

# 基于线性矩阵不等式的链式系统跟踪控制律设计

曹科才

(南京邮电大学自动化学院, 江苏南京 210003)

**摘 要:** 针对非完整链式系统的跟踪控制问题, 在被跟踪对象可指数收敛的情况下设计了全局  $K$ -指数跟踪控制律. 首先通过一个时变坐标变换将原系统的跟踪控制问题转化为膨胀后误差系统的镇定问题; 然后再充份利用误差系统内部的级联结构, 将一个复杂系统的镇定控制问题转化为两个简单子系统的镇定控制问题. 对比于作者早期研究结果中所要求的参考信号非指数收敛部分存在非零常数极限, 本文在级联子系统控制律的设计中借助于线性矩阵不等式进一步放宽了参考信号所满足的假设条件, 在不要求存在非零常数极限的情况下设计了全局  $K$ 指数的跟踪控制律, 推广了早期已有研究结果. 结论表明在非完整链式系统的跟踪控制问题研究中, 早期文献所加的不趋于零条件或者持续激励条件是不必要的. 文末的 Matlab 数值仿真研究验证了所给控制方法的有效性.

**关键词:** 跟踪控制; 链式系统; 线性矩阵不等式; 级联控制; 统一控制律

**中图分类号:** TP13 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2009) 04-0798-06

## Tracking Control of Nonholonomic Chained-Form System Based on Linear Matrix Inequality

CAO Ke-cai

(Department of Automatic Control, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing, Jiangsu 210003, China)

**Abstract:** Global  $K$ -exponential tracking controllers are constructed for the tracking control problems of Nonholonomic systems in chained-form whose reference targets are allowed to converge to a point exponentially. First, a novel coordinate transformation is introduced to convert the tracking problems into a stabilization problem of dilated error systems; then by using methods of cascaded systems, the stabilization problem is converted into two stabilization problems of simple subsystems. Different to the author's previous results which require that the part of not converging to zero exponentially in reference signals converges to a nonzero constant, this paper has relaxed the existence of the above nonzero constant with the help of linear matrix inequality in the design of subsystems and proved that the previous results are special case of this paper. Conclusions obtained show that the condition not converging to zero or persistent excitation is not necessary in the tracking control problems of nonholonomic chained-form systems. Simulations using Matlab validate the effectiveness of the present methodology.

**Key words:** tracking control; chained form systems; Linear Matrix Inequality; cascade control; universal control law

### 1 引言

由于 Brockett<sup>[1]</sup>可渐近反馈镇定必要条件的限制, 非完整系统的控制问题引起了人们广泛的研究兴趣. 链式系统, 作为非完整控制系统里面一类简单但又非常具有代表性的系统, 自从在文献[2]中被提出以来, 引起了众多学者的关注. 关于此类系统的镇定控制问题研究的已经比较成熟, 具体可参考文献[2~4].

与此同时, 非完整控制系统的跟踪控制问题由于在实际问题中的重要性, 也逐渐引起了人们的越来越多的

关注. 在对链式系统跟踪问题的研究中, 一个普遍的假设条件是目标系统的第一个速度项满足不趋于零条件或者持续激励条件<sup>[4~8]</sup>. Jiang<sup>[4,5]</sup>在参考信号不趋于零的条件下采用 Backstepping 方法与 Lyapunov 函数相结合的办法分别研究了三阶移动机器人系统和一般链式系统的跟踪控制问题, 并借助于持续激励条件将结果推广到了动态输出反馈形式的跟踪控制律<sup>[6]</sup>. Lefeber<sup>[7,8]</sup>在持续激励的条件下, 利用非自治系统的级联控制方法为一般链式系统设计了全局  $K$ -指数的线性跟踪控制律. 上述参考信号的附加条件意味着被跟踪目标系统是

收稿日期: 2008-03-26; 修回日期: 2008-09-16

基金项目: 国家自然科学基金(No. 60805039); 南京邮电大学引进人才计划(No. NY207028)

不断运动系统,所以基于上述方法得到的控制律不能适用于被跟踪目标系统指数收敛到固定点的情形,更为重要的是在某些常见的跟踪控制问题上上述控制律亦不再起作用,如对于被跟踪目标系统沿直线运动的情形.此时由于角速度并不满足持续激励条件,所以文献[7,8]所给控制方法将不再有效.

