

# 一种新的 CDMA 扩展码设计方法

毕见鑫, 王映民, 易克初

(西安电子科技大学综合业务网国家重点实验室, 西安 710071)

**摘 要:** 本文首先通过理论分析, 给出基于两带镜像多速率滤波器组设计的多值 CDMA 扩展码的关于循环相关特性的理论性能限及达到此限的条件, 说明了基于多速率滤波器组设计的扩展码达到了此界限; 然后提出了一种基于熵最大化的优化准则来产生 CDMA 扩展码的设计方法. 仿真表明了该方法设计的 CDMA 扩展码性能的优越性.

**关键词:** 多速率滤波器; 循环相关特性; CDMA 扩展码; 熵最大化准则

**中图分类号:** TN914.53 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 04-0479-04

## A New Design Method of CDMA Spreading Sequences

BI Jianxin, WANG Ying-min, YI Ke-chu

(The National Key Lab. on ISN in Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** It is well known that the multi value CDMA spreading codes can be designed by means of a pair of mirror multi rate filter banks based on some optimizing criterion. This paper indicates that there exists a theoretical bound in the performance of its periodic correlation property, and gives the condition on which the bound is achieved. Based on this analysis, a criterion of maximizing entropy is proposed to design such codes. Computer simulation results show the performance superiority of the resulted codes.

**Key words:** multirate unitary filter banks; periodic correlation property; CDMA spreading code; maximum entropy criteria

### 1 引言

数字正交复用器<sup>[1,3,4]</sup>是实现多用户通信的重要手段. 在理论上, 它为多址通信的研究提供了统一的框架, 根据多速率滤波器组系数(或用户码)的时频特性的不同, 可以分为 FDMA、TDMA 和 CDMA 等不同的多址方式. 在实际当中, 由于在多速率滤波器组的解空间中有无数个解, 所以, 我们可以利用这种灵活性, 针对不同的应用环境, 采用不同的优化准则来优化系统的性能.

异步 DS/CDMA 系统中, 扩展码的选择是一个重要的研究课题. 近几年来, 利用多速率滤波器组理论来设计多值 DS/CDMA 扩展码成为很有前途的发展方向. Akansu<sup>[1,4]</sup>等利用多速率滤波器组理论, 从时域着手, 以非循环自相关和互相关的绝对值之和为目标函数, 将扩展码的设计变成了一个优化问题, 给出很好的结果. Qinghua Shi 和 Shixin Cheng<sup>[2]</sup>从频域出发, 基于多速率滤波器的参量化表示, 给出了另一种设计方法. 本文首先通过理论分析给出了基于两带镜像多速率滤波器组设计的多值 CDMA 扩展码的关于循环相关特性的理论性能限及达到此限的条件; 然后提出了一种基于熵最大化的优化准则来产生 CDMA 扩展码的设计方法. 仿真表明了该方法设计的 CDMA 扩展码性能的优越性.

### 2 基于两带镜像滤波器组产生的 CDMA 扩展码的循环相关特性

**定理 1** 假设码  $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]$  和码  $b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_N]$  是基于两带镜像滤波器组产生的归一化 CDMA 扩展码, 码长为  $N$  ( $N$  为 2 的正整数次幂), 那么, 有下列关系式成立:

$$R_b(i) = \begin{cases} +R_a(i), & i = 0, 2, 4, \dots, N-2 \\ -R_a(i), & i = 1, 3, 5, \dots, N-1 \end{cases} \quad (1)$$

$$R_{ab}(i) = 0, \quad i = 0, 2, 4, \dots, N-2 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} R_a(i)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} R_{ab}(i)^2 \geq 1 \quad (3)$$

当且仅当  $R_a(i) = 0$  ( $i = 2, 4, \dots, N-2$ ) 时, 等号才成立.

其中:  $R_a(i)$  和  $R_b(i)$  分别表示码  $a$  和码  $b$  的循环自相关函数;  $R_{ab}(i)$  表示码  $a$  和码  $b$  的循环互相关函数.

