

# 一种低复杂度的信号子空间拟合的新方法

黄 磊, 张林让, 吴顺君

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室, 陕西西安 710071)

**摘 要:** 提出一种低复杂度的信号子空间拟合的新方法. 证明了多级维纳滤波器的匹配滤波器(或降维矩阵的列矢量)可以张成一个压缩信号子空间. 利用其与 Krylov 子空间等效这一特点, 推导出信号子空间拟合一个新的基本公式, 进而建立信号子空间拟合一个新的准则函数. 分析表明, 压缩信号子空间可以由降维矩阵的列矢量有效地张成, 而且计算降维矩阵只需要多级维纳滤波器的若干步前向递推, 所以本文方法的运算量和复杂度均较小. 最后, 计算机仿真验证了本文方法的有效性.

**关键词:** 降维; 多级维纳滤波器; 波达方向; 信号子空间拟合

**中图分类号:** TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2005)06-0982-05

## A Low-Complexity Method of Signal Subspace Fitting

HUANG Lei, ZHANG Lin rang, WU Shun jun

(Key Lab for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** A low complexity method for signal subspace fitting is proposed based on the multi stage Wiener filter(MSWF) can span a constrigent signal subspace, which is completely equivalent to the Krylov subspace. Secondly, a new criterion function for signal subspace fitting is derived, and then a novel method for direction of arrival (DOA) estimation is developed. Analysis indicates that the proposed method can work very well even in the case where the rank of the MSWF is much lower than the number of signals. Since finding the constrigent signal subspace merely involves the forward recursion of the MSWF, does not need to estimate the array covariance matrix or compute its eigenvectors, the proposed method is computationally efficient. Finally, the effectiveness of the proposed approach is verified by numerical results.

**Key words:** reduce rank; multi stage Wiener filter; direction of arrival; signal subspace fitting

## 1 引言

波达方向估计是阵列信号处理中的一个重要分支, 在过去的二十年里已经提出了很多性能优良的超分辨算法应用于雷达和通信系统中<sup>[1]</sup>, 其中基于特征结构的子空间方法如 MUSIC 和 ESPRIT 等超分辨算法比较具有代表性. MUSIC 算法在估计到噪声子空间后只是一维搜索, 而且在快拍数足够多、信噪比足够高和信号模型充分准确的条件下, MUSIC 算法估计是一致估计, 从而使得这类方法受到广泛的关注. 然而, MUSIC 类谱方法也有其较为突出的缺点, 例如在有限样本时通常显示出较大的偏差, 导致分辨率降低. 这一问题对强相关信源和相干信源尤为突出. 此外, 该类方法好看不好用, 因为即便能够很好地画出谱峰, 对谱峰的搜索(尤其是二维的谱峰搜索)仍然是一个非常困难的问题. 参数化的子空间方法(如信号子空间拟合和噪声子空间拟合)具有与最大似然方法相同的统计性能, 但其运算量比最大似然法小, 因而引起广泛的研究兴趣<sup>[2-4]</sup>. 遗憾的是, 参数化的子空间方法也需要估计信号子空间或者噪声子空间. 通常的估计方法是估计样本协方差矩阵并对其进行特征值分解或奇异值分解.

这所需的运算量为  $O(M^2N + M^3)$ , 其中  $M$  和  $N$  分别是阵列的阵元数和快拍数. 如果阵元数较多的话, 协方差矩阵是高阶的, 对其作特征值分解的运算量是相当大的.

已有很多学者提出比较有效的信号子空间估计方法. Xu 提出一种基于 Lanczos 算法的快速子空间分解方法<sup>[5]</sup>, 但是其仍然需要估计样本协方差矩阵(运算量为  $O(M^2N)$ )和  $O(M^2P)$  次复数相乘运算, 其中  $P$  是信源数. 显然, 当阵元数较多时, 这种算法的运算量仍然很大. 最近 Witzgall 等人提出了一种基于多级维纳滤波器(MSWF)<sup>[6]</sup>的降阶相关核方法用于高分辨的谱估计, 即所谓的 ROCKET<sup>[7]</sup>和 ROCK MUSIC 技术<sup>[8]</sup>. 但是, ROCK MUSIC 方法需要多级维纳滤波器的后向递推. 我们知道, MSWF 后向递推的所有标量权随着级数的变化而改变. 如果 MSWF 增加或减少一级, 其后向递推的所有标量权均完全改变, 这样会带来算法复杂度的增加. 为了求得自回归(AR)权矢量, ROCKET 方法需要复矩阵相乘运算. 这所要求的运算量也是较大的. 鉴于上述的问题, 本文提出一种信号子空间拟合的新方法. 该方法不需要估计阵列协方差矩阵和对高阶矩阵作特征值分解, 所以运算量大大减小; 能够对相干信源作超分辨估计; 而且该方法只需要 MSWF 的若

干步前向递推,从而能够有效地降低算法的复杂度.

