

# 多重网格法求解三维静电场分布

张晶晶<sup>1</sup>, 周立伟<sup>1</sup>, 金伟其<sup>1</sup>, 张智詮<sup>2</sup>

(1. 北京理工大学光电工程系, 北京 100081; 2. 解放军装甲兵工程学院, 北京 100072)

**摘 要:** 本文将一种高效率的数值计算方法——多重网格法引入三维静电场分布的计算, 多重网格法利用限制和延拓可迅速求得满足精度要求的场分布. 研究了求解各种静电透镜电子光学系统三维场分布的多重网格法程序, 验算了静电同心球模型的三维场分布. 通过与目前在场计算中常用的有限差分法进行比较, 可以看出多重网格法的计算效率和计算精度优于有限差分法. 本文表明利用多重网格法计算三维场大大提高了场分布的计算效率, 缩短了计算时间, 因此为后续计算打下了良好的基础.

**关键词:** 电子光学; 电子光学系统 CAD; 三维静电场计算; 多重网格法

**中图分类号:** TN201 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 02-0094-03

## Multi-Grid Method Applied to Solve Three Dimensional Electrostatic Field Distribution

ZHANG Jing-jing<sup>1</sup>, ZHOU Li-wei<sup>1</sup>, JIN Wei-qi<sup>1</sup>, ZHANG Zhi-quan<sup>2</sup>

(1. Dept. of Photoelectronics Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. Armoured Force Engineering Institute, Beijing 100072, China)

**Abstract:** A highly efficient numerical algorithm by using Multi-grid Method (MGM) is introduced to solve the three dimensional field distribution in the present paper. Formulae of the restriction and prolongation in MGM computation is deduced, and a 3D program of MGM is accomplished, which can solve the field distributions in electron optical systems for various electrostatic lenses. The 3D field distribution in an electrostatic concentric spherical model is tested with MGM algorithm and an algorithm based on Finite Difference Method (FDM) respectively. Comparing these two results in view of computational efficiency and computational accuracy, it appears that MGM is superior to FDM in solving electrostatic field distribution for the electron optics problem. This paper shows that the 3D field computation using MGM greatly improves the computational efficiency of field distributions in electron optical systems and shortens the computational time.

**Key words:** electron optics; electron optical system CAD; 3D electrostatic field computation; multi-grid method

## 1 引言

到目前为止, 大多数电子光学系统 CAD 程序只能计算二维场. 虽然出现了一些专门的三维电子光学系统设计程序, 但是其中多数只适用于特殊情况<sup>[1~4]</sup>. 利用绝缘表面与网格臂相交情况下改进的有限差分方程, J. Rouse 研制了能够处理三维电磁场的通用电子光学设计软件包<sup>[5]</sup>, 然而其计算效率受到三维场的复杂性和需处理数据的海量限制. 一种应用于工程边值问题的高效算法——多重网格法 (Multi-grid Method) 在近些年迅速发展起来<sup>[6]</sup>. 二维场的计算<sup>[7]</sup>表明, 多重网格法大大减少了场分布的计算时间, 提高了计算效率, 因而是一种高效、实用的计算方法. 本文首次将多重网格法引入求解三维电子光学系统场分布的计算中.

传统的迭代方法能够处理具有封闭边界、区域形状任意的边值问题, 收敛速度随迭代次数的增加而减小, 这种现象称

为光滑效应. 考虑到上述问题, 多重网格法将传统的迭代方法与一种粗网格校正技术结合起来. 其实质是在粗网格层上对场值的误差进行迭代, 因为场值的误差在粗网格层上是不“光滑”的, 从而使迭代迅速收敛. 将迭代后的场值误差加回到细网格层的对应点上, 最后就得到满足精度要求的电位分布.

## 2 用多重网格法计算三维场的原理

本文所研究的多重网格法求解三维静电场分布就是求解第一类边界条件下的泊松方程或拉普拉斯方程. 这一过程与用多重网格法求解二维轴对称静电场相似<sup>[7]</sup>, 但是需要在三维空间中进行, 处理的数据和进行的计算都大大增加, 因而问题要复杂得多. 首先需要进行三维笛卡尔坐标系中泊松方程或拉普拉斯方程的推导. 然后在光滑迭代过程中使用 Gauss-Seidel 迭代. 在每一次迭代前对场值的误差进行限制, 之后对其进行延拓. 重复上述过程直到迭代误差足够小为止, 于是获

得正确的场分布.

