

快速子空间分解方法及其维数的快速估计

黄 磊, 吴顺君, 张林让, 冯大政

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室, 陕西西安 710071)

摘 要: 提出一种快速子空间分解方法. 该方法只需要知道某一期望信号的训练信号就可以实现信号子空间和噪声子空间的快速估计. 给出快速确定子空间维数的方法. 子空间维数的估计和子空间的快速分解是同时进行的. 本文方法只需要多级维纳滤波器的前向递推, 不需要估计协方差矩阵和对其作特征值分解, 所以运算量可以明显地降低, 而估计的性能接近于常规方法. 最后, 仿真结果验证了方本文法的有效性.

关键词: 子空间分解; 匹配滤波器; 降维; 多级维纳滤波器

中图分类号: TN911. 23 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2005) 06-0977-05

A Fast Method for Subspace Decomposition and Its Dimension Estimation

HUANG Lei, WU Shunjun, ZHANG Linrang, FENG Dazheng

(National Lab of Radar Signal Processing, Xidian Univ., Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: A fast method for subspace decomposition is proposed. Given the training sequences of a desired signal, the signal subspace and noise subspace can be obtained quickly. The dimension of subspace can be correctly estimated while the signal subspace and noise subspace are acquired. The presented method does not require the formation of the covariance matrix and its eigendecomposition, thereby reducing the computational complexity significantly. Finally, numerical results show that the novel approach can achieve the asymptotic performance of the classical method.

Key words: subspace decomposition; matched filter; rank reduction; multistage wiener filter

1 引言

信号子空间和噪声子空间的估计以及其维数的确定一直是阵列信号处理中重要的研究方向. MUSIC^[1], ESPRIT^[2] 和 WSP^[3] 等超分辨方法均要求准确估计到信号子空间或噪声子空间. 而且这些方法均假设信源数是准确已知的. 然而, 在实际应用中信源数往往是未知的, 需要估计. 而为了得到鲁棒的估计, 信号子空间和噪声子空间的估计均是对协方差矩阵作特征值分解或奇异值分解得到的. 估计协方差矩阵和对其作特征值分解所需要的运算量约为 $O(M^2N + M^3)$, 其中 M 和 N 分别是阵列的阵元个数和采样快拍数. 如果阵元数较多的话, 协方差矩阵是高阶的, 对其进行估计和作特征值分解的运算量是相当大的.

最近, Goldstein 等人提出了一种有效的用于干扰抑制的降维滤波技术, 即所谓的多级维纳滤波器 (MSWF)^[4] 技术. 与主分量法 (PC)^[5] 和互谱法 (CS)^[6] 等降维滤波技术相比, 多级维纳滤波器具有很多优点: 如允许 MSWF 的级数远远小于信源数; 不需要估计协方差矩阵从而使该方法可以应用在小样本支撑的信号环境中; 收敛速度快, 能够对时变信号进行快速跟踪; 不用对协方差矩阵作特征值分解, 使得其运算量大大降

低. 因而引起浓厚的研究兴趣^[7,8] 并得到广泛应用^[9,10].

过去许多学者把 MSWF 主要应用在干扰抑制和信道均衡等方面. 本文利用 MSWF 前向递推的多级分解特性来实现信号子空间和噪声子空间的快速估计以及信源数的快速确定. 只需要 MSWF 的前向递推, 所以其运算量得到有效的降低. 而且估计的子空间接近于真实的子空间, 信源数的估计达到常规方法的估计精度. Xu 提出的快速子空间分解方法^[11,12] 采用的是 Lanczos 算法, 要求估计协方差矩阵, 而且完成 Lanczos 算法的 $D(D > P)$ 次递推后, 还需要对一个维数是 D 的协方差矩阵作特征值分解. 算法的运算量较大, 并且只能估计到信号子空间, 没有给出直接估计噪声子空间的方法. 与快速子空间分解方法相比, 本文方法还有一个显著的区别就是, 估计的子空间 (信号子空间和噪声子空间) 的基矢量与特征矢量虽然张成相同的子空间但它们不是渐近等效的. 而 Xu 的信号子空间的基矢量, 即所谓的 Rayleigh Ritz (RR) 矢量与大特征矢量渐近等效.