## 2 信号模型

假设阵列是阵元数为  $M$  的等距线阵(UILA), 则阵列在  $k$  时刻接收的  $M$  维观测数据矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(k) &= [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\theta_P)] \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \\ &= \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{s}(k) \in \mathbb{C}^{P \times 1}$ ,  $\mathbf{n}(k) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ ,  $\mathbf{A}(\theta) \in \mathbb{C}^{M \times P}$  分别为信源复振幅矢量, 噪声复矢量和  $M \times P$  阶方向矩阵,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  是采样时刻,  $N$  是快拍数,  $P$  是信源数. 导向矢量具有如下的结构

$$\mathbf{a}(\theta_i) = \frac{1}{\sqrt{M}} [1 \ e^{j\varphi(\theta_i)} \ \cdots \ e^{j(M-1)\varphi(\theta_i)}]^T \quad (2)$$

其中  $\varphi(\theta_i) = \frac{\pi d}{\lambda} \sin(\theta_i)$ ,  $\theta_i \in (-\pi/2, \pi/2)$ , 且  $\theta_i \neq \theta_j$ , ( $i \neq j$ ),  $d$  表示阵元间距,  $\lambda$  是载波波长,  $T$  表示转置. 本文的所有讨论均假设阵元数大于信源数, 即  $M > P$ , 而且  $P$  是先验已知的. 加性噪声是均值为零的空时均白的复高斯随机过程, 即

$$E[\mathbf{n}(k) \mathbf{n}^H(l)] = \sigma_n^2 \delta_{k,l} \quad (3)$$

$$E[\mathbf{n}(k) \mathbf{n}^T(l)] = 0 \quad (4)$$

其中  $k, l = 0, 1, \dots, N-1$ . 假设信号和噪声是不相关的, 所以  $\mathbf{x}_0(k)$  也是复高斯随机过程, 而且其协方差矩阵

$$\mathbf{R}_{x_0} = E[\mathbf{x}_0(k) \mathbf{x}_0^H(k)] = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H(\theta) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \quad (5)$$

是 Hermitian 矩阵, 其中  $\mathbf{I}_M$  表示  $M \times M$  的单位矩阵. 波达方向估计的问题就是从观测数据  $\{\mathbf{x}_0(k), k = 0, 1, \dots, N-1\}$  中估计出方向参数  $\{\theta_i, i = 1, 2, \dots, P\}$ .

## 3 信号子空间拟合

### 3.1 经典的信号子空间拟合

对式(5)的协方差矩阵作特征值分解, 即

$$\mathbf{R}_{x_0} = \mathbf{V}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{V}_s^H + \sigma_n^2 \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (6)$$

其中  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{P+1} = \dots = \lambda_M = \sigma_n^2$ ,  $\mathbf{V}_s = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_P]$ ,  $\mathbf{V}_n = [\mathbf{v}_{P+1}, \mathbf{v}_{P+2}, \dots, \mathbf{v}_M]$ ,  $\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_P)$ . 在一般情况下,  $\mathbf{V}_s$  的列数等于信源协方差矩阵  $\mathbf{R}_s$  的秩  $P'$ , 从而其张成  $\mathbf{A}(\theta)$  的  $P'$  维子空间. 这里  $P'$  表示独立信源的个数. 由式(5)和式(6)则有如下的关系

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{T} \quad (7)$$

其中  $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{P \times P'}$  是列满秩矩阵. 上式构成经典信号子空间拟合的基础<sup>[1,2]</sup>. 如果用估计值  $\hat{\mathbf{V}}_s$  替代理论的  $\mathbf{V}_s$ , 上面的等式则不成立, 此时我们可以使  $\hat{\mathbf{V}}_s$  和  $\mathbf{A}(\theta) \mathbf{T}$  之间某距离的测度最小, 则有如下经典的信号子空间拟合问题

$$\{\theta, \mathbf{T}\} = \arg \min_{\theta, \mathbf{T}} \|\hat{\mathbf{V}}_s - \mathbf{A}(\theta) \mathbf{T}\|_F^2 \quad (8)$$