**证明** (1) 因为向量  $a$  和向量  $b$  是互为镜像的, 即

$$b_i = (-1)^{i+1} a_{N+1-i}, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4)$$

由循环自相关的定义可知,

$$R_b(i) = \sum_{n=1}^N b_n b_{n+i} \quad (5)$$

当  $i = 0, 2, 4, \dots, N-2$  时, 将式(4)代入式(5)可得:

$$R_b(i) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} a_{N+1-n}^* (-1)^{n+1+i} a_{N+1-n-i} \\ = \sum_{n=1}^N a_n a_{n+i} = R_a(i) \quad (6)$$

当  $i = 1, 3, \dots, N-1$  时, 同理将式(4)代入式(5)可得:

$$R_b(i) = \sum_{n=1}^N -a_n a_{n+i} = -R_a(i) \quad (7)$$

(2) 由循环互相关的定义可得:

$$R_{ab}(i) = \sum_{n=1}^N a_n b_{n+i} = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} a_n a_{N+1-n-i} \\ = \sum_{n=1}^{N-i} (-1)^{n+1} a_n a_{N+1-n-i} \\ + \sum_{n=N-i+1}^N (-1)^{n+1} a_n a_{N+1-n-i} \quad (8)$$

由于

$$\sum_{n=1}^{N-i} (-1)^{n+1} a_n a_{N+1-n-i} = \sum_{n=1}^{(N-i)/2} (-1)^{n+1} a_n a_{N+1-n-i} \\ + \sum_{n=(N-i)/2+1}^{N-i} (-1)^{n+1} a_n a_{N+1-n-i} \quad (9)$$

令  $n' = N+1-n-i$  ( $i$  为偶数), 对上式右边第二项进行变量代换后可得:

$$\sum_{n=1}^{N-i} (-1)^{n+1} a_n a_{N+1-n-i} = \sum_{n=1}^{(N-i)/2} (-1)^{n+1} a_n a_{N+1-n-i} \\ + \sum_{n'=(N-i)/2+1}^{(N-i)/2} (-1)^{n'+1} a_{n'} a_{N+1-n'-i} \\ = \sum_{n=1}^{(N-i)/2} (-1)^{n+1} a_n a_{N+1-n-i} \\ - \sum_{n'=(N-i)/2+1}^{(N-i)/2} (-1)^{n'+1} a_{n'} a_{N+1-n'-i} = 0$$

同理, 可证式(8)右边第二项也为 0. 所以有:

$$R_{ab}(i) = 0, i = 0, 2, 4, \dots, N-2$$

(3) 首先, 定义矩阵  $A$  和矩阵  $B$  如下:

$$A = [a^0 \ a^1 \ a^2 \ \dots \ a^{N-1}], B = [b^0 \ b^1 \ b^2 \ \dots \ b^{N-1}]$$

其中:  $a^i$  和  $b^i$  分别表示向量  $a$  和  $b$  循环右移  $i$  后所得到的行向量的共轭转置. 那么, 令

$$y = \sum_{i=0}^{N-1} R_a(i)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} R_{ab}(i)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} R_a(i)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} R_{ab}(i)^2 \\ = \|aA\|^2 + \|aB\|^2 = a(AA^T + BB^T) a^T \quad (10)$$

因为, 矩阵  $A$  和矩阵  $B$  是循环矩阵, 由循环矩阵的性质<sup>[9]</sup>可知,

$$A = a_1 I + a_N P + a_{N-1} P^2 + \dots + a_2 P^{N-1} \quad (11)$$

$$B = b_1 I + b_N P + b_{N-1} P^2 + \dots + b_2 P^{N-1} \quad (12)$$

其中,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

将式(11)、(12)代入式(10), 并利用关系式  $(P^i)^T = P^{N-i}$  可得:

$$y = a \{ (a_1 I + a_N P + a_{N-1} P^2 + \dots + a_2 P^{N-1}) (a_1 I + \dots \\ + a_N P^{N-1}) + (b_1 I + b_N P + b_{N-1} P^2 + \dots + b_2 P^{N-1}) \\ \cdot (b_1 I + \dots + b_N P^{N-1}) \} a^T \quad (14)$$

利用矩阵  $P$  的性质:

$$P^i = \begin{cases} P^i, & 0 \leq i \leq N-1 \\ P^{i-N}, & N \leq i \leq 2N-1 \end{cases} \quad (\text{其中, 令 } P^0 = I) \quad (15)$$

对式(14)进行简化:

$$y = a \{ I + R_a(1) P + \dots + R_a(N-1) P^{N-1} + I + R_b(1) P + \dots \\ + R_b(N-1) P^{N-1} \} a^T \quad (16)$$

因为  $aP^i a^T = R_a(i)$ , 所以,

$$y = 2 + R_a(1)^2 + \dots + R_a(N-1)^2 + R_a(1) R_b(1) + \dots \\ + R_a(N-1) R_b(N-1) \quad (17)$$