被跟踪目标指数收敛于一固定点时的跟踪问题不仅要求一般意义上的跟踪,还要求最后将被控系统镇定在固定点,此时跟踪控制问题可以看成时变跟踪基础上的镇定问题.为了避免采用切换类型的控制律, Lee<sup>[9]</sup>和 Do<sup>[10,11]</sup>在 Samson<sup>[12]</sup>的基础上,通过在控制律中引入附加持续激励信号的方法同时研究了三阶移动机器人系统和六阶欠驱动舰船系统跟踪与镇定问题,设计了统一的跟踪控制律.但当被跟踪系统趋于静止时收敛速度很慢有时跟踪效果甚至会很差,如何将该方法进一步推广到一般的链式系统仍未可知.

本文主要是在我们已有结果<sup>[14,15]</sup>的基础之上,继续讨论非完整链式系统的跟踪控制问题.在所给假设条件弱于文献[14,15]中的相应假设条件的基础上,利用级联控制方法和LMI(Linear Matrix Inequality)方法相结合设计得到了全局K-指数的跟踪控制律.结论表明在被跟踪目标系统指数收敛的情况下(不满足已有相应文献所要求的不趋于零条件或持续激励条件),仍然存在全局K指数的跟踪控制律.具体实例的仿真结果验证了本文所给控制方法的有效性.

## 2 问题描述

考虑如下的  $n$  阶链式系统和被跟踪目标:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 & \dot{x}_{1d} &= u_{1d} \\ \dot{x}_2 &= u_2 & \dot{x}_{2d} &= u_{2d} \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1 & \dot{x}_{3d} &= x_{2d} u_{1d} \\ &\dots & & \dots \\ \dot{x}_n &= x_{n-1} u_1 & \dot{x}_{nd} &= x_{(n-1)d} u_{1d} \end{aligned}$$

定义  $e_i = x_i - x_{id}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为跟踪误差,则误差系统模型为:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= u_1 - u_{1d} \\ \dot{e}_2 &= u_2 - u_{2d} \\ \dot{e}_3 &= u_{1d} e_2 + x_2 (u_1 - u_{1d}) \\ &\dots \\ \dot{e}_n &= u_{1d} e_{n-1} + x_{n-1} (u_1 - u_{1d}) \end{aligned} \tag{1}$$

跟踪问题可以描述为<sup>[5]</sup>:寻找合适的控制律  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  使得对于任意的初始跟踪误差 ( $e_1(0)$ ,  $e_2(0)$ , ...,  $e_n(0)$ ), 相应闭环系统(1)的轨迹一致有界并趋于零.

为了后面证明的方便,首先给出如下引理.

**引理 1<sup>[7,8]</sup>** 考虑由以下两个系统

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1) \tag{2}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_2) \tag{3}$$

级联而成的时变系统

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1) + g(t, x_1, x_2) x_2 \tag{4}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_2)$$

如果下面条件成立:

(1) 系统(2)是一致全局指数稳定;

(2) 存在连续函数  $k_1: R^+ \rightarrow R$  和  $k_2: R^+ \rightarrow R$  使得交叉项满足:

$$g(t, x_1, x_2) \leq k_1(\|x_2\|) + k_2(\|x_2\|) \|x_1\|;$$

(3) 系统(3)是全局K-指数稳定.

则级联系统(4)为全局K-指数稳定.