2 问题公式

2.1 阵列信号模型

假设阵列是阵元数为 M 的等距线阵 (LUA), 则阵列在 k

收稿日期: 2004-05-11; 修回日期: 2004-12-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 60372049); 国防预研项目 (No. 413070508); 国家自然科学基金资助项目 (No. 60102005)

时刻接收的 M 维观测数据矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \sum_{i=1}^P \mathbf{a}(\theta_i) s_i(k) + \mathbf{n}(k) \\ &= [\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}(\theta_2) \quad \dots \quad \mathbf{a}(\theta_P)] \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \\ &= \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{s}(k) \in \mathbf{C}^{P \times 1}$, $\mathbf{n}(k) \in \mathbf{C}^{M \times 1}$, $\mathbf{A}(\theta) \in \mathbf{C}^{M \times P}$ 分别为信源复振幅矢量, 噪声复矢量和 $M \times P$ 阶方向矩阵, $k = 0, 1, \dots, N-1$ 是采样时刻, N 是快拍数, P 是信源数. 假定第一个信号是期望信号(用户)且其波形先验已知. 导向矢量具有如下的结构

$$\mathbf{a}(\theta_i) = \frac{1}{\sqrt{M}} [1 \quad e^{j\varphi(\theta_i)} \quad \dots \quad e^{j(M-1)\varphi(\theta_i)}]^T \quad (2)$$

其中 $\varphi(\theta_i) = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\theta_i)$, $\theta_i \in (-\pi/2, \pi/2)$, 且 $\theta_i \neq \theta_j, i \neq j, d$ 表示阵元间距, λ 是载波波长, T 表示转置. 本文的所有讨论均假设阵元数大于信源数, 即 $M > P$. 加性噪声是均值为零的空时均白的复高斯随机过程, 即

$$E[\mathbf{n}(k) \mathbf{n}^H(l)] = \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \delta_{k,l} \quad \text{和} \quad E[\mathbf{n}(k) \mathbf{n}^T(l)] = 0 \quad (3)$$

其中 $k, l = 0, 1, \dots, N-1$. 假设信号和噪声是不相关的, 所以 $\mathbf{x}(k)$ 也是复高斯随机过程, 而且其协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k)] = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H(\theta) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \quad (4)$$

显然, \mathbf{R}_x 是 Hermitian 矩阵.

2.2 多级维纳滤波器

多级维纳滤波器是 Goldstein 等人最近提出的一种有效的降维滤波技术, 其在最小均方误差的意义下得到 Wiener Hopf 方程 $\mathbf{R}_x \mathbf{w}_M = \mathbf{r}_{x,d}$ 的渐近最优解 $\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{x,d}$. 基于相关相减结构的多级维纳滤波器(CSA-MSWF)的算法^[8]如下所示:

Step1: 初始化: $d_0(k) = s_1(k)$ 和 $\mathbf{x}_0(k) = \mathbf{x}(k)$;

Step2: 前向递推: For $i = 1, 2, \dots, M$

$$\mathbf{h}_i = E[d_{i-1}^*(k) \mathbf{x}_{i-1}(k)] \setminus \setminus E[d_{i-1}^*(k) \mathbf{x}_{i-1}(k)] \parallel_2;$$

$$d_i(k) = \mathbf{h}_i^H \mathbf{x}_{i-1}(k);$$

$$\mathbf{x}_i(k) = \mathbf{x}_{i-1}(k) - \mathbf{h}_i d_i(k);$$

Step3: 后向递推: $\varepsilon_M(k) = d_M(k)$, For $i = M, M-1, \dots, 1$

$$w_i = E[d_{i-1}^*(k) \varepsilon_i(k)] \setminus \setminus E[|\varepsilon_i(k)|^2];$$

$$\varepsilon_{i-1}(k) = d_{i-1}(k) - w_i^* \varepsilon_i(k).$$

由多级维纳滤波器的 M 个相互正交的匹配滤波器 \mathbf{h}_i 构成的预滤波矩阵为 $\mathbf{T}_M = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_M] \in \mathbf{C}^{M \times M}$. 由于每级的匹配滤波器 \mathbf{h}_i 最大化相邻级期望信号的相关性, 而阻塞矩阵 $\mathbf{B}_i = \mathbf{I} - \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H$ 使得相隔各级的期望信号不相关, 所以经过预滤波的协方差矩阵是三对角矩阵:

$$\mathbf{T}_M^H \mathbf{R}_x \mathbf{T}_M = \begin{bmatrix} \sigma_{d_1}^2 & \delta_2^* & & & \\ \delta_2 & \sigma_{d_2}^2 & \delta_3^* & & \\ & \delta_3 & \sigma_{d_3}^2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \delta_M^* \\ & & & & \sigma_{d_M}^2 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{D}_{M \times M} \quad (5)$$

其中 $\sigma_{d_i}^2 = E[|d_i|^2]$ 和 $\delta_{i+1} = E[d_{i+1}(k) d_i^*(k)]$ 分别是各级期望信号的方差和相邻级期望信号的协方差.

3 子空间的快速分解

为了降低常规子空间估计方法的计算复杂度, 必须避开协方差矩阵的估计及其特征值分解. 事实上, 给定某一目标(或用户)的信号波形(或训练序列), 由多级维纳滤波器的前向分解则可以实现信号子空间和噪声子空间的快速估计. 这由如下的定理给出.

