

# 两通道正则正交的主分量滤波器组设计

水鹏朗, 保 铮

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室, 西安 710071)

摘 要: 本文研究了两通道正则正交的主分量滤波器组设计. 给出了正则乘积滤波器的参数表示, 设计转化成标准的 LSIP 问题并且提出了一种适合于单参数和双参数可行解迭代算法.

关键词: 主分量滤波器组; 正则阶; 可行解迭代算法

中图分类号: TN391 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2001) 03-0326-03

## Design of Two-Channel Regular Orthogonal Principal Component Filterbanks

SHUI Peng lang, BAO Zheng

(Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: This paper studies the design of two channel regular orthogonal principal component filter banks. A type of the parametric representation of the regular product filters is proposed, by which the optimal problem is transferred into a standard LSIP. And an efficient feasible solution iteration algorithm is given for the single and double parameter cases.

Key words: principal component filter bank; regular order; feasible solution iteration algorithm

### 1 引言

近年来, 信号自适应滤波器组的设计受到越来越多的关注<sup>[1~7]</sup>, 如主分量滤波器组、最优能量紧滤波器等. 这类滤波器匹配于输入信号统计特性或功率谱密度, 可以获得最大的子带编码增益(SBCG). 无阶数限制时, 这一问题已经得到成功的解决, 最优解是块状滤波器组, 具有子带完全解相关特性<sup>[1]</sup>. 最优双正交滤波器组的设计也获得了一些进展<sup>[5,7]</sup>. 对于正交 FIR 滤波器, 关键是最优紧滤波器的设计<sup>[1~4]</sup>, 在两通道情况下, 主分量滤波器组等效于最优紧滤波器<sup>[2,4]</sup>.

另外, 滤波器的重要性能指标之一——正则阶, 一方面反映了随尺度增加光滑信号细节分解系数的衰减快慢, 另一方面与恢复信号的光滑性密切相关. 这在图像处理、数据压缩中是值得考虑的重要因素. 以往的设计中, 很少考虑到滤波器的正则阶. 本文研究具有正则阶约束的两通道主分量正交滤波器组的设计问题.

### 2 基本概念和方法

一个两通道正交 QMF 滤波器组如图 1 所示, 图中  $Q$  表示量化器, 输入  $x(n)$  是广义平稳随机序列, 相关函数为  $\{r_n\}$ . 用均方误差作为度量准则, 在高比特率量化和最优比特分配假定下, 该子带编码器相对于直接 PCM 量化的编码增益为<sup>[4]</sup>

$$G_{SBC} = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{\sigma_0^2 \sigma_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{G_{comp}(2 - G_{comp})}}, G_{comp} \equiv \frac{\sigma_0^2}{\sigma_x^2} \quad (1)$$

$\sigma_x^2, \sigma_0^2, \sigma_1^2$  表示  $x, x_0, x_1$  的方差.  $G_{comp}$  称作滤波器  $H$  的紧增益, 达到最大紧增益的称为最优能量紧滤波器. 按照正交性  $\sigma_0^2 + \sigma_1^2 = 2\sigma_x^2$ , 从而  $0 \leq G_{comp} \leq 2$ . 显然, 当  $H$  的紧增益最大或最小时, 子带编码增益最大.

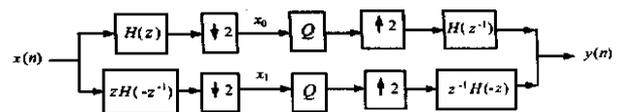


图 1 两通道正交 (QMF) 子带编码滤波器组的结构

设  $h(n)$  是一个实 FIR 滤波器,  $H(z)$  和  $H(\omega)$  表示它的  $Z$ -变换和频率响应, 按照信号处理的习惯, 当  $z = e^{-j\omega}$  时,  $Z$ -变换等于频率响应. 一个滤波器被称作  $M$  阶正则的, 如果  $H(z) = (\frac{1+z}{2})^M Q(z)$ . 这等价于  $\omega = \pi$  是  $H(\omega)$  的  $M$  阶零点且相应的高通滤波器具有  $M$  阶消失矩. 滤波器  $h(n)$  的乘积滤波器<sup>[2]</sup>  $g(n)$  定义为它的自相关序列, 满足  $G(z) = H(z)H(z^{-1})$  或  $G(\omega) = H(\omega)\tilde{H}(\omega)$ . 一个滤波器  $g(n)$  称作一个插值滤波器, 如果满足  $g_{2n} = \delta(n)$ , 等价于  $G(\omega) + G(\omega + \pi) = 1$ .