类似于确定性最大似然准则, 式(8)是一个可分离的最小二乘问题, 从而可以把参数  $\mathbf{T}$  去除. 由最小二乘得到线性参数  $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{P \times P'}$  的解为  $\mathbf{T} = \mathbf{A}^\dagger(\theta) \hat{\mathbf{V}}_s$ , 其中  $\mathbf{A}^\dagger(\theta) = [\mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{A}(\theta)]^{-1} \mathbf{A}^H(\theta)$ . 把  $\mathbf{T} = \mathbf{A}^\dagger(\theta) \hat{\mathbf{V}}_s$  代入式(8), 则信号子空间拟合问题可以简化为

$$\theta_{\text{SSF}} = \arg \min_{\theta} \left\{ \min_{\mathbf{T}} [\text{tr}(\mathbf{P}_A^\dagger \hat{\mathbf{V}}_s \mathbf{V}_s^H)] \right\} \quad (9)$$

其中  $\mathbf{P}_A^\dagger = \mathbf{I}_M - \mathbf{A}(\theta) [\mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{A}(\theta)]^{-1} \mathbf{A}^H(\theta)$ . 如果对信号的特征矢量进行加权, 即可以得到加权的信号子空间拟合

$$\theta_{\text{WSF}} = \arg \min_{\theta} \left\{ \min_{\mathbf{T}} [\text{tr}(\mathbf{P}_A^\dagger \mathbf{V}_s \mathbf{W} \mathbf{V}_s^H)] \right\} \quad (10)$$

其中  $\mathbf{W}$  是加权矩阵. 最优加权矩阵<sup>[2,9]</sup>为  $\mathbf{W}_{\text{opt}} = (\mathbf{\Lambda}_s - \sigma_n^2 \mathbf{I}_{P'})^{-2} \mathbf{\Lambda}_s^{-1}$ .

### 3.2 低复杂度的信号子空间拟合的新方法

**3.2.1 多级维纳滤波器** 由维纳滤波器理论, 对于如下的 Wiener Hopf 方程:

$$\mathbf{R}_{x_0} \mathbf{w}_{\text{WF}} = \mathbf{r}_{x_0 d_0} \quad (11)$$

其中  $\mathbf{r}_{x_0 d_0} = E[\mathbf{x}_0(k) d_0^*(k)]$ , 求解其最佳权矢量  $\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{x_0}^{-1} \mathbf{r}_{x_0 d_0}$ . 通常有两种方法: 块处理(SMI)算法和最小均方(LMS)算法. 然而, 这两种算法的缺点和它们的优点一样的突出. SMI 算法不存在收敛速度慢和算法发散的缺点, 但其需要估计协方差矩阵和对其求逆, 这所需要的运算量是很大的. 与 SMI 算法相比, LMS 算法的运算量小得多, 但存在收敛速度慢和算法稳定性较差的问题. Goldstein 等人提出的多级维纳滤波器在最小均方的意义下不需要矩阵求逆就可以得到 Wiener Hopf 方程的近似最优解. 多级维纳滤波器兼备了这两种算法的优点, 同时也克服了它们的缺点, 即 MSWF 具有运算量小、收敛速度快、能应用在小样本支撑的信号环境中等突出优点. 基于相关相减结构的多级维纳滤波器(CSS-MSWF)的结构框图<sup>[10]</sup>如图1所示.

