Heyting 系统及其 H-空间化表示形式

吴洪博,石慧君
(陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西西安 710062)

摘 要: Steven Vickers 将拓扑的方法与逻辑理论的结果相结合于专著《Topology via Logic》中建立了拓扑系统,并将这一理论应用于计算机理论的研究.本文借助于拓扑系统的思想和方法,以及 Frame 结构和 Heyting 代数的共有性质,以 Heyting 代数为主体建立了一种新型的代数系统—Heyting 系统,建立了 Heyting 系统之间的恰当的联系方法—H-连续映射;给出了 Heyting 系统的 H-空间化表示形式并对相关性质进行了讨论.本文的工作进一步丰富了 Heyting 代数的研究方法和拓扑系统的研究内容.

关键词: 拓扑系统; Heyting 系统; H-连续映射; H-空间化; 范畴
中图分类号: O153.1, O189.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 05-0995-05
电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.05.021

Heyting System and Its Representation by H-Spatilization

WU Hong-bo, SHI Hui-jun
(*College of Mathematics and Information Science*, *Shaanxi Normal Universtity*, *Xi' an*, *Shaanxi* 710062, *China*)

Abstract: Steven Vickers has proposed the topological system in his work "Topology via Logic" by synthesizing the methods of topology and the theory of logics, which also is applied to study of computers theory. Firstly, with the help of the idea of topological systems and the properties enjoyed by Frame structure and Heyting algebras, the new algebras system-Heyting system is put forward that takes the Heyting algebras as its principal body; Secondly, the suitable method of H-continuous mapping connecting Heyting systems is established; Thirdly, the representation of H-spatialization of a Heyting system is given, and related properties are investigated. The research methods of Heyting algebras and the research contents of topological system are enriched with the work of this paper.

Key words: topological system; heyting system; H-continuous mapping; H-spatialization; category

1 引言

1989 年,Steven Vickers 在论著《Topology via Logic》中结合数理逻辑的特点将序与拓扑结合为一体引进了一种新型拓扑学研究对象-拓扑系统[1],使得拓扑学中有点化学派研究领域(包括一般拓扑学[2]、模糊拓扑学[3]、拓扑分子格理论[4])的研究对象得以统一处理.Heyting 代数是作为直觉主义命题逻辑的代数模型而引进的[5~7],同时与 Fuzzy 蕴涵代数[8],格蕴涵代数[9,10]、MV-代数[7]等都有一定联系.文献[5,6]中指出,Heyting 代数必为分配格.而文献[1]中证明了一个完备的 Heyting 代数与 Frame 结构的等价性.本文借助于拓扑系统[1],半拓扑系统[11]的思想和方法,以及 Frame 结构和 Heyting 代数的共有性质[1,5],并结合数理逻辑理论的特点[7],以 Heyting 代数为主体建立了一种新型的代数系统—Heyting 系统,讨论了拓扑系统与 Heyting 系统的联系与区别,建立了 Heyting 系统之间的恰当的联系方法—H-连续映射,H-同胚映射,给出了 Heyting 系统的 H-空间化表示形式并对相关性质进行了讨论,证明了以 Heyting 系统为对象,以及 H-连续映射为态射的体系符合范畴要件[5].本文的工作进一步丰富了 Heyting 代数的研究方法和拓扑系统的研究内容.

2 预备知识

设$(L,\leqslant)$是一偏序集,A 是 L 的子集,若 $\exists x\in L$,满足 $\forall a\in A$, $a\leqslant x$,则称 x 是 A 的上界.若 A 有最小上界,则称之为 A 的上确界,记作 $\vee A$.对偶的可定义 A 的下界和下确界 $\wedge A$.若 L 的每个有限子集(任意子集)都有上、下确界,则称 L 为格(完备格).

空集的上、下确界分别是 L 的最小元和最大元,分

收稿日期:2011-06-08;修回日期:2011-11-15
基金项目:国家自然科学基金(No.11171196)

别记作 $0_L, 1_L$，在不引起混淆的情况下，通常记作 0，1.

定义 1[1,5] 设 L 是格. 如果 $\forall a,b,c\in L$，有 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$，则称 L 为分配格.

定义 2[5,7] 设 H 是有界格. 若存在二元运算 $\to: H\times H\to H$ 满足 $\forall a,b,c\in H$，$c\wedge a\leqslant b \Leftrightarrow c\leqslant a\wedge b$，则称 H 为 Heyting 代数. 这时 H 也记作 $(H,\to)$. 再若 H 是完备格，则称 H 为完备的 Heyting 代数.

定义 3[1,5] 设 H_1, H_2 是 Heyting 代数，$f: H_1\to H_2$ 是映射，如果 f 保有限交，有限并和 $\to$ 运算，则称映射 $f: H_1\to H_2$ 为 Heyting 代数同态.