定理 1 在给定某一期望信号的训练信号的条件, 信号子空间和噪声子空间可以分别估计如下

$$\Phi_S^{(P)} = \text{span}\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_P\} \quad (6)$$

$$\Psi_N^{(M-P)} = \text{span}\{\mathbf{h}_{P+1}, \mathbf{h}_{P+2}, \dots, \mathbf{h}_M\} \quad (7)$$

其中 $\Phi_S^{(P)}$ 和 $\Psi_N^{(M-P)}$ 分别表示维数是 P 的信号子空间和维数是 $M-P$ 的噪声子空间, P 是信源数, $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_M$ 是多级维纳滤波器前向递推的匹配滤波器.

证明 对式(4)的协方差矩阵作特征值分解:

$$\mathbf{R}_x = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \mathbf{V}_s \Lambda_s \mathbf{V}_s^H + \sigma_n^2 \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H \quad (8)$$

其中特征值 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{P+1} = \dots = \lambda_M = \sigma_n^2$, $\mathbf{V}_s = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_P]$, $\mathbf{V}_n = [\mathbf{v}_{P+1}, \mathbf{v}_{P+2}, \dots, \mathbf{v}_M]$. \mathbf{V}_s 的列数等于信源协方差矩阵 \mathbf{R}_s 的秩 P , 从而其张成 $\mathbf{A}(\theta)$ 的 P 维子空间. 这里 P 表示独立信源的个数. 由式(4)和式(8)则有如下的关系

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{Q} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{V}_s (\Lambda_s - \sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1} \in \mathbf{C}^{P \times P}$ 是满秩矩阵.

注意到滤波器 $\mathbf{h}_i, i = \{1, 2, \dots, P\}$ 是相互正交的, 所以级数为 D 的 MSWF 相当于 Wiener Hopf 方程在 Krylov 子空间 $K^{(P)}(\mathbf{R}_x, \mathbf{r}_{x,d_0}) = \text{span}\{\mathbf{r}_{x,d_0}, \mathbf{R}_x \mathbf{r}_{x,d_0}, \dots, \mathbf{R}_x^{P-1} \mathbf{r}_{x,d_0}\}$ 的解^[9], 并有如下的结论^[9,13]:

$$\text{span}\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_P\} = \text{span}\{\mathbf{r}_{x,d_0}, \mathbf{R}_x \mathbf{r}_{x,d_0}, \dots, \mathbf{R}_x^{(P-1)} \mathbf{r}_{x,d_0}\} \quad (10)$$

所以存在一个满秩矩阵 $\mathbf{K} \in \mathbf{C}^{P \times P}$, 使得

$$[\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_P] = [\mathbf{r}_{x,d_0}, \mathbf{R}_x \mathbf{r}_{x,d_0}, \dots, \mathbf{R}_x^{(P-1)} \mathbf{r}_{x,d_0}] \mathbf{K} \quad (11)$$

令 $\mathbf{T}_s = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_P]$, $\mathbf{T}_n = [\mathbf{h}_{P+1}, \mathbf{h}_{P+2}, \dots, \mathbf{h}_M]$. 注意到 $\mathbf{V}_s^H \mathbf{V}_s = \mathbf{I}_P$ 和 $\mathbf{V}_n^H \mathbf{V}_n = \mathbf{I}_{M-P}$, 由式(8)得

$$\mathbf{R}_x^{(i)} = \mathbf{V}_s \Lambda_s^{(i)} \mathbf{V}_s^H + \sigma_n^2 \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H, \quad i = 1, 2, \dots, P-1 \quad (12)$$

由多级维纳滤波器知, \mathbf{r}_{x,d_0} 落在信号子空间中, 从而有 $\mathbf{V}_n^H \mathbf{r}_{x,d_0} = 0$. 把式(12)代入式(11), 并考虑到 $\mathbf{V}_s \mathbf{V}_s^H + \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H = \mathbf{I}_M$ 及 $\mathbf{V}_s = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{Q}$, 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_s &= [\mathbf{V}_s \mathbf{V}_s^H \mathbf{r}_{x,d_0}, \mathbf{V}_s \Lambda_s \mathbf{V}_s^H \mathbf{r}_{x,d_0}, \dots, \mathbf{V}_s \Lambda_s^{(P-1)} \mathbf{V}_s^H \mathbf{r}_{x,d_0}] \mathbf{K} \\ &= \mathbf{V}_s [\mathbf{V}_s^H \mathbf{r}_{x,d_0}, \Lambda_s \mathbf{V}_s^H \mathbf{r}_{x,d_0}, \dots, \Lambda_s^{(P-1)} \mathbf{V}_s^H \mathbf{r}_{x,d_0}] \mathbf{K} \\ &= \mathbf{A}(\theta) \mathbf{Q} [\mathbf{V}_s^H \mathbf{r}_{x,d_0}, \Lambda_s \mathbf{V}_s^H \mathbf{r}_{x,d_0}, \dots, \Lambda_s^{(P-1)} \mathbf{V}_s^H \mathbf{r}_{x,d_0}] \mathbf{K} \\ &= \mathbf{A}(\theta) \mathbf{Q} \Gamma \mathbf{K} = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{H} \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\Gamma = [\mathbf{V}_s^H \mathbf{r}_{x,d_0}, \Lambda_s \mathbf{V}_s^H \mathbf{r}_{x,d_0}, \dots, \Lambda_s^{(P-1)} \mathbf{V}_s^H \mathbf{r}_{x,d_0}] \in \mathbf{C}^{P \times P} \quad (14)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q} \Gamma \mathbf{K} \in \mathbf{C}^{P \times P} \quad (15)$$