无正则阶约束时, 利用乘积滤波器, Moulin 等<sup>[4]</sup> 提出了最优紧滤波器的 LSIP (Linear Semi Infinite Programming) 设计方法.

$$\begin{aligned} \text{maximize } & \Theta(g) = r_0 + 2 \sum_{n=1}^N g_{2n-1} r_{2n-1} \\ \text{subject to } & G(e^{j\omega}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N g_{2n-1} \cos((2n-1)\omega) \geq 0, \forall \omega \in [0, \pi] \quad (2) \end{aligned}$$

式(2)中的非负性约束保证了得到的插值滤波器  $g(n)$  生成一个正交的实滤波器. 在相差一个相位因子的意义下是唯一的并且可以通过因子分解方法得到<sup>[4]</sup>. LSIP 问题可以求得全局最优解, 克服了传统的格型参数化、约束二次规划以及特征滤波器等方法容易陷入局部极值缺点. LSIP 问题可以用频率离散化方法、割平面等外点算法求解<sup>[8, 9]</sup>.

### 3 插值滤波器的参数化和可行解集的结构

有正则阶约束时, 相应的乘积滤波器也是正则的. 正则阶有下面结论: (1) 一个实正交滤波器  $h(n)$  是  $M$  阶正则的当且仅当其乘积滤波器  $2M$  阶正则和对称的且  $G(e^{j\omega}) \geq 0$ . (2) 一个对称的插值滤波器  $G(z)$  是  $2M$  阶正则的当且仅当滤波器系数满足<sup>[7]</sup>:

$$\sum_k g_{2k-1}^p = (1/2)^p, p = 0, 1, \dots, 2M-1 \quad (3)$$

按照式(2), 正则滤波器组的优化设计变成了具有等式约束式(3)的 LSIP 问题.

为简化设计, 下面研究正则插值滤波器参数化问题. 在子分方法、Daubiches 子波和插值子波<sup>[7, 10]</sup>, 广泛使用了正则的对称插值滤波器.  $M$ -阶正则 Daubiches 尺度滤波器  $D_M$  的乘积滤波器是  $2M$  阶正则的插值滤波器并且具有非负频率响应, 可以表示为:

$$\begin{aligned} G_{2M}^D(e^{j\omega}) &= 1 + z^{-1} \sum_{k=-M+1}^M g_{2M}^D(k) e^{2jk\omega} \\ &= 2 \left( \frac{1 + \cos(\omega)}{2} \right)^M \sum_{l=0}^{M-1} \binom{M+l-1}{j} \left( \sin \frac{\omega}{2} \right)^{2l} g_{2M}^D(k) \\ &= \prod_{l=-M+1, l \neq 0}^M \frac{2l-1}{2l-2k}, k = -M+1, \dots, M \end{aligned} \quad (4)$$

$\binom{M+l-1}{j}$  表示组合数. 一般 2 带插值滤波器表示为  $G(z) = 1 + z^{-1} \sum_k g(k) z^{2k}$ . 从式(3)和式(4)可以得到  $2M$  阶正则插值滤波器的参数表示和  $M$  阶正则正交滤波器设计的可行解集结构, 如定理 1 所示.

**定理 1** 设  $\Gamma_{2M}^L$  表示支撑集为  $[-(M+L)+1, -(M+L)+2, \dots, M+L]$ ,  $2M$  阶正则对称插值滤波器构成的集合, 则集合可以参数化为

$$\begin{aligned} \Gamma_{2M}^L &= \{ G_{2M}(\omega) = G_{2M}^D(\omega) \\ &+ \sum_{k=0}^L x_k (G_{2(M+k)}^D(\omega) - G_{2M}^D(\omega)), x_k \in \mathbf{R} \} \end{aligned} \quad (5)$$

用  $\Omega_{2M}^L = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_L) | G_{2M}(\omega) \geq 0, \forall \omega \in [0, \pi] \}$  表示具有非负频率响应的插值滤波器对应的参数集合, 则  $\Omega_{2M}^L$  是  $\Gamma_{2M}^L$  的内部非空的有界闭凸集.