由前面证明的式(1)和式(2)可得,

$$y = 2 + 2[R_a(2)^2 + R_a(4)^2 \dots + R_a(N-2)^2] \quad (18)$$

所以,

$$\sum_{i=1}^{N-1} R_a(i)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} R_{ab}(i)^2 = 1 + 2R_a(2)^2 + 2R_a(4)^2 \dots \\ + 2R_a(N-2)^2 \geq 1$$

当且仅当  $R_a(i) = 0$  ( $i = 2, 4, \dots, N-2$ ) 时, 等号成立. 这个条件正好是西滤波器组成立的条件<sup>[5]</sup>. 证毕 ■

因为  $R_a(i)^2$  ( $i \neq 0$ ) 代表相关接收机输出的判决统计量中所含归一化的多径干扰能量,  $R_{ab}(i)^2$  则代表归一化的多用户干扰能量, 所以这个定理给我们的启示是: (1) 以两带镜像多速率滤波器组为工具, 以相关接收机输出的判决统计量中所含归一化的所有可能的多径干扰能量和多用户干扰能量之和最小化为准, 来设计 CDMA 扩展码, 其最优解就是两带多速率西滤波器的系数向量. 这就是利用两带多速率西滤波器为 CDMA 扩展码设计的理论依据; (2) 此定理给出了归一化干扰能量之和的下限.

### 3 新的优化设计方法

#### 3.1 两个有趣的结果

(1) 如果在设计基于两带多速率西滤波器的 CDMA 扩展码时, 采用文献[1]的目标函数, 即

$$\{J\}_{\min} = \sum_{i=1}^{N-1} |R_a(i)| + \sum_{i=0}^{N-1} |R_{ab}(i)| \quad (19)$$

由定理 1 可知上式右边的  $2N-1$  项中只有  $N$  项可能为非零.

由于  $\{J\}^2 \geq \sum_{i=1}^{N-1} R_a(i)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} R_{ab}(i)^2 = 1$ , 等号成立的条件是式(19)右边的  $2N-1$  项中只有一项为 1, 其余为 0. 从式(17)当中, 可以看到, 等于 1 的那一项肯定是循环互相关的某一项. 有趣的是 TDMA 系统的码字就是这个优化问题的一个特解. 这种码字对于异步 CDMA 系统是不适用的, 因为扩展码的循环互相关的绝对值的最大值太大.

(2) 采用循环自相关和循环互相关的绝对值的最大值最小化为目标函数, 即

$$J = \min \left\{ \max \left[ |R_a(1)|, |R_a(3)|, \dots, |R_a(N-1)|, \right. \right. \\ \left. \left. |R_{ab}(1)|, |R_{ab}(3)|, \dots, |R_{ab}(N-1)| \right] \right\} \quad (20)$$

由于  $\sum_{i=1}^{N-1} R_a(i)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} R_{ab}(i)^2 = 1$ , 很显然, 只有循环自相关和循环互相关的绝对值越平坦, 其最大值越小, 当各项都等于  $1/\sqrt{N}$  时, 目标函数达到最优值  $1/\sqrt{N}$ . 而此时式(19)则达到最大化, 最大值为  $\sqrt{N}$ .

### 3.2 一种新的优化设计方法

对于 CDMA 系统来说, 使扩展码循环自相关和循环互相关的绝对值的最大值最小化是很有意义的, 即循环相关函数的旁瓣越平坦越好. 而式(20)的目标函数是不可微的, 在优化的过程中无梯度信息可以利用, 优化算法复杂且收敛慢. 所以以式(20)中项的平方的信息熵作为目标函数. 一个归一化向量  $p = [p_1, \dots, p_N] = [|R_a(1)|^2, |R_a(3)|^2, \dots, |R_a(N-1)|^2, |R_{ab}(1)|^2, |R_{ab}(3)|^2, \dots, |R_{ab}(N-1)|^2]$  的熵的定义为:

$$\text{entropy}(p) = -[p_1 \log_2(p_1) + \dots + p_N \log_2(p_N)] \quad (21)$$

同时, 吸取了文献[2]从频域进行优化的优点, 基于两带多速率滤波器组的参量化表示<sup>[5]</sup>, 将  $p$  表示为参量  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_J$ , ( $J = N/2$ ) 的函数,  $\text{entropy}(p)$  也是  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_J$  的函数, 所以, CDMA 扩展码优化设计的目标函数为:

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_J) = \arg \max_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_J} [\text{entropy}(p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_J))] \quad (22)$$

CDMA 扩展码还要满足其时、频域的能量分布尽量平坦的要求, 所以对其时频域增加了两个约束条件:

$$\text{entropy}(\text{diag}\{a^H a\}) \geq c_1$$

$$\text{entropy}(\text{diag}\{\text{FFT}(a^H) \text{FFT}(a)\} / \|\text{FFT}(a)\|^2) \geq c_2$$