**引理 2<sup>[16]</sup>** 对于给定的系统  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , 如果在平衡点  $x = 0$  的邻域  $U$  内, 存在李亚普诺夫函数  $V(x)$ , 且满足:

$$(1) r_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq r_2 \|x\|^2, \forall x \in U;$$

$$(2) \frac{d}{dt} V(x) \leq -\mu \|x\|^2, \forall x \in U;$$

其中,  $r_1 > 0$ ,  $r_2 > 0$ ,  $\mu > 0$  为给定的常数, 则该系统是指数稳定的.

设具有参数摄动的系统给定如下:

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t)) x \tag{5}$$

其中,  $A \in R^{n \times n}$  为已知定常阵,  $\Delta A(t) \in R^{n \times n}$  为摄动阵且关于参数  $t$  是连续可微的.

假设参数摄动阵可以描述为

$$\Delta A(t) = E(t) F$$

其中,  $E \in R^{n \times r}$ ,  $F \in R^q \times n$  是已知定常阵,  $(t)$  是未知函数阵, 并假设  $(t)$  属于如下集合:

$$\Omega = \left\{ (t) \mid (t)^T (t) \leq I, \forall t \right\} \tag{6}$$

**定义 1<sup>[16]</sup>** 对于系统(5), 如果存在适当阶的正定阵  $P$  和标量  $a$ , 使得对于任意时间  $t$  都有:

$$x^T(t) [A^T P + PA] x(t) + 2x(t)^T A^T(t) P x(t) - a \|x(t)\|^2 \leq 0$$

对任意的解轨迹成立, 则称系统(5)是二次稳定. 如果存在满足上述二次稳定定义的  $n$  阶正定阵  $P$ , 定义二次型正定函数为

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t),$$

并令  $r_1 = \lambda_{\min}(P)$ ,  $r_2 = \lambda_{\max}(P)$

则有

$$(1) r_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq r_2 \|x\|^2, \forall x;$$

(2) 对于任意时间  $t$  都有下式成立:

$$\dot{V}(x(t)) = x^T [A^T P + PA] x + 2x^T A^T P x - a \|x\|^2;$$

所以, 据引理 2, 二次稳定性意味着系统对于任意  $A(t)$  ( $(t) \in \Omega$ ) 是指数稳定的, 并且对于定义域内任意的初始状态  $x(0)$ , 任意的  $(t) \in \Omega$  有

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{\max}{\min} \|x(0)\|^2 \exp\left[-\frac{at}{\max(P)}\right], \forall t \geq 0$$

**引理 3**<sup>[16]</sup> 系统(5)是二次稳定的充份必要条件是 A 为稳定阵,且

$$\|F(SI - A)^{-1}E\| < 1$$

成立.

**引理 4**<sup>[17]</sup> 对于给定的对称矩阵  $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ ,

其中  $S_{11}$  是  $r \times r$  维. 以下三个条件是等价的:

- (1)  $S < 0$ ;
- (2)  $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$ ;
- (3)  $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$ .

### 3 控制律设计

**假设 1**  $u_{1,d} = e^{-(t-t_0)} g(t)$ , 其中  $G$  为非负常数,  $g(t)$  为连续有界函数并且存在非零常数  $G(G > 0)$  和  $T(T > 0)$ , 使得  $|g(t) - G| < T$ .

注:(1) 假设条件 1 对于信号  $g(t)$  的要求弱于作者早期研究结果<sup>[14,15]</sup>. 文献[14,15]要求  $g(t)$  收敛于非零常数, 本文将  $g(t)$  放宽为在非零常数  $G$  周围长度为  $2T$  的区间内波动, 文献[14,15]的研究结果为本文的特殊情形;(2) 文献[4~6]在  $u_{1,d}$  满足持续激励或不趋于零的条件下, 给出了状态反馈和输出反馈形式的非线性跟踪控制律; 文献[7,8]在第一个参考输入  $u_{1,d}$  为持续激励信号的条件下, 给出了链式系统状态反馈形式的线性跟踪控制律. 相对而言, 本文假设 1 允许  $u_{1,d}$  指数收敛于零 (当然也可以不趋于零, 此时对应于  $G=0$  的情形), 对于  $u_{2,d}$  没有任何的限制要求, 在更为宽松的条件下讨论链式系统的跟踪控制问题.

