

小波域中的双边滤波

蔡 超,丁明跃,周成平,张天序

(华中科技大学图像识别与人工智能研究所,教育部信息处理与智能控制重点实验室,湖北武汉 430074)

摘 要: 本文首先介绍了小波域中几种常用的滤波方法,分析了双边滤波的性质和特点,在此基础上提出了小波域中的双边滤波.这种方法充分利用了小波分析的时频局部化和多分辨率的特点,使滤波结果的信噪比较高的同时边缘具有较小的模糊.本文的实验结果说明该方法是行之有效的.

关键词: 小波;滤波;双边滤波

中图分类号: TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 01-0128-04

Bilateral Filtering in the Wavelet Domain

CAI Chao, DING Ming-yue, ZHOU Cheng-ping, ZHANG Tian-xu

(Institute for Pattern Recognition and Artificial Intelligence State Education Commission Key Lab for Image Processing and Intelligent Control Huazhong University of Sci. & Tech., Wuhan, Hubei 430074, China)

Abstract: In this paper, we introduced several noise removing techniques in the wavelet domain, analyzed the properties of bilateral filtering. Following them, bilateral filtering in the wavelet domain was proposed. With this method, the properties of time-frequency localization and multiresolution of wavelets were used. At last, we demonstrated the efficient noise removing and sharpening of object boundaries and detailed structures by applying this image processing technique to different images.

Key words: wavelets; filter; bilateral filter

1 引言

在航空航天、医疗诊断、工业检测等领域人们总是希望获取较高质量的图像(图片),这包括较高的分辨率和信噪比,图像的细节尽可能的丰富而清晰.然而由于成像设备和成像条件的限制,所获取的原始图像往往不能满足人们的上述要求.去除噪声以提高信噪比一直是图像处理领域一个十分活跃的研究方向.

传统的去噪方法一般是首先设计滤波模板和权系数,而滤波输出则是当前点和模板内周围点灰度的加权平均^[1].由于滤波过程中信号在空间上的加权平均的影响,输出结果的信噪比增强的同时,图像的边缘往往不可避免地产生了模糊.为了克服传统滤波器的这些缺陷,出现了各种自适应滤波算法^[2~3],这些滤波方法的基本思想是在滤波的同时照顾到图像边缘的特点,使滤波结果的边缘模糊现象尽可能地减少.在小波理论应用到图像处理以后,人们提出了多种小波变换域下的图像去噪方法^[4~6],常见的如:(1)线性估计法;(2)门限法;(3)贝叶斯估计法—Mallat^[7]认为信号的小波变换系数服从拉普拉斯分布,而噪声的小波变换系数仍服从高斯分布,在此基础上对信号做贝叶斯估计.

小波变换的最大优点在于它具有时频局部化和多分辨率

的性质.信号经小波变换被分解到不同的频带的同时,在每一频带内信号的时间(位置)信息也被精确地记录下来.因此在滤波过程中除考虑频带的不同外,在同一频带内应该充分利用信号的位置信息.在这一思想指导下,本文提出了小波域中的双边滤波方法.本文第二部分介绍小波变换的一些特点;第三部分介绍双边滤波的特点;第四部分为小波域中的双边滤波;第五部分是试验结果;最后是结论和展望.

2 图像在小波域中的特点

小波基函数是通过一个具有震荡特性的小波母函数的伸缩和平移生成的,图像的小波变换就是用这样一组基函数的展开过程.一幅图像的小波系数往往是稀疏的,大的小波系数只出现在小波支集内图像的边缘的位置.这一能量集中特性是因为在一张典型的图像中边缘部分只占很小的比例.该特性还告诉我们小波域中大量的低能量信号可以认为是噪声,门限法正是利用了这样一个特性对图像进行估计.

$$\hat{w}(y) = \begin{cases} w(y) & |w(y)| > 3\sigma_n \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (1)$$

$w(y)$ 为小波变换系数, σ_n 为噪声标准差, $\hat{w}(y)$ 为估计值.贝叶斯估计则是在此基础上利用概率密度函数模型估计无噪声图像的小波变换系数^[4,5].