命题 1[5,6] 设 H 是格，$\to: H\times H\to H$ 是 H 上的二元运算，则 $(H,\to)$ 是 Heyting 代数当且仅当 $\forall a,b,c\in H$，

(ⅰ) $a\to a=1$；(ⅱ) $a\wedge(a\to b)=a\wedge b$；(ⅲ) $b\wedge(a\to b)=b$；(ⅳ) $a\to(b\wedge c)=(a\to b)\wedge(a\to c)$.

命题 2[5,6] 设 L 是有限格，则 L 是 Heyting 代数当且仅当 L 为分配格.

定义 4[1,5] 设 A 是完备格，如果对任意 $a\in A$ 以及 $\{b_i\}_{i\in I}\subseteq A$，$a\wedge(\vee_i b_i)=\vee_i(a\wedge b_i)$，则称 A 是 Frame.

命题 3[1,5] 设 A 是格. A 是 Frame 当且仅当 A 是完备的 Heyting 代数.

定义 5[1] 设 A 是 Frame，X 是集合，$\vDash\ \subseteq X\times A$. 若 $(x,a)\in\ \vDash$，则称 x 满足 a，记作 $x\vDash a$.

若 $\vDash$ 满足：

($T1$) 对 A 的任意有限子集 S，$\forall x\in X$，$x\vDash\wedge S\Leftrightarrow\forall a\in S$，$x\vDash a$.

($T2$) 对 A 的任意子集 S，$\forall x\in X$，$x\vDash\vee S\Leftrightarrow\exists a\in S$，使得 $x\vDash a$.

则称 $(X,A,\vDash)$ 为一个拓扑系统.

3 Heyting 系统和 H-连续映射

定义 6 设 H 是 Heyting 代数，X 是集合，$\vDash\ \subseteq X\times H$. 若 $(x,a)\in\ \vDash$，则称 x 满足 a，记作 $x\vDash a$.

若 $\vDash$ 满足：

($H1$) 对 H 的任意有限子集 A，$\forall x\in X$，$x\vDash\wedge A\Leftrightarrow\forall a\in A$，$x\vDash a$.

($H2$) 对 H 的任意有限子集 A，$\forall x\in X$，$x\vDash\vee A\Leftrightarrow\exists a\in A$，使得 $x\vDash a$.

($H3$) $\forall a,b\in H$，$\forall x\in X$，$x\vDash a\to b\Leftrightarrow\exists c\in H$，满足：

(1) $x\vDash c$，(2) $\forall y\in X$，$y\vDash a\wedge c\Rightarrow y\vDash b$.

则称 $(X,H,\vDash)$ 为一个 Heyting 系统.

本文用大写英文字母 $D,E\cdots$ 表示一个 Heyting 系统. 若 $D=(X,H,\vDash)$ 是一个 Heyting 系统，用 pt D 表示点部 X，ΩD 表示 Heyting 代数 H，有时用 $\vDash_D$ 替代 $\vDash$ 以示区分不同 Heyting 系统中的关系部分. 这样，$D=(\mathrm{pt}D,\Omega D,\vDash_D)$.

例 1 设 $(X,\Omega X)$ 是一拓扑空间，$\forall U,V\in\Omega X$，定义 $U\to V=\bigcup\{W\in\Omega X: U\cap W\subseteq V\}$，再令 $\vDash\ =\{(x,U)\in X\times\Omega X\mid x\in U\}$. 则 $(\Omega X,\to)$ 是 Heyting 代数，且 $(X,(\Omega X,\to),\vDash)$ 是 Heyting 系统.

证明 X 上的拓扑 ΩX 是有界分配格，且满足第一无限分配律：$A\cap(\bigcup\mathcal{U})=\bigcup\{A\cap\mathcal{U}\mid U\in\mathcal{U}\}$ $(A\in\Omega X, \mathcal{U}\subseteq\mathcal{P}(\Omega X))$. 从而 $(\Omega X,\to)$ 是 Heyting 代数[1]. 下面按照定义 6 验证 $(X,(\Omega X,\to),\vDash)$ 是 Heyting 系统.

由于 $x\vDash U$ 当且仅当 $x\in U$，因此 $H1$，$H2$ 成立；

设 $x\in X$，$U,V\in\Omega X$. 若 $x\in U\to V$. 令 $C=U\to V$，则

(1) $x\in C$；

(2) $\forall y\in X$，设 $y\in C\cap U$，则 $y\in U\cap(U\to V)=U\cap(\bigcup\{W\in\Omega X\mid U\cap W\subseteq V\})=\bigcup\{U\cap W\in\Omega X\mid U\cap W\subseteq V\}$，即 $y\in V$.

若存在 $C\in\Omega X$ 满足：(1) $x\in C$，(2) $\forall y\in X$，若 $y\in U\cap C$，则 $y\in V$. 由 (2) 知 $U\cap C\subseteq V$，故 $C\subseteq\bigcup\{W\in\Omega X\mid U\cap W\subseteq V\}=U\to V$，则由 (1) 知 $x\in U\to V$.

因此，$H3$ 成立. 从而 $(X,(\Omega X,\to),\vDash)$ 是 Heyting 系统.