上述假设条件涵盖了如下多种情形下的跟踪控制问题:

- (1) 对于  $g(t)$  为持续激励信号的情形, 由文献[13]可知  $|g(t)|_{\max} = G$ , 其中  $G$  为持续激励信号的水平. 不妨取  $G = T$ , 从而对于激励水平为  $G > 0$  的持续激励信号中, 都能到  $T$  使得上式成立, 所以假设 1 包含了  $g(t)$  为持续激励信号的情形;
- (2) 被跟踪目标运动轨迹为圆形路径的情况包含于假设 1 中  $G=0$  的情形;
- (3) 由于对第二个速度没有任何要求, 所以被跟踪目标指数收敛于一固定点或沿直线运动的情形也包含在假设 1 里面.

#### 3.1 系统模型变换

首先, 对系统(1)采用如下的坐标变换

$$\begin{aligned} y_1 &= e_1 / e^{-(n-2)(t-t_0)} \\ y_2 &= e_2 \\ y_3 &= e_3 / e^{-(t-t_0)} \\ y_4 &= e_4 / e^{-2(t-t_0)} \\ &\dots \\ y_n &= e_n / e^{-(n-2)(t-t_0)} \end{aligned}$$

系统(1)变为

$$\dot{y}_1 = (u_1 - u_{1,d}) e^{(n-2)(t-t_0)} + (n-2)y_1 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g(t) & \ddots & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (n-3) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & g(t) & (n-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u_2 - u_{2,d}) + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2(u_1 - u_{1,d}) / e^{-(t-t_0)} \\ \dots \\ x_{n-2}(u_1 - u_{1,d}) / e^{-(n-3)(t-t_0)} \\ x_{n-1}(u_1 - u_{1,d}) / e^{-(n-2)(t-t_0)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

变换以后的系统(7)、(8)可以看作系统(7)与如下系统(9)级联而成:

$$\dot{Y} = A(t)Y + \begin{bmatrix} v & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

其中:  $Y = [y_2 \ y_3 \ \dots \ y_n]^T, u_2 - u_{2,d} = v,$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g(t) & \ddots & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (n-3) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & g(t) & (n-2) \end{bmatrix}$$

而式(9)又可简记为:

$$\dot{Y} = (A + A(t))Y + Bv \quad (10)$$

$$\text{其中: } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ G & \ddots & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (n-3) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & G & (n-2) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g(t) - G & \ddots & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & g(t) - G & 0 \end{bmatrix}$$

$A(t)$  又可表示为:

$$A(t) = E + F$$

其中  $E, F$  分别定义为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & T & \ddots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T \end{bmatrix},$$

且  $(t) = (g(t) - G) / T$ , 满足式(6).

#### 3.2 二次镇定控制律的设计

下面对被控对象(10), 设计状态反馈控制律

$$v = KY$$

使得相应闭环系统

$$\dot{Y} = (A + BK + E^{-1}(t)F)Y \quad (11)$$

为二次稳定。

由引理 3 知,系统(10)二次稳定等价于  $A + BK$  稳定并且  $\|F(SI - A - BK)^{-1}E\| < 1$

令增广被控对象如下:

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & E & B \\ F & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

并且  $F(sI - A - BK)^{-1}E = LFT(G(s), K)$ . 系统(11)二次稳定的控制律设计问题等价于增广对象  $G(s)$  基于状态反馈  $H$  的标准设计问题。

在线性状态反馈控制器下闭环系统为:

$$\begin{cases} \dot{Y} = A_{cl}Y + B_{cl} \\ Z = C_{cl}Y + D_{cl} \end{cases}$$

其中: 
$$\begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ F & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} K [I \quad 0]$$

$$= \begin{bmatrix} A + BK & E \\ F & 0 \end{bmatrix}.$$

从而  $A + BK$  为稳定阵,并且  $F(sI - A - BK)^{-1}E < 1$  的充份必要条件是存在正定阵  $P$  满足如下 Ricatti 不等式