$$\hat{w}(y) = E(c|y) = \frac{w_n(y-c)w_c(c)c}{w_n(y-c)w_c(c)} \quad (2)$$

$w_n(x)$ 为小波域中噪声的概率密度函数, $w_c(x)$ 为无噪声图像在小波域中的概率密度函数. 事实上, 如果假定噪声在小波域中服从均值为 0, 方差为 $\frac{2}{n}$ 的高斯分布, 而信号在小波域中服从均值为 0, 方差为 $\frac{2}{c}$ 的高斯分布, 则上述贝叶斯估计成为简单的线性估计方法:

$$\hat{w}(y) = \frac{\frac{2}{n}}{\frac{2}{n} + \frac{2}{c}} w(y) \quad (3)$$

由于小波系数之间的相关性往往只在局部位置产生, 在这样一个假定下人们又提出了其他的一些图像估计方法^[6].

3 双边滤波^[8]

低通空域滤波假定图像中一点与其领域中的点的灰度是相似的, 而噪声被认为是互不相关的. 但事实上, 比方说图像边缘上的一点与边缘两边的点却往往有很大的差异. 考虑到图像的这一特点, 可以设计双边滤波器:

$$h(x) = k^{-1}(x) \int c(\cdot, x) s(f(\cdot), f(x)) d \quad (4)$$

这里 $c(\cdot, x)$ 是点 \cdot 与几何中心 x 的空间邻近度, $s(f(\cdot), f(x))$ 为点 \cdot 与几何中心 x 的像素灰度相似度, $k(x)$

$$= \int c(\cdot, x) s(f(\cdot), f(x)) d.$$

双边滤波器的特点是对图像的每一点用其空间相邻且灰度相近的像素值的平均值代替原来的值, 从而达到滤波的效果. 在图像变化平缓的区域, 在一个小的邻域内图像的灰度变化不大, 近似为常数, 这时双边滤波器转化为标准的低通空域滤波器. 而在图像变化剧烈的区域, 比如在一个二值图的边缘上, 灰度相似函数在灰度值相同的一边为 1, 而在灰度值不同的一边近似为 0, 结果滤波器用边缘点邻域内灰度近似的像素点的灰度平均值替代原灰度值. 这样, 双边滤波既可以达到滤波的效果又可以保持图像的高频细节, 因此是一种很有应用价值的滤波方法.

一种最简单也最常用的双边滤波器是移不变高斯滤波器, 这时空间邻近度函数和灰度相似函数都取为参数间欧几里德距离的高斯函数, 通常定义为:

$$c(\cdot, x) = e^{-(1/2)(\|\cdot - x\|/d)^2} \quad (5)$$

$$s(\cdot, x) = e^{-(1/2)(\|f(\cdot) - f(x)\|/r)^2} \quad (6)$$

事实上, 由公式(4)可以看出双边滤波是对图像的空间邻近度和灰度相似度的一种折衷处理. 在同一尺度下进行双边滤波时, 小的边缘体现出的灰度差异往往被空间邻近度所掩盖, 滤波结果是大的边缘被保留, 小的边缘却被滤掉. 正是这个原因, 双边滤波又可用来去除图像的纹理, 而保留图像的形状特征, 达到数据压缩的目的.

4 小波域中的双边滤波

由公式(1)(3)可以看出, 小波域中的线性估计和门限估计方法都只应用了当前位置的小波系数的值, 贝叶斯估计也

只是一种低通空域滤波, 滤波结果的好坏取决于统计模型建立的准确性.

小波变换的特点使得图像的边缘在小波域中在相应的位置, 以相同的走向表现为大的小波系数. 并且随着变换次数的增加, 边缘处的小波系数也在变大. 这提示我们在小波域中滤波可以不仅仅考虑小波系数的空域信息, 还可以考虑它的值域信息, 从而尽可能的保留图像的边缘, 这在傅立叶变换下是做不到的.