不难证得 $\Gamma \in \mathbf{C}^{P \times P}$ 是满秩矩阵. 又因为 \mathbf{Q} 和 \mathbf{K} 均是非奇异矩阵, 因而 \mathbf{H} 也是非奇异矩阵. 所以, 由式(13)得

$$\text{span}\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_P\} = \text{col}\{A(\theta)\} \triangleq \Phi_S^{(P)} \quad (16)$$

由于矩阵 T_M 的所有列矢量均是相互正交的, 则 $\mathbf{h}_i \perp \text{col}\{A(\theta)\}$, $i = P + 1, P + 2, \dots, M$. 所以 T_n 的列矢量张成 $\text{col}\{A(\theta)\}$ 的正交补, 即所谓的噪声子空间:

$$\text{span}\{\mathbf{h}_{P+1}, \mathbf{h}_{P+2}, \dots, \mathbf{h}_M\} = \text{null}\{A(\theta)\} \triangleq \Psi_N^{(M-P)} \quad (17)$$

证毕.

说明 1 本文快速子空间分解方法只利用到某一目标 (用户) 的信号波形 (或训练信号) 和 MSWF 的前向分解, 不需要计算其后向合成的标量维纳滤波器, 也不需要估计协方差矩阵及其作特征值分解. 所以该方法的计算复杂度较低, 约为 $O(M^2P)$. 如果信源数是先验已知的, 那么采用该方法计算信号子空间的运算量仅仅为 $O(PMN)$. 而常规信号子空间估计方法需要计算样本协方差矩阵并对其作特征值分解, 需要的运算量为 $O(M^2P + M^3)$. 所以, 本文快速子空间分解方法的运算量远远小于常规子空间估计方法的运算量. 此外, Xu 提出的快速子空间分解方法采用的是 Lanczos 算法, 要求估计协方差矩阵, 而且完成 $D(D > P)$ 次递推后, 还需要对一个维数是 D 的协方差矩阵作特征值分解. 算法的运算量较大, 约为 $O(M^2D + M^2N + D^3)$, 并且只能估计到信号子空间, 没有给出噪声子空间的估计方法. 所以本文方法优于 Xu 的快速子空间分解方法.

4 子空间维数的快速估计

在实际应用中, 我们得到的样本数据是有限的, 因而真正的协方差矩阵是获取不到的. 对估计的协方差矩阵作特征值分解, 得到

$$R_{x_0} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k)x_0^H(k) = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \hat{\mathbf{v}}_i \hat{\mathbf{v}}_i^H = \mathbf{V}_s \Lambda_s \mathbf{V}_s^H + \mathbf{V}_n \Lambda_n \mathbf{V}_n^H \quad (18)$$

如果真正的协方差矩阵是知道的, 则由其小特征值相等就可以准确地估计到信源数, 即信号子空间的维数. 然而, 正如前面所述, 我们只能得到协方差矩阵的估计, 而且其小特征值 λ_i , $i = P + 1, P + 2, \dots, M$ 是互不相等的, 并分布在噪声方差 σ_n^2 的邻域, 即 $\lambda_i = \sigma_n^2 + O(N^{-1/2})$. 在这种情况下必须采用其它技术来估计信源数. 用于估计信号子空间的维数的两个准则^[14], 即基于 Akaike 信息论 (AIC) 准则和最小描述长度 (MDL) 准则分别为

$$\text{AIC} = \min_p \{2N(M - P) \lg[L(\hat{\lambda}_{P+1}, \hat{\lambda}_{P+2}, \dots, \hat{\lambda}_M)] + P(2M - P)\} \quad (19)$$

$$\text{MDL} = \min_p \{N(M - P) \lg[L(\hat{\lambda}_{P+1}, \hat{\lambda}_{P+2}, \dots, \hat{\lambda}_M)] + \frac{1}{2}P(2M - P) \lg N\} \quad (20)$$

其中

$$L(\hat{\lambda}_{P+1}, \hat{\lambda}_{P+2}, \dots, \hat{\lambda}_M) = \frac{1}{\left(\prod_{i=P+1}^M \hat{\lambda}_i\right)^{\frac{1}{M-P}}} \quad (21)$$

是似然函数. 由式(19)和式(20)容易看出, 两个准则的似然函数是相同的, 区别仅仅是后面的罚函数. 常规的 AIC 和 MDL 准则均要求知道特征值 λ_i , $i = 1, 2, \dots, M$, 这意味着需要估计协方差矩阵及其作特征值分解. 事实上, 如果没有估计到

协方差矩阵和其特征值, 我们同样可以有效地估计到信号子空间的维数. 估计方法由定理 2 给出.