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) + PE(PE)^T + F^T F < 0$$

由引理 4 可知上述不等式与以下各式等价

$$\begin{bmatrix} (A + BK)^T P + P(A + BK) + F^T F & PE \\ E^T P & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} (A + BK)^T P + P(A + BK) & PE \\ E^T P & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F^T \\ 0 \end{bmatrix} [F \quad 0] < 0$$

$$\begin{bmatrix} (A + BK)^T P + P(A + BK) & PE & F^T \\ E^T P & -I & 0 \\ F & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

上式存在两个未知变量  $K, P$ , 并且这两个未知变量以非线性的形式出现在这个矩阵不等式中. 对于不等式左边的矩阵的两边分别左乘和右乘  $diag\{P^{-1}, I, I\}$ , 则矩阵不等式(13)等价于

$$\begin{bmatrix} AP^{-1} + BKP^{-1} + (AP^{-1} + BKP^{-1})^T & E & (FP^{-1})^T \\ E^T & -I & 0 \\ FP^{-1} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

定义  $X = P^{-1}, W = KX$ , 上述不等式可化为:

$$\begin{bmatrix} AX + BW + (AX + BW)^T & E & (FX)^T \\ E^T & -I & 0 \\ FX & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

若不等式(14)存在一个可行解  $W^*$  和  $X^*$ , 则  $v = W^* (X^*)^{-1} Y$  是系统(12)基于状态的  $H$  控制律。

### 4 主要结果

**定理 1** 对于链式系统的误差跟踪模型(1), 若  $u_{1,d}$  满足假设 1 且  $x_{2,d}, x_{3,d}, \dots, x_{(n-1),d}$  为有界信号, 则在控制律作用下, 相应的闭环系统(1)、(15)、(16)为全局  $K$ -指数稳定. (其中  $k_1 > (n - 2)$ )

$$u_1 = u_{1,d} - e^{-(n-2)(t-t_0)} \cdot k_1 y_1 \quad (15)$$

$$u_2 = u_{2,d} + W^* (X^*)^{-1} Y \quad (16)$$

**证明** 由于变化以后的误差系统(7)、(8)可以看为系统(7)与(9)级联而成, 下面逐条验证在控制律(15)、(16)作用下引理 1 的三个条件得到满足:

(1) 由控制律  $u_1$  的设计知, 系统(7)对应的闭环系统为  $\dot{y}_1 = (-k_1 + (n - 2)) y_1$  (17)

系统(17)在  $k_1 > (n - 2)$  条件下是全局指数稳定的, 亦是全局  $K$ -指数稳定的。

(2) 由  $u_2 = u_{2,d} + W^* (X^*)^{-1} Y$  的设计过程知, 系统(9)在  $u_2$  的作用下是二次稳定的, 由于设计过程中采用的是二次型的正定函数  $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$ , 所以二次稳定性意味着系统(9)是全局指数稳定的。

(3) 系统(7)与系统(9)的级联项在控制律  $u_1$  作用下可以表示为

$$g(t, Y, Z) Z$$

其中,  $Z = y_1, g(t, Y, Z)$  为:

$$- k_1 e^{-(n-3)(t-t_0)} \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} - k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ x_{2,d} e^{-(n-3)(t-t_0)} \\ \dots \\ x_{(n-1),d} \end{bmatrix}.$$

由于  $x_{2,d}, x_{3,d}, \dots, x_{(n-1),d}$  是有界的, 引理 1 的条件(2)也得到满足。

由引理 1 知, 由式(7)与式(9)级联而成的误差系统(7)、(8)为全局  $K$ -指数稳定, 由所采取的误差变换可知, 原来的链式误差系统(1)是全局  $K$ -指数稳定的。