命题 4 若 ΩD 为有限 Heyting 代数，则 Heyting 系统 $(\mathrm{pt}D,\Omega D,\vDash_D)$ 是拓扑系统.

证明 因为有限的 Heyting 代数必是完备的 Heyting 代数，由命题 3，定义 5，定义 6 即得.

注 拓扑系统不必是 Heyting 系统，因为拓扑系统不必满足 ($H3$).

例如，构造拓扑系统如下：

(1) $\mathrm{pt}D=\{x,y\}$；

(2) ΩD 如图 1.

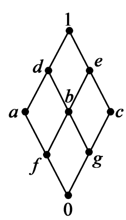

图1

验证 ΩD 是有限分配格，从而 ΩD 是 Frame 结构[1].

(3) $\vDash\ =\{(x,d),(x,1),(y,f),(y,a),(y,b),(y,d),(y,e),(y,1)\}$.

可验证 $(\mathrm{pt}D,\Omega D,\vDash)$ 为拓扑系统.

此时，$a\to b=\vee\{t\in\Omega D: a\wedge t\leqslant b\}=\vee\{e,b,c,g,f,0\}=e$[5,7]. 则 $(\Omega D,\to)$ 是 Heyting 代数[5,6].

由给定条件知：$x\nvDash a\to b$，但 $x\vDash d$，且 $y\vDash a\wedge d$，同时，$y\vDash b$.

这就是说，存在 $t\in\Omega D$，$x\vDash t$ 且 $\forall z\in\mathrm{pt}D$，$z\vDash a\wedge t\Rightarrow z\vDash b$，但 $x\nvDash a\to b$. 所以，$(\mathrm{pt}D,\Omega D,\vDash)$ 不是 Heyting 系统.

命题 5 设 D 是 Heyting 系统，1，0 表示 ΩD 的最大元与最小元，$a,b\in\Omega D$，则 $\forall x\in X$， (1)$x \models 1$;

(2)$x \not\models 0$;

(3)若 $x \models a$,且 $a \leqslant b$,则 $x \models b$;

(4)若 $x \models b$,则 $x \models a \to b$;

(5)$x \models a \wedge b$ 当且仅当 $x \models a$ 且 $x \models a \to b$;

(6)$x \models a$,$x \models a \to b$,则 $x \models b$.

证明　由定义 6 结合命题 1 可证,略.

定义 7　设 D, E 是 Heyting 系统,从 Heyting 系统 D 到 Heyting 系统 E 的 H-映射 f 是指一个映射对($\mathrm{pt}\,f$, Ωf)满足:

(1)$\mathrm{pt}\,f: \mathrm{pt}D \to \mathrm{pt}E$ 是映射;

(2)$\Omega f: \Omega E \to \Omega D$ 是 Heyting 代数同态.

从 Heyting 系统 D 到 Heyting 系统 E 的 H-映射 f 记作 $f: D \to E$.

(3)再若 H-映射 $f: D \to E$ 满足 $\forall x \in \mathrm{pt}D$, $\forall a \in \Omega E$, $x \models_D \Omega f(a)$ 当且仅当 $\mathrm{pt}\,f(x) \models_E a$,则称 f 是 D 到 E 的 H-连续映射.

定义 8　设 D 是 Heyting 系统. H-单位映射 $Id_D: D \to D$ 定义为: $\mathrm{pt}Id_D = Id_{\mathrm{pt}D}: \mathrm{pt}D \to \mathrm{pt}D$; $\Omega Id_D = Id_{\Omega D}: \Omega D \to \Omega D$.

定义 9　设 D, E, F 是 Heyting 系统,$f: D \to E$, $g: E \to F$ 是 H-映射. f 与 g 的复合 $g \circ f: D \to F$ 定义为:

$$\mathrm{pt}(g \circ f) = \mathrm{pt}g \circ \mathrm{pt}\,f: \mathrm{pt}D \to \mathrm{pt}F;$$

$$\Omega(g \circ f) = \Omega f \circ \Omega g: \Omega F \to \Omega D.$$

由于映射的复合为映射,代数同态的复合为代数同态,因此定义 9 是合理的.

定理 1　设 D, E, F 是 Heyting 系统.

(1)H-单位映射 $Id_D: D \to D$ 是 H-连续映射.

(2)若 $f: D \to E$, $g: E \to F$ 是 H-连续映射,则 $g \circ f: D \to F$ 为 H-连续映射.

证明

(1)$x \in \mathrm{pt}D$, $\forall a \in \Omega D$, $x \models_D \Omega Id_D(a)$ 当且仅当 $x \models_D Id_{\Omega D}(a)$ 当且仅当 $x \models_D a$ 当且仅当 $Id_{\mathrm{pt}D}(x) \models_D a$ 当且仅当 $\mathrm{pt}Id_D(x) \models_D a$.

根据定义 7 知 $Id_D: D \to D$ 是 H-连续映射.