其中:  $\text{FFT}(a)$  表示向量  $a$  的付氏变换,  $\text{diag}\{./\}$  表示取矩阵对角线的元素所构成的行向量. 在实验中,  $c_1$  和  $c_2$  的取值为 4.46. 优化的扩展码的实验结果如图 1、2 和 3 所示. 为了对比分析, 图 1 给出了长度为 32 的优化的扩展码的时域波形及相应的码长为 31 的二值平衡 Gold 码的时域波形; 图 2、图 3 分别给出了两者的循环自相关和循环互相关的特性. 码长为 31 的二值平衡 Gold 码是通过  $m$  序列优选对移位相加而得到的, 产生  $m$  序列优选对的原始多项式的八进制表示分别为 45 和 67. 从图中可以看出: 与二值平衡 Gold 码相比, 优化的多值扩展码的循环自相关和循环互相关旁瓣较平坦.

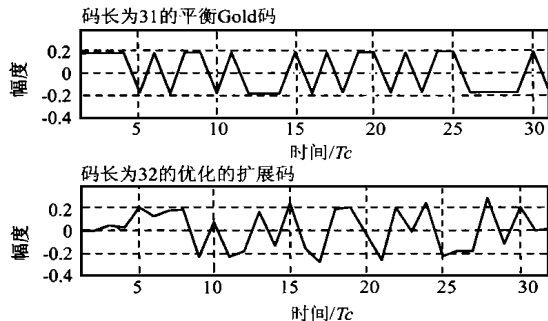


图 1 码长为 31 的平衡 Gold 码和码长为 32 优化的扩展码的时域波形

## 4 优化的 CDMA 扩展码的性能分析

为了分析优化的扩展码的性能, 采用 Monte carlo 计算机

模拟的方法来计算由其构成的两用户异步 CDMA 系统的误码性能. 在实验中, 我们采用双极性波形、BPSK 调制方式, 信道中有加性白噪声. 在评价某一用户的误码性能时, 假定存在一个多径干扰和一个多用户干扰, 其延迟是均匀分布于  $[0, T_c \dots (N-1)T_c]$  的离散随机变量,  $T_c$  表示码片宽度. 由于优化的扩展码的循环自相关特性和循环互相关特性优于平衡 Gold 码, 所以可以预料, 由优化的扩展码构成的两用户异步 CDMA 系统的误码性能要优于由平衡 Gold 码构成的两用户异步 CDMA 系统. 图 4 给出了由上述两种码构成的两用户异步 CDMA 系统的误码性能及单用户系统的误码性能, 其实验结果也证明了这一点.

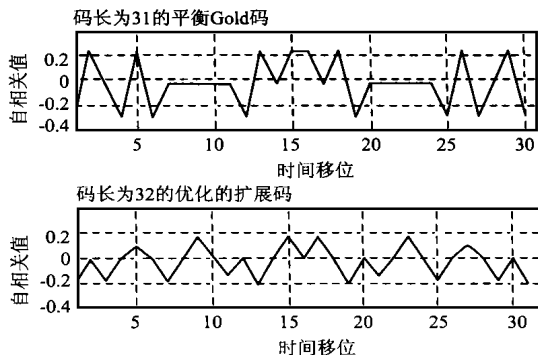


图 2 码长为 31 的平衡 Gold 码和码长为 32 优化的扩展码的自相关函数

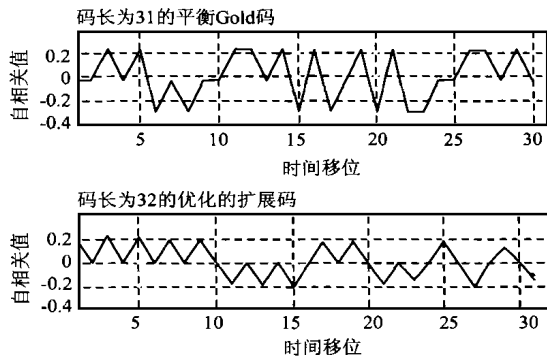


图 3 码长为 31 的平衡 Gold 码和码长为 32 优化的扩展码的互相关函数

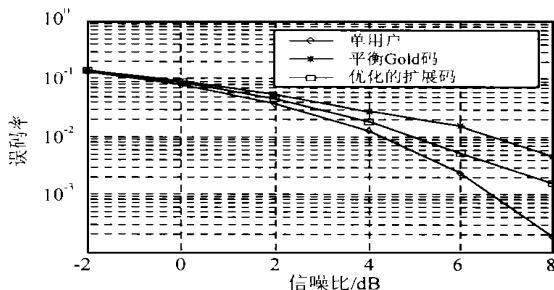


图 4 两用户异步 CDMA 系统的误码性能及单用户系统的误码性能

## 《电子学报》征稿简则

一、《电子学报》系中国电子学会主办的高级综合性学术月刊。每月 25 日出版。刊登电子与信息及相关领域代表我国研究水平的原始性(original)科研成果(包括学术论文、技术报告、科研通信、研究简报和综述评论等形式)。