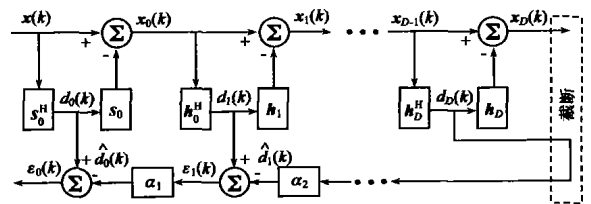


图1 多级维纳滤波器的结构框图

图1中  $h_i = \mathbf{r}_{x_{i-1} d_{i-1}} / \|\mathbf{r}_{x_{i-1} d_{i-1}}\|_2 \in \mathbb{C}^M$ ,  $i = 1, 2, \dots, D$  是归一化的匹配滤波器.  $h_i$  最大化第  $i$  级和第  $i-1$  级输出期望信号间的相关函数的实部. 最大化实部是为了使得各级期望信号同相. 如果期望信号的扩频码  $s_0$  是已知的, 此时 MSWF 工作在盲模式, 否则要求知道期望信号的训练信号  $d_0(k)$ . 后向合成的标量维纳滤波器  $\alpha_i = \sigma_{e_i}^{-2} r_{e_i d_{i-1}}$  能够从误差  $e_i(k) = d_i(k) - \hat{d}_i(k)$  中得到第  $i-1$  级期望信号的估计  $\hat{d}_{i-1}(k)$ , 其中最后级的误差为  $e_D(k) = d_D(k)$ . 为了达到降维的目的, 假设在第  $D$  级截断, 并且满足  $D \leq P'$ , 则前  $D$  个匹配滤波器构成了多级维纳滤波器的降维矩阵  $\mathbf{T}_D = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_D]$ .

**3.2.2 信号子空间拟合的新准则函数** 由于降维矩阵  $\mathbf{T}_D$  的列矢量是相互正交的, 所以级数(维数)为  $D$  的多级维纳滤波器相当于 Wiener Hopf 方程在  $D$  维 Krylov 子空间  $\kappa^{(D)} = \text{span} \left\{ \left[ \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \mathbf{R}_{x_0} \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \dots, \mathbf{R}_{x_0}^{(D-1)} \mathbf{r}_{x_0 d_0} \right] \right\}$  的解, 因而  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_D$  构成  $\kappa^{(D)}$  子空间的一个基<sup>[11]</sup>. 所以存在一个满秩矩阵  $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{D \times D}$ , 使得

$$[\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_D] = [\mathbf{r}_{x_0 d_0}, \mathbf{R}_{x_0} \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \dots, \mathbf{R}_{x_0}^{(D-1)} \mathbf{r}_{x_0 d_0}] \mathbf{K} \quad (12)$$

注意到  $\mathbf{V}_s^H \mathbf{V}_s = \mathbf{I}_{P'}$  和  $\mathbf{V}_n^H \mathbf{V}_n = \mathbf{I}_{M-P'}$ , 由式(6)得

$$R_{x_0}^{(d)} = V_s \Lambda_s^{(d)} V_s^H + \sigma_n^{2d} V_n V_n^H \quad d = 1, 2, \dots, D-1 \quad (13)$$

由多级维纳滤波器的性质可知,  $\mathbf{h}_1 = \mathbf{r}_{x_0 d_0} / \|\mathbf{r}_{x_0 d_0}\|_2$  落在信号子空间中, 从而有  $V_n^H \mathbf{r}_{x_0 d_0} = 0$ , 并考虑到  $V_s V_s^H + V_n V_n^H = \mathbf{I}_M$  和式(7), 所以式(12)可以表示成如下的形式

$$\begin{aligned} T_D &= [V_s V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \dots, V_s \Lambda_s^{(D-1)} V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}] K \\ &= V_s [V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \Lambda_s V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \dots, \Lambda_s^{(D-1)} V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}] K \\ &= A(\theta) T [V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \Lambda_s V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \dots, \Lambda_s^{(D-1)} V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}] K \\ &= A(\theta) T K = A(\theta) F \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\Gamma = [V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \Lambda_s V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \dots, \Lambda_s^{(D-1)} V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}] \in \mathbb{C}^{P' \times D} \quad (15)$$

$$F = T K \in \mathbb{C}^{P \times D} \quad (16)$$

**定理** 如果矩阵  $F \in \mathbb{C}^{P \times D}$  是列满秩的而且没有全零行, 则矩阵  $T_D$  的列矢量张成一个压缩信号子空间; 式(14)构成信号子空间拟合的基础, 并有新的信号子空间拟合准则:

$$\{\theta, F\} = \arg \min_{\theta, F} \|T_D - A(\theta) F\|_F^2 \quad (17)$$

其中  $T_D$  是多级维纳滤波器的降维矩阵  $T_D$  的估计。

**证明** 注意到  $D \leq P'$ , 由式(16)容易看出, 矩阵  $F \in \mathbb{C}^{P \times D}$  是列满秩的。把式(15)代入式(16), 得

$$\begin{aligned} F &= T [V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \Lambda_s V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \dots, \Lambda_s^{(D-1)} V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}] K \\ &= A^\dagger(\theta) [V_s V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}, V_s \Lambda_s V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \dots, V_s \Lambda_s^{(D-1)} V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}] K \\ &\triangleq G K \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$G = A^\dagger(\theta) [V_s V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}, V_s \Lambda_s V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \dots, V_s \Lambda_s^{(D-1)} V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0}] \quad (19)$$