### 5 仿真研究

**例 1** 首先考虑在假设 1 中  $\theta = 0$  的情况

选取三阶移动机器人的参考角速度输入为  $\dot{d} = e^{0.5t} (1 + 0.5 \sin(t))$ . 链式坐标变换知  $u_{1,d} = \dot{d}, u_{2,d} = v_d - (x_d(t) \sin d(t) - y_d(t) \cos d(t)) \dot{d}$ . 此时假设 1 中  $\theta = 0.5, T = 0.5, G = 1$ . 利用 Matlab 里面 LMI 工具箱计算得到:

$$X^* = \begin{bmatrix} 5.25 & -1.96 \\ -1.96 & 1.22 \end{bmatrix}, W^* = \begin{bmatrix} -7.74 & -1.05 \end{bmatrix}$$

所以控制增益  $[k_2 \quad k_3] = W^* (X^*)^{-1} = [-4.5 \quad -8.18]$ , 另外选取  $k_1 = 3 > 3 = 1.5$ .

由于假设条件 1 对被跟踪目标的线速度没有任何

要求,所以我们分以下两种情况考虑:

(1)  $v_d = e^{-0.5t}$  (目标系统趋于静止);

图1、图2和图3分别为平面内轨迹、误差变量和控制量随时间变化曲线图。

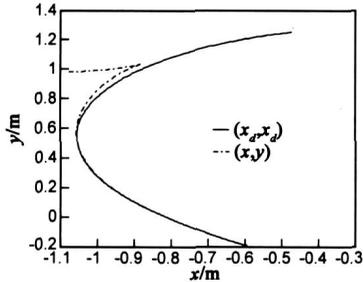


图1 平面上跟踪轨迹

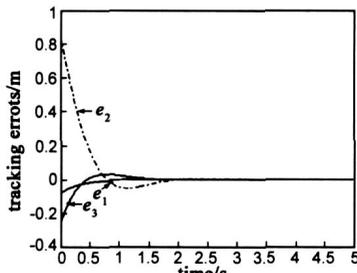


图2 跟踪误差曲线

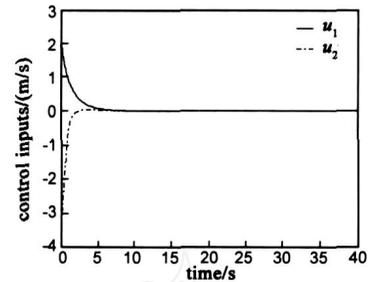


图3 控制量变化曲线

由图1、图2以及图3的仿真结果可以看出,被控系统完成了对于目标系统的跟踪,并且随着目标系统的趋于静止而逐渐趋于静止。

图4、图5和图6分别为平面内轨迹、误差变量和控制量随时间变化曲线图。图4、图5以及图6的仿真结果表明,被控系统完成了对于目标系统的跟踪,并且最终随目标系统沿着一直线来回运动。

(2)  $v_d = \sin(t)$  (目标系统沿直线来回运动);

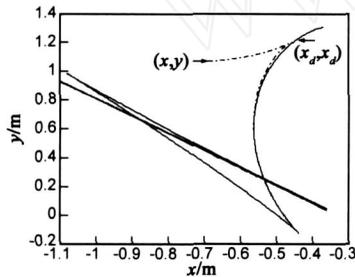


图4 平面上跟踪轨迹

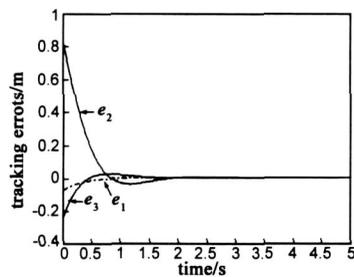


图5 跟踪误差曲线

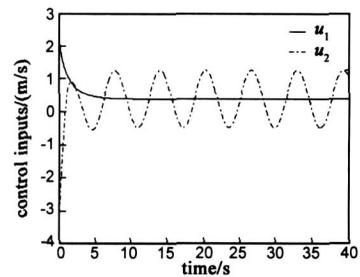


图6 控制量变化曲线

例2 考虑在假设1中  $\omega = 0$  时的情况。

(1)  $v_d = 1, \theta_d = 1 + 0.05\sin(t)$  (目标系统以恒定的线速度沿圆周运动)