证明略.

进一步, 可以简化参数表示和可行解集如下: 记

$$Q_{2M}^l(\omega) = \left( \frac{1 + \cos(\omega)}{2} \right)^l \frac{\sum_{k=0}^{M+l-1} \binom{M+l+k-1}{k} \sin^{2l} \left( \frac{\omega}{2} \right)}{\sum_{k=0}^{M+l-1} \binom{M+k-1}{k} \sin^{2l} \left( \frac{\omega}{2} \right)} - 1, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (6)$$

利用式(6), 有

$$\begin{aligned} \Omega_{2M}^L &= \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_L) | 1 \\ &+ \sum_{l=1}^L x_l Q_{2M}^l(\omega) \geq 0, \forall \omega \in [0, \pi] \} \end{aligned} \quad (7)$$

### 4 优化问题的求解

考虑如图 1 所示的两通道最优能量紧滤波器组设计问题, Silva<sup>[6]</sup> 等提出了基于 QMF 正交滤波器格型参数表示解析方法. 结果表明: 当输入的相关函数满足一定条件时,  $D_2$  是最优的,  $D_3$  接近最优. 从一个侧面表明: 正则阶约束导致的编码增益下降不大. 按照参数表示, 目标函数可以化简  $\Theta(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$ ,  $\mathbf{b}, \mathbf{x}$  是两个  $L$  维列向量, 其中

$$\begin{aligned} b_l &= 2 \sum_{n=1}^{M+l} (g_{2(M+l)}^D(n) - g_{2M}^D(n)) r_{2n-1}, \\ c &= r_0 + 2 \sum_{n=1}^M g_{2M}^D(n) r_{2n-1} \end{aligned} \quad (8)$$

这样, 设计问题归结为下面标准的 LSIP 问题.

$$\begin{aligned} &\text{Maximize (or Minimize)} \quad \Theta(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \\ &s. t. \quad 1 + \sum_{l=1}^L x_l Q_{2M}^l(\omega) \geq 0 \quad \text{或} \quad \mathbf{x} \in \Omega_{2M}^L \end{aligned} \quad (9)$$

对于优化问题式(9), 可以采用直接离散化方法, 割平面方法或松弛的割平面方法<sup>[8, 9]</sup> 求解. 这些方法都属于外点方法, 通过对频率  $\omega$  的适当离散化, 用有限个线性约束代替式(9)中的约束条件, 然后解线性规划得到近似解. 这样得到的解往往不是可行解, 必须经过修正得到接近最优的可行解. 对于这些算法的具体细节不再赘述. 下面研究单参数和双参数情况下的可行解算法, 在这些算法中, 每步得到的都是可行解.

由于 LSIP 问题式(9)的可行解集是一个内部非空的有界闭凸集, 求最大值(或最小值)等价于求可行解集  $\Omega_{2M}^L$  在直线  $y = \mathbf{b}^T \mathbf{x}$  上投影闭区间的端点. 单参数( $L = 1$ )和双参数( $L = 2$ )情况下, 借助几何直观容易得到有效的可行解算法.

首先, 考虑过一个可行解  $\bar{\mathbf{x}} \in \Omega_{2M}^L$  的直线在可行解集  $\Omega_{2M}^L$  内线段端点的确定算法. 设  $\bar{\mathbf{x}} \in \Omega_{2M}^L$ ,  $\mathbf{e}$  是一个非零向量, 直线参数方程为  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{e}$ ,

$$f(\omega, \bar{\mathbf{x}}) = 1 + \sum_{l=1}^L \bar{x}_l Q_{2M}^l(\omega), f(\omega, \mathbf{e}) = \sum_{l=1}^L e_l Q_{2M}^l(\omega)$$