## 2.1 三维笛卡尔坐标系中的差分方程

在三维笛卡尔坐标系中,泊松方程给出如下

$$\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon_0 \quad (1)$$

其中  $x$  轴是电子光学系统的主轴,  $y$  和  $z$  分别是  $y$  和  $z$  方向到  $x$  轴的距离,  $\phi$  是静电电位,  $\rho = \rho(x, y, z)$  是空间电荷,  $\epsilon_0$  是真空中介电常数. 若  $\rho = 0$ , 则泊松方程成为拉普拉斯方程. 由于本文研究静电透镜的弱流电子光学系统, 不考虑空间电荷的影响, 因此下面讨论拉普拉斯方程的三维解.

假设在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  有  $x = x_0 + l, y = y_0 + m, z = z_0 + n$ , 电位  $\phi(x, y, z)$  可在点  $P_0$  展开为泰勒级数, 近似到二次项可得差分方程如下

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \phi_0^{(0,0,0)} + \phi_0^{(1,0,0)}(x-x_0) + \phi_0^{(0,1,0)}(y-y_0) \\ & + \phi_0^{(0,0,1)}(z-z_0) + \phi_0^{(1,1,0)}(y-y_0)(z-z_0) \\ & + \phi_0^{(1,0,1)}(x-x_0)(z-z_0) + \phi_0^{(0,1,1)}(x-x_0) \\ & \cdot (y-y_0) + (1/2)\phi_0^{(2,0,0)}(x-x_0)^2 + (1/2)\phi_0^{(0,2,0)} \\ & \cdot (y-y_0)^2 + (1/2)\phi_0^{(0,0,2)}(z-z_0)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\phi_0^{(i,j,k)} = (\partial^{i+j+k} \phi / \partial x^i \partial y^j \partial z^k)_0$

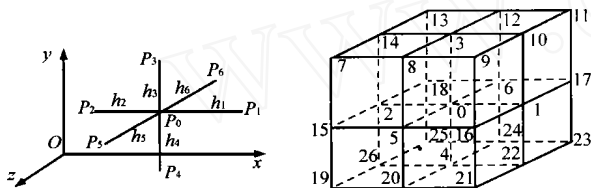


图1 三维场计算的七点结构示意图

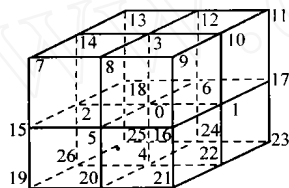


图2 限制和延拓

因为电位  $\phi(x, y, z)$  满足(1), 在式(2)中对  $x, y$  和  $z$  分别求导并代入方程(1)中可得

$$\phi_0^{(2,0,0)} + \phi_0^{(0,2,0)} + \phi_0^{(0,0,2)} = 0 \quad (3)$$

将与  $P_0$  相邻六点  $P_1, P_2, \dots, P_6$  的值依次代入方程(2) (见图1), 得到相应的电位  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_6$  如下

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \phi_0^{(0,0,0)} + h_1 \phi_0^{(1,0,0)} + (1/2) h_1^2 \phi_0^{(2,0,0)}, \\ \phi_2 = & \phi_0^{(0,0,0)} - h_2 \phi_0^{(1,0,0)} + (1/2) h_2^2 \phi_0^{(2,0,0)}, \\ \phi_3 = & \phi_0^{(0,0,0)} + h_3 \phi_0^{(0,1,0)} + (1/2) h_3^2 \phi_0^{(0,2,0)}, \\ \phi_4 = & \phi_0^{(0,0,0)} - h_4 \phi_0^{(0,1,0)} + (1/2) h_4^2 \phi_0^{(0,2,0)}, \\ \phi_5 = & \phi_0^{(0,0,0)} + h_5 \phi_0^{(0,0,1)} + (1/2) h_5^2 \phi_0^{(0,0,2)}, \\ \phi_6 = & \phi_0^{(0,0,0)} - h_6 \phi_0^{(0,0,1)} + (1/2) h_6^2 \phi_0^{(0,0,2)} \end{aligned} \quad (4)$$

利用式(3)和(4)消去  $\phi_0^{(1,0,0)}, \phi_0^{(2,0,0)}, \phi_0^{(0,1,0)}, \phi_0^{(0,2,0)}, \phi_0^{(0,0,1)}, \phi_0^{(0,0,2)}$ , 整理得到所求的三维笛卡尔坐标系中不等间距的七点差分方程

$$c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 + c_3 \phi_3 + c_4 \phi_4 + c_5 \phi_5 + c_6 \phi_6 = c_0 \phi_0 \quad (5)$$