(2)$\forall x \in \mathrm{pt}D$, $\forall a \in \Omega F$, $x \models_D \Omega(g \circ f)(a)$ 当且仅当 $x \models_D \Omega f \circ \Omega g(a)$ 当且仅当 $x \models_D \Omega f(\Omega g(a))$ 当且仅当 $\mathrm{pt}\,f(x) \models_E \Omega g(a)$ 当且仅当 $\mathrm{pt}g(\mathrm{pt}\,f(x)) \models_F a$ 当且仅当 $\mathrm{pt}g \circ \mathrm{pt}\,f(x) \models_F a$ 当且仅当 $\mathrm{pt}(g \circ f)(x) \models_F a$.

根据定义 7 知 $g \circ f: D \to F$ 是 H-连续映射.

注　由于 H-连续映射的复合仍是 H-连续映射,复合满足结合律,并且对于 Heyting 系统 D,H-单位映射 Id_D 即是恒同态射,因此以 Heyting 系统为对象,以 H-连续映射为态射的体系构成范畴[5].

4　Heyting 系统的 H-空间化

定义 10　设 $D = (\mathrm{pt}D, \Omega D, \models)$ 为 Heyting 系统,$\forall a, b \in \Omega D$,定义: $\mathrm{ex}(a) = \{x \in \mathrm{pt}D \mid x \models a\}$, $ex(\Omega D) = \{ex(a) \mid a \in \Omega D\}$, $\mathrm{ex}(a) \to \mathrm{ex}(b) = \mathrm{ex}(a \to b)$. 并称 $\mathrm{ex}(a)$ 为 a 的范围.

引理 1　设 $D = (\mathrm{pt}D, \Omega D, \models)$ 为 Heyting 系统,则 $(\mathrm{ex}(\Omega D), \subseteq)$ 是有界分配格,且

$$\mathrm{ex}(a) \wedge \mathrm{ex}(b) = \mathrm{ex}(a) \cap \mathrm{ex}(b) = \mathrm{ex}(a \wedge b),$$

$$\mathrm{ex}(a) \vee \mathrm{ex}(b) = \mathrm{ex}(a) \cup \mathrm{ex}(b) = \mathrm{ex}(a \vee b).$$

证明

(1)设 $a, b \in \Omega D$, $x \in \mathrm{pt}D$,由定义 6,定义 10 得: $x \in \mathrm{ex}(a) \cap \mathrm{ex}(b)$ 当且仅当 $x \in \mathrm{ex}(a)$ 且 $x \in \mathrm{ex}(b)$ 当且仅当 $x \models a$,且 $x \models b$ 当且仅当 $x \models a \wedge b$ 当且仅当 $x \in \mathrm{ex}(a \wedge b)$. 因此,$\mathrm{ex}(a) \cap \mathrm{ex}(b) = \mathrm{ex}(a \wedge b)$,从而 $\mathrm{ex}(a) \cap \mathrm{ex}(b) \in \mathrm{ex}(\Omega D)$.

(2)设 $a, b \in \Omega D$,类似(1)可证 $\mathrm{ex}(a) \cup \mathrm{ex}(b) = \mathrm{ex}(a \vee b)$,从 $\mathrm{ex}(a) \cup \mathrm{ex}(b) \in \mathrm{ex}(\Omega D)$. 由(1),(2)知$(\mathrm{ex}(\Omega D), \subseteq)$对运算 $\cap, \cup$ 封闭,从而$(\mathrm{ex}(\Omega D), \cap, \cup)$是格,又 $\mathrm{ex}(\Omega D) \subseteq \mathscr{P}(\mathrm{pt}D)$,进而$(\mathrm{ex}(\Omega D), \cap, \cup)$是分配格.

(3)由于 $0_{\Omega D}$, $1_{\Omega D}$ 分别是 ΩD 中的最小元,最大元,因此由(1),(2)知 $\mathrm{ex}(0_{\Omega D})$, $\mathrm{ex}(1_{\Omega D})$ 分别是 $\mathrm{ex}(\Omega D)$ 中的最小元 $0_{\mathrm{ex}(\Omega D)}$,最大元 $1_{\mathrm{ex}(\Omega D)}$,进而 $0_{\mathrm{ex}(\Omega D)} = \mathrm{ex}(0_{\Omega D}) = \varnothing$, $1_{\mathrm{ex}(\Omega D)} = \mathrm{ex}(1_{\Omega D}) = \mathrm{pt}D$.

因此$(\mathrm{ex}(\Omega D), \cap, \cup)$是以 Φ, $\mathrm{pt}D$ 分别为最小元,最大元的有界分配格.

定理 2　设 $D = (\mathrm{pt}D, \Omega D, \models_D)$ 为 Heyting 系统,则$(\mathrm{ex}(\Omega D), \to)$是 Heyting 代数. 再令 $\models = \{(x, \mathrm{ex}(a)) \in \mathrm{pt}D \times \mathrm{ex}(\Omega D) \mid x \in \mathrm{ex}(a)\}$. 则$(\mathrm{pt}D, (\mathrm{ex}(\Omega D), \to), \models)$构成 Heyting 系统.