引理 如果有 P 个统计不相关的窄带信号入射到阵列天线, 则 MSWF 作 P 级分解后, 得到第 P 级的观测数据:

$$\mathbf{x}_P^{(P)}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{h}_P \mathbf{h}_P^H) \mathbf{x}_{P-1}^{(P)}(k) = \mathbf{B}_P \mathbf{x}_{P-1}^{(P)}(k) \quad (22)$$

是时间白的随机过程, 并具有如下的形式

$$\mathbf{x}_P^{(P)}(k) = \left(\prod_{i=P}^1 \mathbf{n}(k) \right) \quad (23)$$

其中上标^(P)表示信源数为 P 的情况, 下标_(P)表示 MSWF 的第 P 级.

引理的证明见附录. 为了表示方便, 以下讨论我们均假设信源数为 P , 并把 MSWF 的第 P 级数据简记为 $\mathbf{x}_P(k)$.

定理 2 在没有估计到协方差矩阵及其特征值的条件下, AIC 和 MDL 准则的似然函数由下式给出

$$L(\sigma_{d_{P+1}}^2, \sigma_{d_{P+2}}^2, \dots, \sigma_{d_M}^2) = \frac{1}{\left(\prod_{i=P+1}^M \sigma_{d_i}^2\right)^{\frac{1}{M-P}}} \quad (24)$$

其中 $\sigma_{d_i}^2$ 是矩阵 $D_{M \times M}$ 的第 i 个主对角线元素.

证明 容易证得矩阵 T_m 是酉矩阵, 从而由式(5)得

$$R_{x_0} = T_M D_{M \times M} T_M^H \quad (25)$$

注意到 $D_{M \times M}$ 是三对角矩阵, 所以, 由式(8)和式(25)得到

$$\mathbf{V}_s \Lambda_s \mathbf{V}_s^H + \mathbf{V}_n \Lambda_n \mathbf{V}_n^H = \mathbf{T}_s \mathbf{D}_s \mathbf{T}_s^H + \mathbf{T}_n \mathbf{D}_n \mathbf{T}_n^H + \delta_{P+1} \mathbf{h}_{P+1} \mathbf{h}_{P+1}^H + \delta_{P+1}^* \mathbf{h}_P \mathbf{h}_P^H \quad (26)$$

其中 $\Lambda_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}$. 用 \mathbf{V}_n^H 和 \mathbf{V}_n 分别左乘和右乘式(26), 并考虑到定理 1, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n^H \mathbf{V}_n \Lambda_n \mathbf{V}_n^H \mathbf{V}_n &= \mathbf{V}_n^H \mathbf{T}_s \mathbf{D}_s \mathbf{T}_s^H \mathbf{V}_n + \mathbf{V}_n^H \mathbf{T}_n \mathbf{D}_n \mathbf{T}_n^H \mathbf{V}_n \\ &+ \delta_{P+1} \mathbf{V}_n^H \mathbf{h}_{P+1} \mathbf{h}_{P+1}^H \mathbf{V}_n + \delta_{P+1}^* \mathbf{V}_n^H \mathbf{h}_P \mathbf{h}_P^H \mathbf{V}_n \\ &= \mathbf{V}_n^H \mathbf{T}_n \mathbf{D}_n \mathbf{T}_n^H \mathbf{V}_n = \mathbf{U} \mathbf{D}_n \mathbf{U}^H \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $\mathbf{U} = \mathbf{V}_n^H \mathbf{T}_n$, 不难看出 \mathbf{U} 是酉矩阵. 所以式(27)可以表示为

$$\Lambda_n = \mathbf{U} \mathbf{D}_n \mathbf{U}^H \quad (28)$$

引理表明, $\mathbf{x}_P(k)$ 是时间白的随机过程, 所以 $\mathbf{x}_i(k)$, $i = P + 1, P + 2, \dots, M - 1$, 也是时间白的随机过程. 于是, 对于 $i = P, P + 1, \dots, M - 1$, 则有