$$X^* = \begin{bmatrix} 2.9 & -1.5 \\ -1.5 & 1.4 \end{bmatrix}, W^* = \begin{bmatrix} -0.85 & -2.15 \end{bmatrix}$$

控制增益  $[k_2 \ k_3] = W^* (X^*)^{-1} = \begin{bmatrix} -2.46 & -4.18 \end{bmatrix}$ , 图7、图8和图9分别为平面内轨迹、误差量和控制量随时间变化曲线图。

此时  $T=0.05, G=1$  利用 Matlab 里面 LMI 工具箱计算得到:

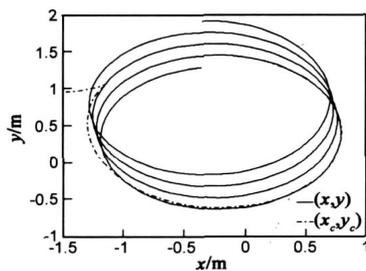


图7 平面上跟踪轨迹

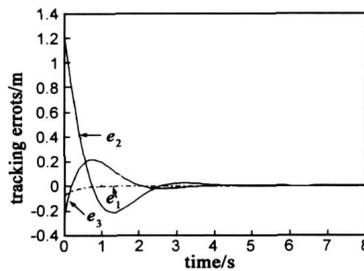


图8 跟踪误差曲线

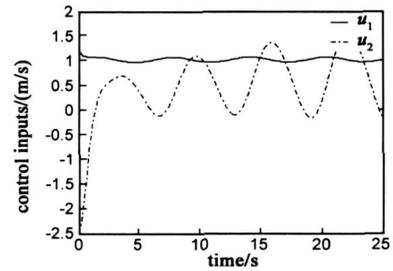


图9 控制量变化曲线

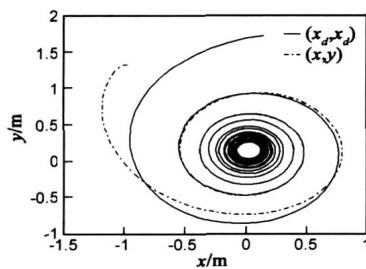


图10 平面上跟踪轨迹

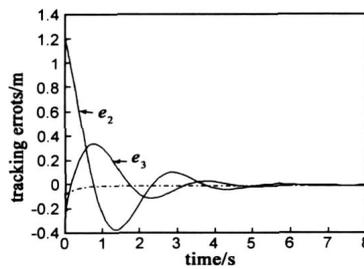


图11 跟踪误差曲线

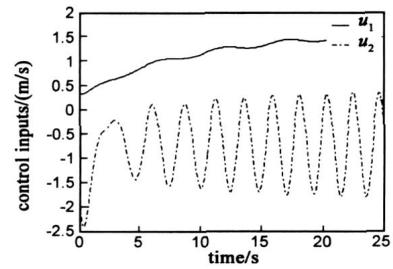


图12 控制量变化曲线

(2)  $v_d = 1.5t - 1.5t/(t+10)$ ,  $d = 1 + 2t/(t+10)$   
 $+ 0.05\sin(t)$  (目标系统沿圆形路径逐渐趋于静止);

此时  $T=0.05$ ,  $G=3$ . 利用 Matlab 里面 LMI 工具箱  
 计算得到:

$$X^* = \begin{bmatrix} 1.36 & -0.4 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix}, W^* = [-0.68 \quad -3.87]$$

控制增益  $[k_2 \quad k_3] = W^*(X^*)^{-1} = [-1.62 \quad -3.7]$ ,  
 图 10、图 11 和图 12 分别为平面内轨迹、误差量和控制  
 量随时间变化曲线图。

例 1 和例 2 分别针对参考输入信号中含指数收敛  
 信号与不含指数收敛信号的情况进行了仿真研究. 结  
 果表明, 本文所给控制方法适用于更广泛意义下的跟  
 踪控制问题, 推广了相关文献[4~11]的研究结果.