证明

(Ⅰ)先验证$(\mathrm{ex}(\Omega D), \to)$是一个 Heyting 代数. 由引理 1 知$(\mathrm{ex}(\Omega D), \cap, \cup)$是有界分配格.

(ⅰ)若 $\mathrm{ex}(a) \cap \mathrm{ex}(c) \subseteq \mathrm{ex}(b)$,

设 $x \in \mathrm{ex}(c)$. 则

(1)$x \models_D c$;

(2)设 $\forall y \in \mathrm{pt}D$, $y \models_D a \wedge c$,即 $y \in \mathrm{ex}(a \wedge c) = \mathrm{ex}(a) \cap \mathrm{ex}(c)$,由 $\mathrm{ex}(a) \cap \mathrm{ex}(c) \subseteq \mathrm{ex}(b)$ 知: $y \in \mathrm{ex}(b)$,即 $y \models_D b$. 则由定义 6 得 $x_D a \to b$,从而由定义 10 知 $x \in \mathrm{ex}(a) \to \mathrm{ex}(b)$. 所以 $\mathrm{ex}(c) \subseteq \mathrm{ex}(a) \to \mathrm{ex}(b)$.

(ⅱ)若 $\mathrm{ex}(c) \subseteq \mathrm{ex}(a) \to \mathrm{ex}(b)$,设 $x \in \mathrm{ex}(a) \cap \mathrm{ex}(c)$,则 $x \in \mathrm{ex}(a)$, $x \in \mathrm{ex}(c)$. 由 $\mathrm{ex}(c) \subseteq \mathrm{ex}(a) \to \mathrm{ex}(b)$ 得: $x \in \mathrm{ex}(a \to b)$,即 $x \models_D a \to b$;再由 $x \in \mathrm{ex}(a)$ 知: $x \models_D a$,故 $x \models_D a \wedge (a \to b)$,从而 $x \models_D b$,即 $x \in \mathrm{ex}(b)$. 所以,$\mathrm{ex}(a) \cap \mathrm{ex}(c) \subseteq \mathrm{ex}(b)$.

综上，$(\mathrm{ex}(\Omega D),\to)$是一个 Heyting 代数.

（Ⅱ）再验证$(\mathrm{pt}D,(\mathrm{ex}(\Omega D),\to),\vDash)$构成 Heyting 系统.

(1)设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathrm{ex}(\Omega D)$的任一有限子集族，$x\in \mathrm{pt}D$，则由集族交集的定义知：$x\vDash\bigcap\mathscr{A}\Leftrightarrow x\in\bigcap\mathscr{A}\Leftrightarrow\forall\,\mathrm{ex}(a)\in\mathscr{A},x\in\mathrm{ex}(a)\Leftrightarrow\forall\,\mathrm{ex}(a)\in\mathscr{A},x\vDash\mathrm{ex}(a)$；

(2)设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathrm{ex}(\Omega D)$的任一有限子集族，$x\in \mathrm{pt}D$，则由集族并集的定义知：$x\vDash\bigcup\mathscr{A}\Leftrightarrow x\in\bigcup\mathscr{A}\Leftrightarrow\exists\,\mathrm{ex}(a)\in\mathscr{A},x\in\mathrm{ex}(a)\Leftrightarrow\exists\,\mathrm{ex}(a)\in\mathscr{A},x\vDash\mathrm{ex}(a)$；

(3)$\forall\,\mathrm{ex}(a),\mathrm{ex}(b)\in\mathrm{ex}(\Omega D)$，$x\in\mathrm{pt}D$，需证：$x\vDash\mathrm{ex}(a)\to\mathrm{ex}(b)$当且仅当$\exists\,\mathrm{ex}(c)\in\mathrm{ex}(\Omega D)$，满足：

①$x\vDash\mathrm{ex}(c)$，②$\forall\,y\in\mathrm{pt}D$，$y\vDash\mathrm{ex}(a)\cap\mathrm{ex}(c)\Rightarrow y\vDash\mathrm{ex}(b)$.

“$\Rightarrow$”：设 $x\vDash\mathrm{ex}(a)\to\mathrm{ex}(b)$，即 $x\in\mathrm{ex}(a)\to\mathrm{ex}(b)$，取 $\mathrm{ex}(c)=\mathrm{ex}(a)\to\mathrm{ex}(b)$. 则

（ⅰ）$x\vDash\mathrm{ex}(c)$；

（ⅱ）$\forall\,y\in\mathrm{pt}D$，若 $y\vDash\mathrm{ex}(a)\cap\mathrm{ex}(c)$，即 $y\in\mathrm{ex}(a)\cap\mathrm{ex}(c)$，即 $y\in\mathrm{ex}(a)$，$y\in\mathrm{ex}(a)\to\mathrm{ex}(b)$，由定义 10 得：$y\vDash_D a$，$y\vDash_D a\to b$，则由命题 5 (6)得 $y\vDash_D b$，即 $y\in\mathrm{ex}(b)$，即 $y\vDash\mathrm{ex}(b)$.