$$\begin{aligned} \delta_{i+1} &= E[d_{i+1}(k)d_i^*(k)] \\ &= E[\mathbf{h}_{i+1}^H \mathbf{x}_i(k) \mathbf{x}_{i-1}^H(k) \mathbf{h}_i] \\ &= \mathbf{h}_{i+1}^H \mathbf{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(\prod_{i=i}^1 \mathbf{B}_i \right) \mathbf{n}(k) \left[\left(\prod_{s=i-1}^1 \mathbf{B}_s \right) A(\theta) s(k) + \left(\prod_{s=i-1}^1 \mathbf{B}_s \right) \mathbf{n}(k) \right] \right\}^H \mathbf{h}_i \\ &= \mathbf{h}_{i+1}^H \left\{ \left(\prod_{i=i}^1 \mathbf{B}_i \right) E[\mathbf{n}(k) \mathbf{n}^H(k)] \left(\prod_{s=i-1}^1 \mathbf{B}_s \right)^H \right\} \mathbf{h}_i \\ &= \sigma_n^2 \mathbf{h}_{i+1}^H \left[1 - \prod_{i=1}^i \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H \right] \left[\mathbf{I} - \prod_{s=1}^{i-1} \mathbf{h}_s \mathbf{h}_s^H \right] \mathbf{h}_i = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

从而 $\mathbf{D}_n \in \mathbf{C}^{(M-P) \times (M-P)}$ 是对角矩阵, 而且有 $\mathbf{D}_n = \text{diag}(\sigma_{d_{P+1}}^2, \sigma_{d_{P+2}}^2, \dots, \sigma_{d_M}^2)$. 所以, 由式(28)得

$$\sigma_{d_i}^2 = \sigma_n^2, i = P+1, P+2, \dots, M \quad (30)$$

如果用估计的协方差矩阵替代真正的协方差矩阵, 则有

$$\Lambda_n = \mathbf{U} \mathbf{D}_n \mathbf{U}^H \quad (31)$$

于是

$$\det(\Lambda_n) = \det(\mathbf{U} \mathbf{D}_n \mathbf{U}^H) = \det(\mathbf{D}_n) \quad (32)$$

用估计的信源数 P 代替真实的信源数 P , 则

$$\prod_{i=P+1}^M \lambda_i = \prod_{i=P+1}^M \sigma_{d_i}^2 \quad (33)$$

由式(31)可以求得

$$\text{tr}(\Lambda_n) = \text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{D}_n \mathbf{U}^H) = \text{tr}(\mathbf{D}_n) \quad (34)$$

所以

$$\sum_{i=P+1}^M \lambda_i = \sum_{i=P+1}^M \sigma_{d_i}^2 \quad (35)$$

把式(33)和式(35)代入式(21)立即有式(24)的结论. 定理得证.

说明 2 如果我们能够正确地估计到信源数, 那么噪声功率由下式容易求得

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{M-P} \sum_{i=P+1}^M \lambda_i = \frac{1}{M-P} \sum_{i=P+1}^M \lambda_i^2 \quad (36)$$

此外, 注意到采用式(24)所示的似然函数估计信号子空间的维数和子空间的快速分解是可以同时进行的, 完成 MSWF 的前向递推即可.

5 仿真结果

为了证明本文方法的有效性和方便与常规子空间分解方法相比较, 我们做了如下的仿真. 所使用的阵列是等距线阵(ULA), 并假设阵元是无方向性的. 阵元之间的间隔为半波长. 假设阵列接收到 4 个等功率的不相关的信号. 信号分别以 $-5^\circ, 0^\circ, 5^\circ$ 和 10° 的波达方向入射到接收阵列天线. 噪声是空时均白的复高斯随机过程. 信噪比(SNR)定义为 $10\log(\sigma_s^2/\sigma_n^2)$, 其中 σ_s^2 是信号的功率. 图 1 是四种方法的正确检测概率随采样快拍数变化的情况, 其中阵元数为 12, SNR 为 10dB, 独立实验次数为 5000. 正如文[14]所述, 采用特征值分解估计子空间的维数时, AIC 准则不是一致估计, 而往往是过估计, 所以其正确检测概率不高, 约为 90%. 然而, 本文的 AIC 准则具有很高的正确检测概率, 当快拍数大于 250 时就达到 100%. 由于 MDL 准则是一致估计, 所以随着快拍数的增大, 常规的 MDL 和本文的 MDL 均趋近于 100% 的正确检测概率. 在快拍数较少的情况下, 本文的 MDL 准则优于常规的 MDL 准则.