因为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{x_0 d_0} &= E \left\{ [A(\theta) s(k) + \mathbf{n}(k)] s_1^*(k) \right\} \\ &= A(\theta) E [s(k) s_1^*(k)] = A(\theta) \zeta_1 \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $\zeta_1 = E[s(k) s_1^*(k)]$ , 并假设第一个信号是具有单位功率的期望信号。所以矩阵  $G$  的第  $i$  个列矢量为

$$\begin{aligned} g_{\text{row}, i} &= A^\dagger(\theta) V_s \Lambda_s^{(i-1)} V_s^H \mathbf{r}_{x_0 d_0} \\ &= A^\dagger(\theta) [V_s \Lambda_s^{(i-1)} V_s^H + \sigma_n^{2(i-1)} V_n V_n^H] A(\theta) \zeta_1 \\ &= A^\dagger(\theta) R_{x_0}^{(i-1)} A(\theta) \zeta_1 \end{aligned} \quad (21)$$

对于相干信源情况, 有  $\zeta_1 = [1, \rho_2, \dots, \rho_P]^T$ , 其中  $\rho_i, i = 2, 3, \dots, P$  表示传播常数, 所以

$$g_{\text{row}, 1} = [A^H(\theta) A(\theta)]^{-1} A^H(\theta) A(\theta) \zeta_1 = [1, \rho_2, \dots, \rho_P]^T \quad (22)$$

由于  $\rho_i \neq 0, i = 2, 3, \dots, P$ , 所以矩阵  $G$  没有全零行。

对于不相关信源情况, 显然  $\zeta_1 = [1, 0, \dots, 0]^T \triangleq \mathbf{e}_1$ 。由于  $g_{\text{row}, 2} = [A^H(\theta) A(\theta)]^{-1} A^H(\theta) [A(\theta) R_s A^H(\theta) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M] A(\theta) \mathbf{e}_1$

$$\begin{aligned} &= R_s A^H(\theta) A(\theta) \mathbf{e}_1 + \sigma_n^2 \mathbf{e}_1 \\ &= \text{diag}(1, \sigma_{s_2}^2, \dots, \sigma_{s_P}^2) [1, A^H(\theta_2) \mathbf{a}(\theta_1), \dots, A^H(\theta_P) \mathbf{a}(\theta_1)]^T \\ &\quad + \sigma_n^2 \mathbf{e}_1 \\ &= [1 + \sigma_n^2 \sigma_{s_2}^2 A^H(\theta_2) \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \sigma_{s_P}^2 A^H(\theta_P) \mathbf{a}(\theta_1)]^T \end{aligned} \quad (23)$$

故矩阵  $G$  没有全零行。

综上所述, 矩阵  $G$  没有全零行, 从而说明矩阵  $F$  没有全零行。所以降维矩阵  $T_D$  包含了所有信号的方向信息。又由于

$\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_D\}$  落在信号子空间中, 而且两两正交, 所以  $T_D$  的列矢量张成了一个压缩信号子空间, 即

$$\Phi_S^D = \text{span}\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_D\} \subseteq \text{col}\{A(\theta)\} \quad (24)$$

显然, 当多级维纳滤波器的秩等于信源数时, 降维矩阵  $T_D$  的列矢量张成一个完整的信号子空间, 即

$$\Phi_S^D = \text{col}\{A(\theta)\} \quad (25)$$

所以式(14)构成信号子空间拟合一个新的基本公式。当降维矩阵  $T_D$  的估计存在误差时, 则有式(17)最小二乘拟合问题。定理得证。

类似于经典的信号子空间拟合方法, 对于式(17)可分离的非线性最小二乘问题, 若假定未知矩阵  $A(\theta)$  固定不变, 则线性参数  $F$  的解为

$$F = A^\dagger(\theta) T_D \quad (26)$$

将式(26)代入式(17), 则可以得到没有参数  $F$  的信号子空间拟合准则:

$$\theta = \arg \min_{\theta} \|P_A^\perp T_D\|_F^2 = \arg \min_{\theta} [\text{tr}(P_A^\perp T_D T_D^H)] \quad (27)$$