“$\Leftarrow$”：若存在 $\mathrm{ex}(c)\in\mathrm{ex}(\Omega D)$，满足：

①$x\vDash\mathrm{ex}(c)$；②$\forall\,y\in\mathrm{pt}D$，$y\vDash\mathrm{ex}(a)\cap\mathrm{ex}(c)\Rightarrow y\vDash\mathrm{ex}(b)$.

即满足：$x\in\mathrm{ex}(c)$且$\forall\,y\in\mathrm{pt}D$，$y\in\mathrm{ex}(a)\cap\mathrm{ex}(c)\Rightarrow y\in\mathrm{ex}(b)$. 由于 $\mathrm{ex}(a)\cap\mathrm{ex}(c)=\mathrm{ex}(a\wedge c)$，即存在 $c\in\Omega D$，满足 $x\vDash_D c$ 且 $\forall\,y\in\mathrm{pt}D$，$y\vDash_D a\wedge c\Rightarrow y\vDash_D b$，则 $x\vDash_D a\to b$，即 $x\in\mathrm{ex}(a)\to\mathrm{ex}(b)$，即 $x\vDash\mathrm{ex}(a)\to\mathrm{ex}(b)$.

综上，$(\mathrm{pt}D,(\mathrm{ex}(\Omega D),\to),\vDash)$构成 Heyting 系统.

定义 11 设 $D=(\mathrm{pt}D,\Omega D,\vDash_D)$是 Heyting 系统，称$(\mathrm{pt}D,(\mathrm{ex}(\Omega D),\to),\vDash)$为 Heyting 系统 D 的 H-空间化，记作 H-Spat(D). 其中 $\vDash=\{(x,\mathrm{ex}(a))\in\mathrm{pt}D\times\mathrm{ex}(\Omega D)\mid x\in\mathrm{ex}(a)\}$.

定理 3 设 $D=(\mathrm{pt}D,\Omega D,\vDash_D)$是 Heyting 系统，则存在一个自然的 H-映射 e：H-Spat$(D)\to D$，定义为：$\mathrm{pt}e:\mathrm{pt}D\to\mathrm{pt}D$，$\mathrm{pt}e(x)=x$；$\Omega e:\Omega D\to\mathrm{ex}(\Omega D)$，$\Omega e(a)=\mathrm{ex}(a)$. 且 H-映射 e：H-Spat$(D)\to D$ 是 H-连续映射.（必要时，将 e：H-Spat$(D)\to D$ 记作 e_D：H-Spat$(D)\to D$.）

证明

(1)$\mathrm{pt}e:\mathrm{pt}D\to\mathrm{pt}D$，$\mathrm{pt}e(x)=x$ 是映射；

(2)$\Omega e(a\wedge b)=\mathrm{ex}(a\wedge b)=\mathrm{ex}(a)\cap\mathrm{ex}(b)=\Omega e(a)\cap\Omega e(b)$. $\Omega e(a\vee b)=\mathrm{ex}(a\vee b)=\mathrm{ex}(a)\cup\mathrm{ex}(b)=\Omega e(a)\cup\Omega e(b)$. $\Omega e(a\to b)=\mathrm{ex}(a\to b)=\mathrm{ex}(a)\to\mathrm{ex}(b)=\Omega e(a)\to\Omega e(b)$.

因此，$\Omega e:\Omega D\to\mathrm{ex}(\Omega D)$：$\Omega e(a)=\mathrm{ex}(a)$是 Heyting 代数同态；

(3)$x\vDash\Omega e(a)\Leftrightarrow x\in\mathrm{ex}(a)\Leftrightarrow x\vDash_D a\Leftrightarrow\mathrm{pt}e(x)\vDash_D a$.

因此，e：H-Spat$(D)\to D$ 是 H-映射，而且是 H-连续映射.

定理 4 设 D,E 是 Heyting 系统，$f:D\to E$ 为 H-映射，则

(1)存在唯一的 H-映射$\bar f$：$E\to$ H-Spat(D)，使得 $f=e\circ\bar f$(图 2)；

(2)如果 $f:D\to E$ 为 H-连续映射，则$\bar f$：$E\to$ H-Spat(D)是 H-连续映射.

$$\begin{tikzcd}
\text{H-Spat}(D) \arrow[r, "e"] & D \\
E \arrow[u, "\bar f"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

图2

证明

(1)定义$\bar f$：$E\to$ H-Spat(D)如下：$\mathrm{pt}\bar f:\mathrm{pt}E\to\mathrm{pt}$H-Spat$(D)$，$\forall\,y\in\mathrm{pt}E$，$\mathrm{pt}\bar f(y)=\mathrm{pt}f(y)$；$\Omega\bar f:\Omega(\text{H-Spat}(D))\to\Omega E$，$\forall\,\mathrm{ex}(a)\in\Omega(\text{H-Spat}(D))$，$\Omega\bar f(\mathrm{ex}(a))=\Omega f(a)$.