为了评价本文方法估计到的信号子空间和真实信号子空间的接近程度, 定义如下的子空间距离^[15]:

$$d[\Phi_s^p, \text{col}\{A(\theta)\}] = \|\mathbf{T}_s^H \mathbf{V}_n\|_F$$

真正的协方差矩阵定义为

$$\mathbf{R}_{x_0} = \lim_{N \rightarrow \infty} 1/N \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}_0(k) \mathbf{x}_0^H(k) \triangleq 1/4096 \sum_{k=0}^{4095} \mathbf{x}_0(k) \mathbf{x}_0^H(k)$$

图 2 是信号子空间的距离随快拍数的变化情况. 其中阵元数为 32, 信噪比为 15dB, 独立实验次数为 5000. 为了方便比较, 采用基于特征值分解的常规方法估计到的信号子空间与真

实信号子空间的距离也给出. 由图 2 不难发现, 本文方法估计到的信号子空间接近于常规方法估计到的信号子空间. 在快拍数等于 128 时, 两个子空间距离之差约为 0.04, 当快拍数等于 512 时, 它们之差仅仅为 0.0078, 随着快拍数的增加, 它们之差趋近于零.

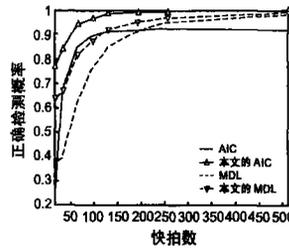


图 1 正确检测概率随快拍数化的情况

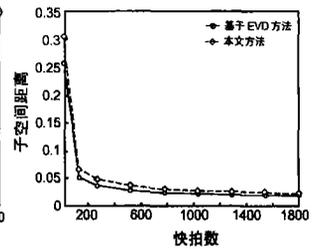


图 2 信号子空间距离随快拍数的变化的情况

6 结论

本文提出一种快速子空间分解方法. 在该方法中, 信号子空间和噪声子空间的估计以及维数的确定是同时进行的. 与常规的子空间分解方法不同, 本文方法不需要估计高阶的协方差矩阵和对其作特征值分解, 也不需要多级维纳滤波器的后向递推, 从而使得其运算量和复杂度大大地降低, 易于实时处理.

附录 引理的证明

证明: (用数学归纳法证明) 当 $P=1$, 即只存在一个信号的情况, 由于

$$\mathbf{h}_1 = \frac{\mathbf{r}_{x_0 d_0}}{\|\mathbf{r}_{x_0 d_0}\|} = \frac{\mathbf{a}(\theta_1) \sigma_{s_1}^2}{\|\mathbf{a}(\theta_1) \sigma_{s_1}^2\|} = \frac{\mathbf{a}(\theta_1)}{\|\mathbf{a}(\theta_1)\|} \quad (A1)$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^{(1)}(k) &= (\mathbf{I} - \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_1^H) \mathbf{x}_0^{(1)}(k) \\ &= \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{a}(\theta_1) \mathbf{a}^H(\theta_1)}{\|\mathbf{a}(\theta_1)\|^2} \right] [\mathbf{a}(\theta_1) s_1(k) + \mathbf{n}(k)] \\ &= \mathbf{B}_1 \mathbf{n}(k) = \left(\prod_{i=1}^1 \mathbf{B}_i \right) \mathbf{n}(k) \end{aligned} \quad (A2)$$

假设当 $P=K$ 时, 即存在 K 个信号的情况, 仍然有

$$\mathbf{x}_K^{(K)}(k) = \mathbf{B}_K \mathbf{x}_{K-1}^{(K)}(k) = \left(\prod_{i=K}^1 \mathbf{B}_i \right) \mathbf{x}_0^{(K)}(k) = \left(\prod_{i=K}^1 \mathbf{B}_i \right) \mathbf{n}(k) \quad (A3)$$

那么, 当 $P=K+1$ 时, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{K+1}^{(K+1)}(k) &= \left(\prod_{i=K+1}^1 \mathbf{B}_i \right) \mathbf{x}_0^{(K+1)}(k) \\ &= \left(\prod_{i=K+1}^1 \mathbf{B}_i \right) [\mathbf{x}_0^{(K)}(k) + \mathbf{a}(\theta_{K+1}) s_{K+1}(k)] \\ &= \mathbf{B}_{K+1} \left(\prod_{i=K}^1 \mathbf{B}_i \right) \mathbf{x}_0^{(K)}(k) + \left(\prod_{i=K+1}^1 \mathbf{B}_i \right) \mathbf{a}(\theta_{K+1}) s_{K+1}(k) \end{aligned} \quad (A4)$$

因为

$$\left(\prod_{i=K+1}^1 \mathbf{B}_i \right) \mathbf{a}(\theta_{K+1}) s_{K+1}(k) = \left[\prod_{i=K+1}^1 (\mathbf{I} - \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H) \right] \mathbf{a}(\theta_{K+1}) s_{K+1}(k)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\mathbf{I} - \sum_{i=1}^{K+1} \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H \right] \mathbf{a}(\theta_{K+1}) s_{K+1}(k) \\
 &= [\mathbf{I} - \mathbf{T}_{K+1} \mathbf{T}_{K+1}^H] \mathbf{a}(\theta_{K+1}) s_{K+1}(k)
 \end{aligned} \quad (A5)$$