注意到式(17)的新准则函数采用的信号子空间是由降维矩阵的列矢量所张成的压缩信号子空间, 其与基于特征值分解估计到的信号子空间有明显的区别。在以下的性能仿真中也会看到, 本文的信号子空间拟合方法具有与常规加权信号子空间拟合方法(WSF)几乎同样的估计精度。

说明: (1)对于多级维纳滤波器, 求解其降维矩阵  $T_D$  是简单的, 只需要多级维纳滤波器的前向递推, 而且上述的定理表明, 新的信号子空间拟合准则只要求计算一个压缩信号子空间。所以, 本文方法能够有效地降低估计信号子空间的运算量和复杂度。(2)我们知道, 多级维纳滤波器的多级分解(前向递推)是通过最大化相邻级输出信号间的相关性, 即最大化所谓的“残留相关”, 而且在级数较大时  $\mathbf{r}_{x_0 d_0}, \mathbf{R}_{x_0} \mathbf{r}_{x_0 d_0}, \dots, \mathbf{R}_{x_0}^{(D-1)} \mathbf{r}_{x_0 d_0}$  的独立性变弱; 另一方面, 多级维纳滤波器只需要若干级分解就可以取得接近于满秩滤波器的性能, 从而说明了即便系统的阶数很大, 压缩信号子空间也可以由多级维纳滤波器的前若干个匹配滤波器有效地张成。(3)对于式(27)的信号子空间拟合准则, 估计压缩信号子空间不需要准确知道信源的个数。当然, 为了取得较好的估计性能, 信号子空间的维数要求选取在 MSWF 取得接近满秩滤波器性能时的级数。

### 3.3 运算量比较

采用基于相关相减结构(CSS)的多级维纳滤波器可以避免阻塞矩阵的计算, 而且所有运算均是复矢量相乘运算, 因而每一级匹配滤波器所需要的运算量是  $O(MN)$ 。所以采用本文方法估计维数是  $D$  的压缩信号子空间所需的运算量是  $O(DMN)$ 。对于高阶系统,  $D$  取为 8 就可以让降维的多级维纳滤波器接近于满秩维纳滤波器的性能<sup>[1]</sup>, 故  $D$  一般可以取一个比信源数  $P$  小得多的整数。常规加权信号子空间拟合方法需要估计维数是  $M$  的阵列协方差矩阵和对其作特征值分解。这所需要的计算复杂度为  $O(M^2 N + M^3)$ 。一般情况下有  $P \ll M$ , 所以本文方法的计算复杂度远远小于常规加权信号子空间拟合方法。

4 计算机仿真

为了证明本文方法的有效性和方便与常规加权信号子空间拟合方法相比较, 我们做了如下的仿真. 所使用的阵列是阵元数为 32 的等距线阵(ULA), 并假设阵元是无方向性的. 阵元之间的间隔为半波长. 独立信源数是先验已知的. 所有独立实验的次数均是 200 次.

实验 1 (独立信源情况) 假设有 6 个等功率的独立信号以不同的方向入射到接收阵列, 入射角分别是  $-9^\circ, 0^\circ, 24^\circ, 9^\circ, 19^\circ$  和  $-15^\circ$ . 噪声是空时均白的复高斯随机过程. 快拍数为 64, 信噪比(SNR) 定义为  $10\log(\sigma_s^2/\sigma_n^2)$ . 图 2 和图 3 分别是 MSWF 的秩(级数)为 6 和 4 时, 第一个信号的均方根误差(RMSE)随信噪比变化的情况. 由图 2 和图 3 可以看出, 在信噪比较低(小于  $-10\text{dB}$ ) 的情况下, 本文方法比 WSF 方法性能要好得多, 而在信噪比较高的情况下较 WSF 方法略差, 但随着信噪比的增加也趋近于 CRB 界. 表 1 给出了信噪比为  $0\text{dB}$  时, 6 个信号 DOA 估计的均值和均方根误差(RMSE), 其中运算量指的是估计信号子空间所需的运算次数. 由图 3 和表 1 均可以发现, 本文方法在 MSWF 的级数比信源数小( $D=4$ ) 的时候, 对 DOA 估计的性能和级数等于信源数的情况( $D=6$ ) 几乎是相同的. 这说明了采用压缩信号子空间可以取得与完整信号子空间几乎一样的估计性能.