在小波域中, 我们记 $c^j(\cdot, x)$ 为点 \cdot 与几何中心 x 的空间邻近度, j 表示第 j 层分解. 对于二进小波变换, 如果采用 Mallat 算法, 由于减抽样的原因第 j 层和第 $j+1$ 层的小波系数空间邻近度函数之间相差一个 2 的倍数:

$$c^{j+1}(\cdot, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} c^j(2\cdot, 2x) \quad (7)$$

记 $s^j(w(\cdot), w(x))$ 为点 \cdot 与几何中心 x 的小波系数的相似度, j 表示第 j 层分解. Mallat 证明^[9], 如果函数 $f(x, y)$ 的 Lipschits 指数为 α , 则它的小波变换系数最大模值应该满足: $|M_2 f(x, y)| \leq K(2^j)^\alpha$, K 为常数, 即:

$$\log_2 |M_2 f(x, y)| \leq j + \log_2 K \quad (8)$$

假设 (x_0, y_0) 是被检测的点, 小波分解的最大层数为 J , 可以构造一个目标函数 $E(\cdot, K)$, 它与小波系数之间由下式建立联系:

$$E(\cdot, K) = \sum_{j=1}^J [W_2 f(x_0, y_0) - 2^j K]^2 \quad (9)$$

使 $E(\cdot, K)$ 取极小值, 可以估计 K 的值. (8) 式还表明, 当 $\alpha = 0$ 时, 表明边缘不连续; 当 $\alpha < 0$ 时, 则随着尺度的增大, 模值反而减小, 在该点上的特征实际上是噪声; 只有当 $\alpha > 0$ 时, 极大模值随着尺度的增大而增大. 那么第 j 层和第 $j+1$ 层的小波系数的相似度函数之间相差一个 K^2 倍数可以有效地对噪声点进行平滑, 小波系数的相似度函数取为如下形式:

$$s^{j+1}(w(\cdot), w(x)) = \sqrt{K^2} s^j(K^2 w(\cdot), K^2 w(x)) \quad (10)$$

本文中, 小波域下的双边滤波器仍然取为移不变高斯滤波器, 结合公式(7)空间邻近度函数取为如下形式:

$$c^j(\cdot, x) = 2^j e^{-(1/2)(\|\cdot - x\|/2^{-j}d)^2} \quad (11)$$

d 为常数, j 为滤波所处于的小波分解的层数. 结合公式(10)小波系数相似度函数取为如下形式:

$$s^j(w(\cdot), w(x)) = K^2 e^{-(1/2)(\|w(\cdot) - w(x)\|/K^{-1}2^{-j}r)^2} \quad (12)$$

图 1 是小波域下的双边滤波器的三维示意图, a 为二值图叠加高斯白噪声后的图像, b 为一次小波变换后的小波系数, c 为在图像边缘位置的小波域中的双边滤波器.

5 实验结果

该部分以“爱因斯坦”灰度图像作为实验图像, 大小 256 × 256 (像素); 用双正交样条小波 (Bior2.4) 进行小波变换和反变换. 表 1 显示了本文提出的小波域中的双边滤波算法和几种其它滤波算法对不同信噪比的“爱因斯坦”图像滤波结果的比较. 双边滤波一栏中的右边一栏 (d, r) 为试验中对不同信噪比的图像所选用的 d, r 的值. 可以看出, 对低信噪比的图