（Ⅰ）$\bar f$是 H-映射：

首先，由于 $\mathrm{pt}(\text{H-Spat}(D))=\mathrm{pt}D$，$\mathrm{pt}\bar f=\mathrm{pt}f:\mathrm{pt}E\to\mathrm{pt}(\text{H-Spat}(D))$是合理的；

其次，$\Omega\bar f$为 Heyting 代数同态.

事实上，$\forall\,a,b\in\Omega D$，注意 $\Omega f:\Omega D\to\Omega E$ 是 Heyting 代数同态，$\Omega\bar f(\mathrm{ex}(a)\wedge\mathrm{ex}(b))=\Omega\bar f(\mathrm{ex}(a\wedge b))=\Omega f(a\wedge b)=\Omega f(a)\wedge\Omega f(b)=\Omega\bar f(\mathrm{ex}(a))\wedge\Omega\bar f(\mathrm{ex}(b))$；$\Omega\bar f(\mathrm{ex}(a)\vee\mathrm{ex}(b))=\Omega\bar f(\mathrm{ex}(a\vee b))=\Omega f(a\vee b)=\Omega f(a)\vee\Omega f(b)=\Omega\bar f(\mathrm{ex}(a))\vee\Omega\bar f(\mathrm{ex}(b))$；$\Omega\bar f(\mathrm{ex}(a)\to\mathrm{ex}(b))=\Omega\bar f(\mathrm{ex}(a\to b))=\Omega f(a\to b)=\Omega f(a)\to\Omega f(b)=\Omega\bar f(\mathrm{ex}(a))\to\Omega\bar f(\mathrm{ex}(b))$.

因此，$\bar f$是 H-映射.

（Ⅱ）H-映射$\bar f$：$E\to$ H-Spat(D)满足 $f=e\circ\bar f$，且是唯一的.

事实上，由于 $\mathrm{pt}f=\mathrm{pt}e\circ\mathrm{pt}\bar f=\mathrm{pt}(e\circ\bar f)$；$\Omega f=\Omega\bar f\circ\mathrm{ex}=\Omega\bar f\circ\Omega e=\Omega(e\circ\bar f)$.

因此，$f=e\circ\bar f$.

再设存在 H-映射 f'：$E\to$ H-Spat$D$，使得 $f=e\circ f'$，则 $\forall\,\mathrm{ex}(a)\in\Omega(\text{H-Spat}(D))$，$\Omega\bar f(\mathrm{ex}(a))=\Omega f(a)=\Omega(e\circ f')(a)=(\Omega f'\circ\Omega e)(a)=\Omega f'(\Omega e(a))=\Omega f'(\mathrm{ex}(a))$.

因此，$\Omega\bar f=\Omega f'$.

又 $\mathrm{pt}\bar f=\mathrm{pt}f=\mathrm{pt}(e\circ f')=\mathrm{pt}e\circ\mathrm{pt}f'=\mathrm{pt}f'$.

因此，$f'=\bar f$. 唯一性得证.

（Ⅲ）再取 $x\in\mathrm{pt}E$，$\mathrm{ex}(a)\in\mathrm{ex}(\Omega D)$，由于 $f:E\to D$ 为 H-连续映射，则

$x\vDash_E\Omega\bar f(\mathrm{ex}(a))\Leftrightarrow x\vDash_E\Omega f(a)\Leftrightarrow\mathrm{pt}f(x)\vDash_D a\Leftrightarrow(\mathrm{pt}e\circ\mathrm{pt}\bar f)(x)\vDash_D a\Leftrightarrow\mathrm{pt}\bar f(x)\vDash_{\text{H-Spat}(D)}\Omega e(a)\Leftrightarrow\mathrm{pt}\bar f(x)\vDash_{\text{H-Spat}(D)}\mathrm{ex}(a)$.

因此，$\bar f$是 H-连续映射.

定理 5 设 $D=(\mathrm{pt}D,\Omega D,\vDash_D)$，$E=(\mathrm{pt}E,\Omega E,$

$\models_E$)是 Heyting 系统，H-Spat(D) = (pt$D$,(ex(ΩD),→),$\models_{\text{H-Spat}(D)}$)，H-Spat($E$) = (pt$E$,(ex($\Omega E$),→),$\models_{\text{H-Spat}(E)}$)分别是它们的 H-空间化，$f$: D→E 是 H-映射，则

(1)存在唯一 H-映射 f^*: H-Spat(D)→H-Spat(E)满足 $f\circ e_D = e_E\circ f^*$，即使得图 3 可交换；

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] & E \\ \text{H-Spat}(D) \arrow[u, "e_D"] \arrow[r, "f^*"] & \text{H-Spat}(E) \arrow[u, "e_E"'] \end{tikzcd}$$

图3

(2)若 f: D→E 是 H-连续映射，则 f^*: H-Spat(D)→H-Spat(E)是 H-连续映射.

证明

(1)定义 f^*: H-Spat(D)→H-Spat(E)如下：

ptf^*: pt(H-Spat(D))→pt(H-Spat(E))，ptf^* = pt$f$，Ωf^*: ex(ΩE)→ex(ΩD)，$\forall b\in\Omega E$，$\Omega f^*(\text{ex}(b)) = \Omega e_D(\Omega f(b))$.