### 二、稿件要求

1、文稿内容应突出作者本人的创新部分,对前人的工作,尤其是国内同行的工作,应在正文及参考文献中如实反映。

2、作者应保证拥有合法的著作权。合作的论文,署名须经得合作者的同意。若因著作权而引起争议,本刊不承担责任。

3、来稿书写格式可参考已出版的《电子学报》。文中的量和单位请使用 SI 单位;参考文献应是已公开出版的,以便审者、编者和读者查证。

4、为了加快审稿速度,来稿请寄 3 份副本,原件请作者自留。由于文稿评审程序的原因,本刊目前不接受 e-mail 投稿。

### 三、注意事项

1、为了适应我国信息化建设需要,扩大作者学术交流渠道,本刊已加入“Chinainfo 电子期刊”、《中国学术期刊(光盘版)》和“中国期刊网”。作者著作权使用费与本刊稿酬一次性付给。若作者不同意将文章编入上述数据库,请在来稿时声

明。

2、在学术会议上宣读交流过的文稿,不属于一稿多投,但请予以说明。

3、来稿请注明作者姓名、职务、工作单位、通信地址与联系电话。本刊对每篇来稿收取 80 元评审费。

4、编辑部退返作者修改稿件的时间一般为三个月,逾期将按自动撤稿处理。特殊情况不能按时返回的稿件请事先与编辑部取得联系。

5、编辑部收到来稿后 6 个月内就刊用意见答复作者,未采用的稿件也在 6 个月内通知作者,逾期作者可自行处理。

6、来稿录用发排后将向作者收取版面费。出刊后将作者每人一份赠刊及稿酬均寄往第一作者处。

编辑部地址:北京海淀区玉渊潭南路普惠南里 13 号楼,

中国电子学会

通信地址:北京 165 信箱,《电子学报》编辑部

邮政编码:100036

电 话:(010) 68279116; 68285082, Fax:(010) 68173796

## 5 结束语

多速率酉滤波器组作为一种有利的数学工具,为 CDMA 扩展码的设计提供了新的思路和方法。本文证明了基于两带镜像多速率滤波器组设计的 CDMA 扩展码的关于循环相关特性的理论性能限,说明了基于多速率酉滤波器组设计的 CDMA 扩展码达到了此界限。在此基础上,给出了一种新的优化设计方法。值得进一步研究的问题是如何基于  $M$  带多速率酉滤波器组来设计  $M$  个扩展码。

### 参考文献:

- [1] Ali N. Akansu, M. V. Tazebay and R. A. Haddad. A new look at digital orthogonal transmultiplexers for CDMA communications [J]. IEEE trans. 1997, SP 45(1): 263-267.
- [2] Qinghua Shi and Shixin Cheng. Optimal spreading sequence design based on PRQMF theory [J]. Electronics Letters, 18th March 1999, 35(6): 447-448.
- [3] A. N. Akansu et al. Wavelet and subband transforms: fundamentals and communication applications [J]. IEEE Communication Magazine, December 1997: 104-115.
- [4] A. N. Akansu et al. Orthogonal transmultiplexers in communication: a review [J]. IEEE Trans on SP, April 1998, 46(4): 979-995.

- [5] C. S. Burrus, R. A. Gopinath, H. Guo. Introduction to wavelets and wavelets transforms—a primer [M]. Prentice Hall, 1998.
- [6] 程云鹏等. 矩阵论 [M]. 第二版, 第 7 章第 5 节, 西安市: 西北工业大学出版社, 1999, 6.

### 作者简介:



毕见鑫 1972 年出生。1994 年和 1997 年在合肥炮兵学院分别获得学士和硕士学位。现为西安电子科技大学博士研究生。目前主要研究方向为通信信号处理和 DSP 实现。



王映民 1963 年出生。1988 年毕业于国防科技大学电子工程系, 获硕士学位。现为西安电子科技大学博士研究生。目前主要研究方向为通信信号处理和移动通信。