定义  $\Lambda^+ = \{ \omega \in [0, \pi] : f(\omega, \mathbf{e}) > 0 \}$ ,  $\Lambda^- = \{ \omega \in [0, \pi] : f(\omega, \mathbf{e}) < 0 \}$ , 令

$$t_{\min} = - \inf_{\omega \in \Lambda^+} \left\{ \frac{1 + f(\omega, \bar{\mathbf{x}})}{|f(\omega, \mathbf{e})|} \right\}, t_{\max} = \inf_{\omega \in \Lambda^-} \left\{ \frac{1 + f(\omega, \bar{\mathbf{x}})}{|f(\omega, \mathbf{e})|} \right\} \quad (10)$$

那么,  $\mathbf{x} \in \Omega_{2M}^L$  当且仅当  $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$ , 表明直线  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{e}$  包含在  $\Omega_{2M}^L$  内线段的端点分别为  $\bar{\mathbf{x}} + t_{\min}\mathbf{e}$  和  $\bar{\mathbf{x}} + t_{\max}\mathbf{e}$ .

#### 4.1 单参数情况

可行解集合  $\Omega_{2M}^1 = [ - (\max_{\omega \in [0, \pi]} Q_{2M}^1(\omega))^{-1}, 1 ]$ .  $b > 0$  时,  $x = 1$  时获得最大的编码增益, 最优滤波器为  $M+1$  阶正则的  $D_{M+1}$ ;  $b < 0$  时,  $x = - (\max_{\omega \in [0, \pi]} Q_{2M}^1)^{-1}$  获得最大编码增益;  $b = 0$  时, 所有长度为  $2(M+1)$  至少  $M$  阶正则的滤波器具有相同的编码增益. 也就是说, 输入序列相关函数满足

$$\sum_{n=1}^{M+1} (g_{2(M+1)}^D(n) - g_{2M}^D(n)) r_{2n-1} \geq 0 \quad (11)$$

时,长度不超过  $2(M+1)$  的至少  $M$  阶正则的正交滤波器中,最大平坦的 Daubiches 滤波器  $D_{M+1}$  具有最大编码增益.  $M=1$  时的条件式(11)与 Vitor Silva 的结果<sup>[9]</sup>吻合.

### 4.2 双参数情况

设  $b^\perp$  是垂直于  $b$  的非零向量,双参数可行解迭代算法如下:

算法 I (求最大值)

Step1 设  $k \leftarrow 1, x^{(1)} = [1/3, 1/3], [1/3, 1/3]$  是  $\Omega_{2M}^2$  的一个内点.

Step2 假设已经得到了内点  $x^{(k)}$ ,作射线  $x = x^{(k)} + tb$ , ( $t > 0$ ),按照式(10)得到新的可行解  $z^{(k)} = x^{(k)} + t_{\max} b$ .

Step3 过  $Z^{(k)}$  作直线  $x = z^{(k)} + tb^\perp$ ,按照式(10)得到直线于  $\Omega_{2M}^2$  的两个交点  $\{z^{(k)} + t_{\min} e_2, z^{(k)} + t_{\max} e_2\}$ . 令  $\hat{x} = z^{(k)} + 0.5(t_{\max} + t_{\min}) b^\perp$ . 若  $\hat{x} = x^{(k)}, x^{opt} = \hat{x}$ , 迭代终止. 否则,  $\Theta_k = b^T x^{(k)} + c$ .

Step4 令  $k \leftarrow k + 1, x^{(k+1)} \leftarrow \hat{x}$ , 返回 Step2.

显然,序列  $\Theta_k$  单调增加且有上界,因此是收敛的. 算法迭代过程的示意图如图 2 所示,容易证明的  $\Theta_k$  极限就是最大紧增益,其优点是直接得到可行解.

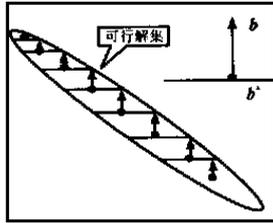


图 2 双参数可行解迭代算法示意图

### 5 数值结果

下面给出两个典型的测试信号,这两个随机过程可以用来描述图像信号和图像的纹理. 比较双参数情况下,松弛的割平面算法(RCPA)(外点迭代算法)与算法 I 的性能.