表 1 独立信源 DOA 的估计结果

实 验	DOAs ( $^\circ$ )	均值( $^\circ$ )		均方根误差( $^\circ$ )		信号类型
		WSF	本文方法	WSF	本文方法	
1A ( $D=6$ )	-9	-8.9994	-8.9974	0.0332	0.0568	QPSK
	0	-0.0038	-0.0032	0.0333	0.0623	QPSK
	24	23.9990	23.9946	0.0389	0.0632	QPSK
	9	8.9980	9.0059	0.0606	0.1725	ASK
	19	18.9951	18.9586	0.0607	0.2622	BPSK
	-15	-15.0047	-15.0101	0.0339	0.0574	BPSK
运算量		98304	12288	—		
1B ( $D=4$ )	-9	-8.9987	-8.9991	0.0372	0.0599	QPSK
	0	0.0014	0.0019	0.0328	0.0802	QPSK
	24	23.9962	23.9879	0.0371	0.0918	QPSK
	9	8.9943	9.0165	0.0661	0.3282	ASK
	19	19.0004	19.0016	0.0695	0.1998	BPSK
	-15	-14.9988	-14.9971	0.0329	0.0890	BPSK
运算量		98304	8192	—		

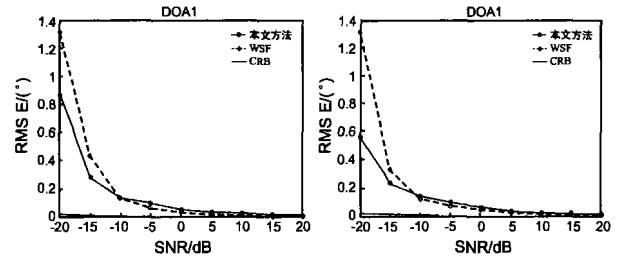


图 2 MSWF 的级数为 6 的情况(独立信源)      图 3 MSWF 的级数为 4 的情况(独立信源)

实验 2 (相干信源情况) 假设在远场有 3 个等功率的独立发射源. 第一个发射源到达阵列有 3 条路径, 其中第一个是直达波, 其余两个是由多径传播而产生的相干信号, 传播常数分别是  $-0.8 + j0.6$  和  $-0.3 - j0.7$ . 第二个独立发射源到达接收阵列有两条路径, 第一个是直达波而第二个是多径信号, 传播常数为  $-0.4 + j0.7$ . 第三个是没有多径信号的发射源. 6 个信号以不同的方向入射到接收阵列天线. 入射角分别是  $-9^\circ, 0^\circ, 24^\circ, 9^\circ, 19^\circ$  和  $-15^\circ$ . 噪声是空时均白的复高斯随机过程. 快拍数为 64. 图 4 和图 5 分别是 MSWF 的级数为 3 和 2 时, 第一个信号的均方根误差随 SNR 变化的情况. 表 2 给出了信噪比为  $0\text{dB}$  时, 6 个信号 DOA 估计的均值和均方根误差.

图 4、5 均表明, 对相干信源的 DOA 的估计, 本文方法也具有与 WSF 方法几乎同样的分辨能力和估计精度, 在信噪比增大的情况下也趋近于 CRB 界. 此外, 由图 5 和表 2 还可以看出, 采用压缩信号子空间估计信号的 DOA 可以得到与采用完整信号子空间(维数等于信源数) 几乎同样的估计性能, 但是本文方法的运算量远远小于 WSF 方法的运算量.

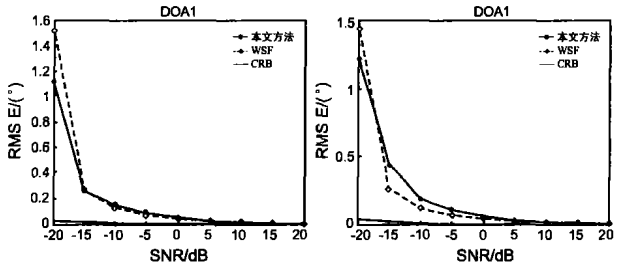


图 4 MSWF 的级数为 3 的情况(独立信源)      图 5 MSWF 的级数为 2 的情况(独立信源)