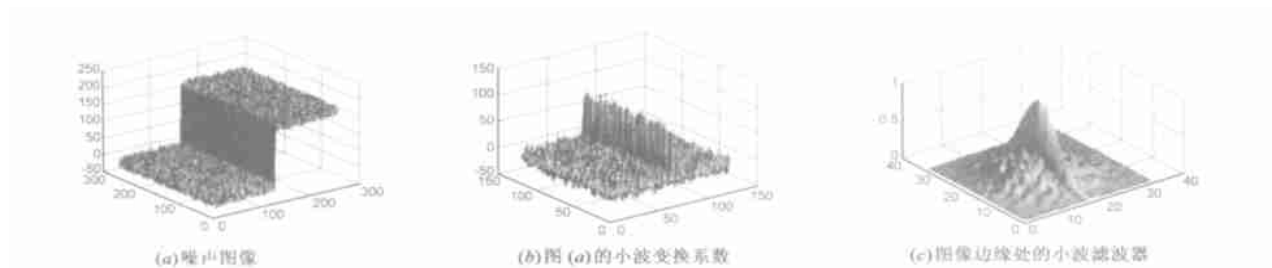


图1 小波域中的双边滤波器

像采用本文所提出的算法和维纳滤波以及小波域中的线性估计、门限估计、贝叶斯估计相比具有明显的优势. 在 d, r 选取的较为恰当的情况下, 小波域中的双边滤波结果仍然比贝叶斯估计结果的信噪比明显要高 (如本表中信噪比为 8.99 时选取 $(d, r) = (5, 30)$). 经大量的实验, 对于 *Bior2.4* 小波 d, r 与图像信噪比的经验公式为 $d = 0.12 * (SNR)^2 - 1.78 * (SNR) + 11.80$, $r = 0.80 * (SNR)^2 - 15.36 * (SNR) + 104.37$.

图2显示了“爱因斯坦”原图像, 信噪比为 $SNR = 3.30\text{dB}$ 的噪声图像, 以及不同滤波算法的滤波结果图像. 可以看出, 在这几种滤波算法中, 小波域中的门限估计使得图像的边缘具有较大的失真, 而且细小的边缘被滤掉了; 贝叶斯估计要好一些; 噪声滤除最彻底, 边缘扭曲最少的是小波域中的双边滤波; 线性滤波和维纳滤波的噪声滤除不够理想, 而且明显有使图像分辨率降低的缺陷.

表1 小波域中的不同滤波算法以及维纳滤波的滤波结果

噪声图像 $SNR(\text{dB})$	线性估计结果 $SNR(\text{dB})$	门限估计结果 $SNR(\text{dB})$	贝叶斯估计结果 $SNR(\text{dB})$	维纳滤波结果 $SNR(\text{dB})$	双边滤波	
					$SNR(\text{dB})$	(d, r)
0.39	7.86	7.81	8.41	7.28	8.97	(12, 100)
1.62	8.22	8.49	9.17	8.33	9.68	(8, 80)
3.30	8.99	9.44	10.43	9.65	10.67	(7.5, 62)
4.31	9.52	10.05	11.13	10.41	11.21	(6.5, 55)
6.34	10.41	11.18	12.47	11.90	12.46	(6, 40)
8.99	11.24	12.63	14.05	13.77	14.18	(5, 30)