上式利用了匹配滤波器 $\mathbf{h}_i, i = \{1, 2, \dots, K+1\}$ 的相互正交特性. 由定理 1 知, $\mathbf{T}_{K+1} \mathbf{T}_{K+1}^H$ 是 $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_{K+1})]$ 列空间的投影. 从而 $[\mathbf{I} - \mathbf{T}_{K+1} \mathbf{T}_{K+1}^H] \mathbf{a}(\theta_{K+1}) = \mathbf{0}$, 即

$$\left(\prod_{i=K+1}^1 \mathbf{B}_i \right) \mathbf{a}(\theta_{K+1}) s_{K+1}(k) = \mathbf{0} \quad (A6)$$

所以

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{K+1}^{(K+1)}(k) &= \mathbf{B}_{K+1} \left(\prod_{i=K}^1 \mathbf{B}_i \right) \mathbf{n}(k) + \left(\prod_{i=K+1}^1 \mathbf{B}_i \right) \mathbf{a}(\theta_{K+1}) s_{K+1}(k) \\
 &= \left(\prod_{i=K+1}^1 \mathbf{B}_i \right) \mathbf{n}(k)
 \end{aligned} \quad (A7)$$

引理得证.

参考文献:

- [1] Schmid R O. A Signal Subspace Approach To Multiple Emitter Location Spectral Estimation[D]. Stanford, CA: Stanford Univ, 1981.
- [2] Ray R, Kailath T. ESPRIT estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. IEEE Trans ASSP, 1989, 37(7): 948-955.
- [3] Viberg M, Ottersten B. Sensor array processing based on subspace fitting[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1991, 39(5): 1110-1121.
- [4] Goldstein J S, Reed I S, Scharf L L. A multistage representation of the wiener filter based on orthogonal projections[J]. IEEE Trans Information Theory, 1998, 44(7): 2943-2959.
- [5] Hotelling H. Analysis of a complex of statistical variables into principal components[J]. J Educ Psychol, 1933, 24: 417-441; 498-520.
- [6] Goldstein J S, Reed I S. Reduced rank adaptive filtering[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1997, 45: 492-496.
- [7] Goldstein J S, Reed I S, P A Zulch. Multistage partially adaptive STAP CFAR detection algorithm[J]. IEEE Trans Aerospace and Electronic Systems, 1999, 35(2): 645-661.
- [8] Myrick W L, Goldstein J S, Zoltowski M D. Low complexity anti-jam space time processing for GPS[A]. IEEE ICASSP[C]. Arlington: IEEE Press, 2001. 2233-2236.
- [9] Honig M L, Xiao W. Performance of reduced rank linear interference suppression[J]. IEEE Trans Information Theory, 2001, 47(5): 1928-1946.
- [10] Witzgall H E, Goldstein J S. Detection performance of the reduced rank linear predictor ROCKET[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2003,

51(7): 1731-1738.

- [11] Xu G, Kailath T. Fast subspace decomposition[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1994, 42(3): 539-551.
- [12] Xu G, Kailath T. Fast estimation of principal eigenspace using lanczos algorithm[J]. SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications, 1994, 15(3): 974-994.
- [13] Chen W, Mitra U, Schniter P. On the equivalence of three reduced rank linear estimators with applications to DS CDMA[J]. IEEE Trans Information Theory, 2002, 48(9): 2609-2614.
- [14] Wax M, Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria[J]. IEEE Trans ASSP, 1985, 33(2): 387-392.
- [15] 孙继广. 矩阵扰动分析[M]. 北京: 科学出版社, 1987.

作者简介:



黄磊 男, 1975 年 10 月生于广东吴川, 现为西安电子科技大学博士研究生, 主要研究兴趣为阵列信号处理、降维自适应信号处理及其在雷达、通信中的应用. Email: huanglei8isp@yahoo.com.cn



吴顺君 男, 1942 年生于上海, 西安电子科技大学教授, 博士生导师, 雷达信号处理重点实验室主任. 长期从事雷达系统和雷达信号处理方面的教学和科研工作, 共发表论文 60 余篇, 出版专著 4 部, 主要研究领域为雷达系统分析、建模与仿真, 雷达信号处理.



张林让 男, 1966 年 1 月生于陕西, 西安电子科技大学的博士生导师, 曾获电子部科技进步一等奖和陕西省教委科技进步二等奖, 发表论文三十多篇, 主要研究兴趣为自适应信号处理、阵列波达方向估计、方向图综合.

冯大政 男, 1959 年生, 西安电子科技大学博士生导师, 长期从事信号处理方面的教学和科研工作, 发表论文四十多篇, 主要研究兴趣为自适应信号处理, 盲信号处理.