## 6 结论

本文主要针对链式系统的跟踪控制问题, 利用非  
 自治系统的级联控制方法和 LMI 设计了全局 K—指数  
 的跟踪控制律. 首先利用非自治系统的级联控制方法  
 将复杂系统的控制律设计问题转化为简单级联子系  
 统的控制律设计问题, 在更广泛的一类参考信号下, 借  
 助于 H 控制律设计方法与 LMI 设计得到原系统的全  
 局 K—指数的跟踪控制律. 结论表明在非完整链式系  
 统的跟踪控制问题中, 已有文献所附加的持续激励条  
 件和不趋于零条件是不必要的. Matlab 仿真研究说  
 明了所给控制方法的有效性.

## 参考文献:

- [1] Brockett RW. Asymptotic stability and feedback stabilization [A]. Differential Geometric Control Theory [C]. Boston: Birkhauser, 1983. 181 - 191.
- [2] Murray RM, Sastry SS. Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1993, 38(5): 700 - 716.
- [3] Kolmanovsky I, McClamroch NH. Developments in nonholonomic control systems [J]. IEEE Control System Magazine, 1995, 15(6): 20 - 36.
- [4] Jiang ZP, Nijmeijer H. Tracking control of mobile robots: A case study in backstepping [J]. Automatica, 1997, 33(7): 1393 - 1399.
- [5] Jiang ZP, Nijmeijer H. A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(2): 265 - 279.
- [6] Jiang ZP. Lyapunov design of global state and output feedback trackers for nonholonomic control systems [J]. International Journal of Control, 2000, 73(9): 744 - 761.
- [7] Lefeber E. Tracking control of nonlinear mechanical systems [D]. The Netherlands: University of Twente, 2000.
- [8] Lefeber E, Robertsson A, Nijmeijer H. Linear controllers for tracking chained-form systems [J]. International Journal of Robust Nonlinear Control, 2000, 10(4): 243 - 263.
- [9] Lee TC, Song KT, Lee CH, Teng CC. Tracking control of unicycle modeled mobile robots using a saturation feedback controller [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2001, 9(2): 305 - 318.
- [10] Do KD, Jiang ZP, Pan J. Simultaneous tracking and stabilization of mobile robots: An adaptive approach [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(7): 1147 - 1152.
- [11] Do KD, Jiang ZP, Pan J. A global output-feedback controller for simultaneous tracking and stabilization of unicycle-type mobile robots [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2004, 20(3): 589 - 594.
- [12] Samson C. Control of chained system application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(1): 64 - 77.
- [13] Narendra KS, Annaswamy AM. Persistent excitation in adaptive systems [J]. International Journal of Control, 1987, 45(1): 127 - 160.
- [14] Cao KC, Tian YP. A time-varying cascaded design for trajectory tracking control of nonholonomic systems [J]. International Journal of Control, 2007, 80(3): 416 - 429.
- [15] Tian YP, Cao KC. Time-varying linear controllers for exponential tracking of nonholonomic systems in chained form [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17(7): 631 - 647.
- [16] 申铁龙. 控制理论及应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1996, 137 - 150.
- [17] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002, 1 - 20.

## 作者简介:



曹科才 男, 博士、讲师. 1978 年 11 月出生  
 于山东博兴. 2003 年和 2007 年分别在电子科技  
 大学和东南大学获理学硕士和工学博士学位. 现  
 主要从事非完整移动机器人的跟踪控制、多机器  
 人协调控制方面的研究.

E-mail: caokc@njupt.edu.cn