性能,证实了 NQGA 的优越性.

表 4 滤波器的性能对照表

Algorithms	OMGA	IGA	IQGA	NQGA
$A_p$	0.647dB	0.5764dB	0.732dB	0.3546dB
$A_s$	24.00dB	31.23dB	28.395dB	33.58dB

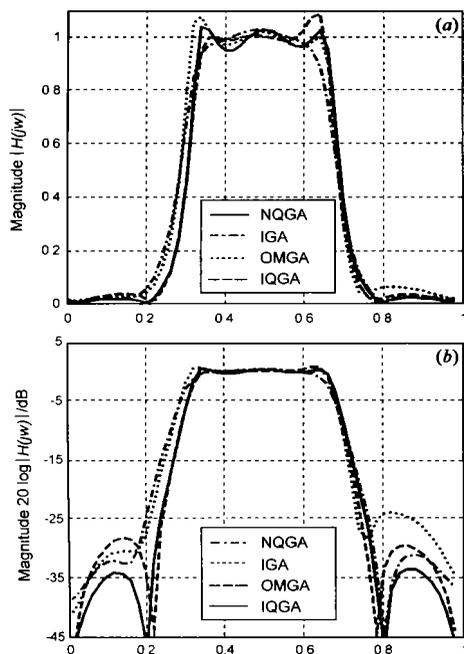


图 1 IIR 滤波器的频率特性

#### 5 结束语

基于量子计算的一些概念和原理,本文提出了一种新量子遗传算法.文中将该算法和最优保留遗传算法、改进遗传算法以及改进量子遗传算法用于优化典型复杂函数,测试结果表明本文提出的方法在收敛速度、迭代次数、计算时间、全局寻优能力等方面都是最好的.而且,IIR 数字滤波器优化设计

实例也表明,采用 NQGA 优化设计的滤波器具有比 OMGA、IGA 和 IQGA 设计出的滤波器更好的性能.

#### 参考文献:

- [1] Hey T. Quantum computing: An introduction [J]. Computing & Control Engineering Journal, 1996, 10(3): 105 - 112.
- [2] Narayanan A. An introductory tutorial to quantum computing [A]. Proc of IEE Colloquium on Quantum Computing: Theory, Applications and Implications [C]. London: IEE Press, 1997. 1/1 - 1/3.
- [3] Narayanan A, Moore M. Quantum-inspired genetic algorithm [A]. Proc of IEEE International Conference on Evolutionary Computation [C]. Piscataway: IEEE Press, 1996. 61 - 66.
- [4] Han K H, Kim J H. Genetic quantum algorithm and its application to combinatorial optimization problems [A]. Proc of IEEE Conference on Evolutionary Computation [C]. Piscataway: IEEE Press, 2000. 1354 - 1360.
- [5] Han K H, Park K H, et al. Parallel quantum-inspired genetic algorithm for combinatorial optimization problems [A]. Proc of the IEEE Conference on Evolutionary Computation [C]. Piscataway: IEEE Press, 2001. 1442 - 1429.
- [6] 于洋, 查建中, 唐晓君. 基于学习的遗传算法及其在布局中的应用 [J]. 计算机学报, 2001, 24(12): 1242 - 1249.
- [7] 李敏强, 寇纪淞, 等. 遗传算法的基本理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2002. 50 - 200.
- [8] 程佩青. 数字信号处理教程(第二版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001. 228 - 322.

#### 作者简介:



张葛祥 男, 1974 年 4 月生于四川省绵阳市, 西南交通大学电气工程学院, 博士研究生, 主要研究方向为进化计算、优化理论与优化控制、信号处理、神经网络等.



李娜 女, 1978 年 6 月生于河北省唐山市, 西南交通大学电气工程学院, 硕士研究生, 主要研究方向为进化计算、满意优化、系统仿真;

金炜东 男, 1959 年 9 月生于安徽省淮南市, 西南交通大学电气工程学院教授, 博士生导师, 博士, 主要研究方向为优化理论与优化控制、智能信息处理、系统仿真等.

胡来招 男, 1945 年 5 月生于浙江省绍兴市, 中国电子科技集团第 29 所研究员, 博士生导师, 博士, 主要研究方向为信号处理、侦察接收机、无源定位等.