表 2 相干信源 DOA 的估计结果

实 验	DOAs ( $^\circ$ )	均值( $^\circ$ )		均方根误差( $^\circ$ )		信号类型
		WSF	本文方法	WSF	本文方法	
2A ( $D=3$ )	-9	-8.9995	-8.9974	0.0372	0.0578	QPSK
	0	-0.0014	-0.0012	0.0344	0.0525	QPSK
	24	24.0008	24.0080	0.0518	0.0848	QPSK
	9	8.9968	8.9983	0.0308	0.0650	ASK
	19	18.9971	19.0010	0.0410	0.0894	BPSK
	-15	-14.9982	-14.9927	0.0370	0.1088	BPSK
运算量		98304	6144	—		
2B ( $D=2$ )	-9	-8.9994	-8.9987	0.0354	0.0430	QPSK
	0	0.0010	-0.0010	0.0374	0.0389	QPSK
	24	24.0026	24.0003	0.0527	0.0562	QPSK
	9	9.0008	9.0074	0.0341	0.0620	ASK
	19	19.0026	19.0061	0.0488	0.0743	BPSK
	-15	-14.9971	-14.9927	0.0349	0.0814	BPSK
运算量		98304	4096	—		

5 结论

文章提出一种低复杂度的信号子空间拟合的新方法. 该方法的压缩信号子空间是通过计算多级维纳滤波器的匹配滤波器得到的, 不需要准确知道信源个数. 与常规加权信号子空间拟合方法相比, 本文方法不需要估计协方差矩阵和对

高阶矩阵作特征值分解,也不需要计算多级维纳滤波器后向合成的标量维纳滤波器,所以其运算量和复杂度可以大大地降低.由于压缩信号子空间可以由降维矩阵的列矢量有效地张成,而且计算降维矩阵只需要多级维纳滤波器的若干步前向递推,所以本文提出的新方法具有小运算量和低复杂度的特点,易于实时处理.

#### 参考文献:

- [1] KRIM H, VIBERG M. Two decades of array signal processing research [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4): 67–94.
- [2] VIBERG M, OTTERSTEN B. Sensor array processing based on subspace fitting[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1991, 39(57): 1110–1121.
- [3] DENEIRE L, AYADI J, SLOCK D T M. Weighted and unweighted subspace fitting without eigendecomposition[A]. IEEE Fifth Symposium on Communications and Vehicular Technology[C]. Benelux, Twente, Netherlands: IEEE, 1997. 407–410.
- [4] CHEUNG K W, CHEUNG S W. Analysis of ML and WSF in wireless channels[J]. Electronics Letters, April 1998, 34(7): 624–625.
- [5] XU G, KAILATH T. Fast subspace decomposition[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1994, 42(3): 539–551.
- [6] GOLDSTEIN J S, REED I S, SCHARF L L. A multistage representation of the wiener filter based on orthogonal projections[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1998, 44(7): 2943–2959.
- [7] WITZGALL H E, GOLDSTEIN J S. Detection performance of the reduced-rank linear predictor ROCKET[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2003, 51(7): 1731–1738.
- [8] WITZGALL H E, GOLDSTEIN J S, ZOLTOWSKI M D. A non-unitary extension to spectral estimation[A]. in the Ninth IEEE Digital Signal Processing Workshop Hunt[C]. Texas: IEEE, Oct. 15–18, 2000. 1–6.
- [9] 张贤达, 保铮. 通信信号处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
- [10] RICKS D, GOLDSTEIN J S. Efficient implementation of multi-stage

adaptive wiener filters[A]. Antenna Applications Symposium[C]. Allerton Park, Illinois: IEEE, 20–22 Sept 2000. 29–41.

- [11] HONIG M L, XIAO W. Performance of reduced-rank linear interference suppression[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2001, 47(5): 1928–1946.

#### 作者简介:



黄磊男, 1975年10月生于广东吴川, 现为西安电子科技大学博士研究生, 主要研究兴趣为阵列信号处理、降维自适应信号处理及其在雷达、通信中的应用. Email: huanglei\_rsp@sina.com



张林让男, 1966年1月生于陕西, 1991年获西安电子科技大学电路、信号与系统硕士学位, 1999年3月获信号与信息处理学科博士学位, 现为西安电子科技大学的博士生导师, 曾获电子部科技进步一等奖和陕西省教委科技进步二等奖, 发表论文三十多篇, 主要研究兴趣为自适应信号处理、阵列波达方向估计、方向图综合.



吴顺君男, 1942年生于上海, 西安电子科技大学教授, 博士生导师, 雷达信号处理重点实验室主任, 长期从事雷达系统和雷达信号处理方面的教学和科研工作, 共发表论文60余篇, 出版专著4部, 主要研究领域为雷达系统分析、建模与仿真, 雷达信号处理.