- (1) AR(1) 过程, 相关系数  $r_n = \rho^n, \rho = 0.95$ .
- (2) AR(2) 过程, 极点  $z \pm \rho e^{\pm i\theta}, \rho = 0.975, \theta = \pi/3$ . 相关系数为:  $r_0 = 1, r_1 = (2\rho \cos\theta)/(1 + \rho^2), r_n = 2\rho \cos\theta r_{n-1} - \rho^2 r_{n-2}$ .

取  $M = L = 2$ , 在 RCPA 算法中, 初始频率离散集合  $W_1 = \{k\pi/10, k = 0, 1, \dots, 10\}$ . RCPA 和可行解迭代算法的迭代过程如图 3 和 4 所示. 图中, “\*” 表示 RCPA 迭代算法, “O” 表示可行解迭代算法. 后者每步的主要计算量是频率区间的离散化

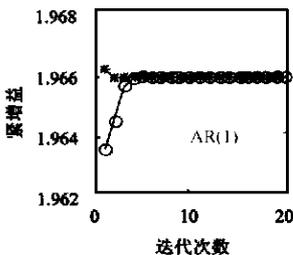


图 3 AR(1) 的迭代过程

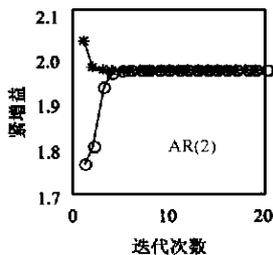


图 4 AR(2) 的迭代过程

和求最大值最小值, 计算量不大. 双参数情况下, 可行解迭代算法的优越性在于有限步终止迭代时, 得到的总是可行解. 在 LSIP 问题求解中, 作为外点迭代算法和离散化方法的重要补充, 可行解迭代算法的研究是非常有意义的.

### 参考文献:

- [ 1 ] M. K. Tsatsanis and G. B. Giannakis. Principal component filter banks for optimal multiresolution analysis [ J ]. IEEE Trans. , 1995, SP 43 (8): 1766- 1777.
- [ 2 ] P. Moulin, M. Antunes, K. O. Kortanek, and F. A. Potra. The Role of linear semi infinite programming in signal adaptive QMF bank design [ J ]. IEEE Trans. , 1997, SP-45(9): 2160- 2174.
- [ 3 ] P. Moulin, and M. K. Milçak. Theory and design of signal adapted FIR paraunitary filter banks [ J ]. IEEE Trans. , SP-46(4): 920- 929.
- [ 4 ] A. Kiraz and P. P. Vaidyanathan. Theory and design of optimum FIR compaction filters [ J ]. IEEE Trans. , 1997, SP 46(4): 903- 919.
- [ 5 ] P. P. Vaidyanathan and A. Kiraz. Result on optimal biorthogonal filter banks [ J ]. IEEE Trans. , 1998, CAS(11)-45(8): 932- 947.
- [ 6 ] V. Silva and Luis de Sô. Analytical optimization of CQF filter banks [ J ]. IEEE Trans. , 1996, SP 44(7): 1564- 1568.
- [ 7 ] Penglang Shui and Zheng Bao, Signal adapted recursive interpolating wavelet packets [ J ]. IEEE Trans. , 1999, CAS( II)-46(12): 1525- 1528.
- [ 8 ] R. Hettich and K. O. Kortanek. Semi infinite programming theory, methods and applications [ J ]. 1993, SIAM Rev.- 35: 380- 429.
- [ 9 ] S. Y. Wu, S. C. Fang, and C. J. Lin. Relaxed cutting plane methods for solving linear semi infinite programming problems [ J ]. 1998, J. Opt. Theory and Appl. , 99(2): 759- 779.
- [ 10 ] Donoho D. L. Interpolating wavelet transform [ R ]. Technical report, Dept. of Statistics Stanford Univ. , Oct. , 1992.

### 作者简介:



水鹏朗 1967 年生, 副教授. 1992 年在南京大学获理学硕士学位, 1999 年在西安电子科技大学获信号与信息处理专业工学博士学位. 目前主要研究兴趣: 子波理论及其应用, 超宽带雷达信号处理.



保 铮 1927 年生, 教授, 中国科学院院士, 中国电子学会会士. 研究领域为雷达信号处理及现代信号处理.