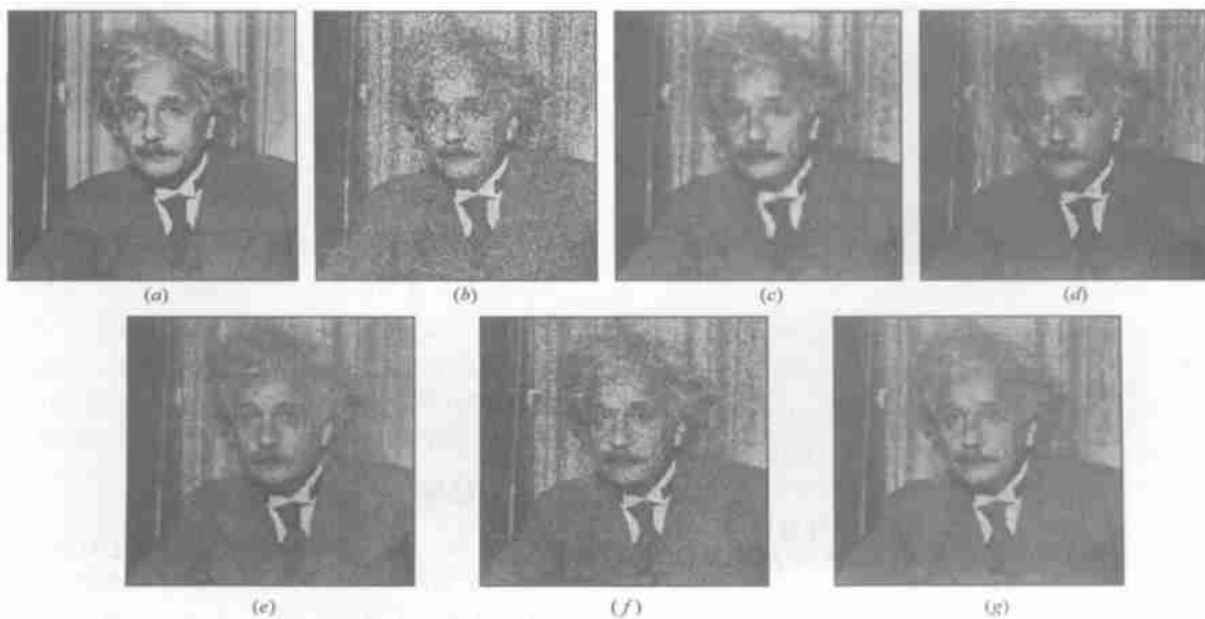


图2 不同滤波器的滤波结果

(a) “Einstein”原图像, (b) 噪声图像 ($SNR = 3.30\text{dB}$), (c) 线性滤波 ($SNR = 8.99\text{dB}$), (d) 门限滤波 ($SNR = 9.44\text{dB}$), (e) 贝叶斯估计 ($SNR = 10.43\text{dB}$), (f) 维纳滤波 ($SNR = 9.65\text{dB}$), (g) 小波域中的双边滤波 ($SNR = 10.67\text{dB}$).

6 结论

本文提出的小波域中的双边滤波充分利用了小波分析的多分辨率分解和时频局部化的特点,在不同的分辨率下通过调整双边滤波器因子获得小波系数的空间临近度和小波系数值相似度之间的合理折衷,同时利用图像边缘处的 Lipschits 指数较大的特点,使得滤除噪声的同时尽可能地保留图像边缘.从实验结果来看,该方法是有用的.但是由于精确估计图像的 Lipschits 指数有一定的困难,作者认为本文中的实验结果还没有完全体现出小波域中的双边滤波这一思想方法的潜在优势.本文给出的根据输入图像信噪比确定 (d_s, r_s) 的经验公式在实际应用时可能会有出入,如何更好地确定图像信噪比和滤波参数 (d_s, r_s) 的关系仍需进一步研究.

参考文献:

- [1] Oppenheim A V, Schafer R W. Discrete-time signal processing. Englewood cliffs [M]. NJ: Printice-Hall, 1989.
- [2] Chan P, Lim J S. One-dimensional processing for adaptive image restoring [J]. IEEE Trans. 1985, ASSP-33(2): 117 - 126.
- [3] Rank K, Unbehauen R. An adaptive recursive 2-D filter for removal of Gaussian noise in images [J]. IEEE Trans. Image Processing, 1992, 1(7): 431 - 436.
- [4] Simoncelli E P, Anderson E H. Noise removal via Bayesian wavelet coring [A]. Proceedings of the 3rd IEEE International Conference on Image Processing [C]. Lausanne Switzerland, 1996, 1: 379 - 382.
- [5] Simoncelli E P. Bayesian denoising of visual images in the wavelet domain [A]. Bayesian Inference in Wavelet Based Models [C]. Chapter 18, Springer-Verlag, 1999. 291 - 308.
- [6] Romberg J K, et al. Shift-invariant denoising using wavelet-domain hidden markov trees [A]. Proc. 33rd Asilomar Conference [C]. Pacific Grove, CA, October 1999.
- [7] Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation [J]. IEEE Trans. 1989, PAMI-11(7): 674 - 693.
- [8] Tomasi C, Manduchi R. Bilateral filtering for gray and color images [A]. Proc. of the 1998 IEEE Inter. Conf. on Computer Vision [C]. Bombay, India, 1998: 839 - 846.
- [9] Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelet [J]. IEEE Trans. on Information Theory, 1992, 38(2): 617 - 643.

作者简介:



蔡 超 男, 1971 年生于山东省东明县, 1994 年获曲阜师范大学学士学位, 1997 年获华中理工大学(现华中科技大学)硕士学位, 现为华中科技大学图象识别与人工智能研究所讲师, 在职博士生, 主要从事小波分析, 图象匹配, 目标识别与跟踪, 数据可视化等研究.



丁明跃 男, 1961 年生于湖北省麻城市, 华中科技大学图象识别与人工智能研究所副所长, 教授, 博士生导师, 1991 年至 1993 年获德国洪堡研究基金, 在德国不伦瑞克工业大学机器人研究所从事博士后研究工作, 主要研究领域包括计算机视觉、路径规划、目标识别与跟踪等, 电子学报与宁航学报编委.