(ⅰ)由定理 3 以及 Ωf 为同态知 Ωf^* 为代数同态，因此，f^*: H-Spat(D)→H-Spat(E)是 H-映射；

(ⅱ)由定理 3 知：$\forall b\in\Omega E$，pt($e_E\circ f^*$) = pt$e_E\circ$ptf^* = ptf^* = pt$f$ = pt$f\circ$pte_D = pt($f\circ e_D$)；$\Omega(e_E\circ f^*)(b) = (\Omega f^*\circ\Omega e_E)(b) = \Omega f^*(\text{ex}(b)) = \Omega e_D(\Omega f(b)) = (\Omega e_D\circ\Omega f)(b) = \Omega(f\circ e_D)(b)$.

即 pt($e_E\circ f^*$) = pt($f\circ e_D$)；$\Omega(e_E\circ f^*) = \Omega(f\circ e_D)$.

因此，$e_E\circ f^* = f\circ e_D$.

(ⅲ)现设 H-映射 f': H-Spat(D)→H-Spat(E)满足 $f\circ e_D = e_E\circ f'$，则有 $e_E\circ f^* = f\circ e_D = e_E\circ f'$.

因此，由(ⅱ)的证明过程得：

ptf^* = pt$e_E\circ$ptf^* = pt($e_E\circ f^*$) = pt($f\circ e_D$) = pt($e_E\circ f'$) = pt$e_E\circ$ptf' = ptf'. $\Omega f^*\circ\Omega e_E = \Omega(e_E\circ f^*) = \Omega(f\circ e_D) = \Omega(e_E\circ f') = \Omega f'\circ\Omega e_E$.

因此，$f' = f^*$. 即唯一性成立.

(2)若 f: D→E 是 H-连续映射，则 $\forall x\in$ pt$D$，$b\in\Omega E$，$x\models_D f(b)$当且仅当 pt$f(x)\models_E b$.

因此，$\forall x\in$ pt(H-Spat(D))，$\forall b\in\Omega E$，$x\models_{\text{H-Spat}(D)}\Omega f^*(\text{ex}(b))$当且仅当 $x\models_{\text{H-Spat}(D)}\Omega e_D(\Omega f(b))$当且仅当 pt$e_D(x)\models_D\Omega f(b)$当且仅当 $x\models_D\Omega f(b)$当且仅当 pt$f(x)\models_E b$ 当且仅当 pte_E(pt$f(x)$)$\models_E b$ 当且仅当 pt$f(x)\models_{\text{H-Spat}(E)}\Omega e_E(b)$当且仅当 pt$f^*(x)\models_{\text{H-Spat}(E)} b$.

因此，f^*: H-Spat(D)→H-Spat(E)是 H-连续映射.

参考文献

[1] S Vickers. Topology via Logic[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[2] R Engelking. General Topology[M]. Warszawa: Panstwowe Wgdawnictwo Naukowe, 1977.

[3] 王国俊. L-模糊拓扑空间论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，1988.

[4] Wang Guo-jun. Theory of topological molecular lattices[J]. Fuzzy sets and systems, 1992, 47: 351 – 376.

[5] 郑崇友，樊磊，崔宏斌. Frame 与连续格(第二版)[M]. 北京：首都师范大学出版社，2000.

[6] 王国俊. Heyting 代数成为 Boole 代数的条件及其特征[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版)，1991，19(1)：1 – 6.
WANG Guo-jun. The conditions for Heyting algebra to be a Boole algebra and the characteristics of heyting algebras[J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 1991, 19(1): 1 – 6. (in Chinese)

[7] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 北京：科学出版社，2002(第一版)，2009(第二版).

[8] 吴望名. Fuzzy 格蕴涵代数[J]. 模糊系统与数学，1990，4(1)：56 – 63.
Wu Wang-ming. Fuzzy implication algebras[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1990, 4(1): 56 – 63. (in Chinese)

[9] 徐扬. 格蕴涵代数[J]. 西南交通大学学报，1993，28(1)：20 – 27.
Xu Yang. Lattice implication algebras[J]. Journal of Southwest Jaotong University, 1993, 28(1): 20 – 27. (in Chinese)

[10] Xu Yang, Yuan Da, Qin Keyun, Liu Jun. Lattice-Valued Logic[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[11] Chen Yixiang. Semitopological systems[J]. Journal of Mathematical Reserch & Exposition, 1998, 18(4): 479 – 486.

作者简介

吴洪博　男，1959 年出生，陕西咸阳人. 2001 年 7 月获四川大学数学学院理学博士学位，现任陕西师范大学数学与信息科学学院教授. 研究方向为格上拓扑学与非经典数理逻辑.
E-mail: whbshanxi@yahoo.com.cn

石慧君　女，1985 年出生，山西朔州人. 陕西师范大学数学与信息科学学院硕士研究生，研究方向为非经典数理逻辑.