其中  $c_1 = 2/(h_1(h_1+h_2)), c_2 = 2/(h_2(h_1+h_2)), c_3 = 2/(h_3(h_3+h_4)), c_4 = 2/(h_4(h_3+h_4)), c_5 = 2/(h_5(h_5+h_6)), c_6 = 2/(h_6(h_5+h_6)), c_0 = (2/(h_1 h_2)) + (2/(h_3 h_4)) + (2/(h_5 h_6)) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6$ .

## 2.2 Gauss-Seidel 迭代作为光滑迭代

在计算区域中划分三维网格. 网格点表示包括  $x$  轴上点在内的所有区域内网格节点. 在每一网格点应用差分方程, 就

得到需要进行迭代的巨大的差分方程组, 因此选择合适的迭代方法对于后续计算有重要影响.

虽然超松弛迭代法 (Successive Over-relaxation Method) 是目前最成熟的迭代方法, 但是由于其误差的光滑性差使其不适用于多重网格法. 我们选择 Gauss-Seidel 迭代作为多重网格法的光滑迭代方法, 详细过程见文献[8].

## 2.3 限制和延拓公式

与传统计算方法不同, 多重网格法采用了一系列不同步长的网格层. 因为场值的误差在粗网格层上摆动剧烈, 因此在粗网格层上对误差进行迭代将加快收敛速度. 误差从细网格层到粗网格层的变换过程称为限制, 即将细网格层上与某一网格点相邻的 26 个网格点的信息通过一定的权重浓缩到粗网格层上的该点. 我们给出的限制公式如下

$$\begin{aligned} \phi_m^{k+1} = & (1/8) \phi_m^k + (1/16) (\phi_m^k + \phi_{10}^k + \phi_{12}^k + \phi_{14}^k + \phi_{16}^k + \phi_{18}^k \\ & + (1/32) (\phi_{20}^k + \phi_{22}^k + \phi_{24}^k + \phi_{26}^k) + (1/64) (\phi_{28}^k + \phi_{30}^k + \phi_{32}^k + \phi_{34}^k \\ & + \phi_{36}^k + \phi_{38}^k + \phi_{40}^k + \phi_{42}^k) \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\phi_m^k$  对应于某一网格点上场值的误差, 其上标  $k (k=1, \dots, n)$  表示该点位于的网格层数, 下标  $m$  表示该点的位置 (见图2).

在粗网格层上对场值的误差进行迭代后, 必须将粗网格层上的误差通过插值补充出细网格层上的函数值. 这一插值的过程称为延拓. 可以看出, 限制和延拓是互逆的. 导出的延拓公式如下

$$\begin{aligned} \phi_m^k = & (1/8) (\phi_m^{k+1} + \phi_{10}^{k+1} + \phi_{12}^{k+1} + \phi_{14}^{k+1} + \phi_{16}^{k+1} + \phi_{18}^{k+1} + \phi_{20}^{k+1} + \phi_{22}^{k+1} + \phi_{24}^{k+1} + \phi_{26}^{k+1}), \\ \phi_1^k = & (1/4) (\phi_1^{k+1} + \phi_{11}^{k+1} + \phi_{21}^{k+1} + \phi_{23}^{k+1}), \\ \phi_2^k = & (1/4) (\phi_2^{k+1} + \phi_{13}^{k+1} + \phi_{19}^{k+1} + \phi_{25}^{k+1}), \\ \phi_3^k = & (1/4) (\phi_3^{k+1} + \phi_6^{k+1} + \phi_{11}^{k+1} + \phi_{13}^{k+1}), \\ \phi_4^k = & (1/4) (\phi_4^{k+1} + \phi_{21}^{k+1} + \phi_{23}^{k+1} + \phi_{25}^{k+1}), \\ \phi_5^k = & (1/4) (\phi_5^{k+1} + \phi_6^{k+1} + \phi_{19}^{k+1} + \phi_{21}^{k+1}), \\ \phi_6^k = & (1/4) (\phi_6^{k+1} + \phi_{13}^{k+1} + \phi_{23}^{k+1} + \phi_{25}^{k+1}), \\ \phi_8^k = & (1/2) (\phi_8^{k+1} + \phi_9^{k+1}), \phi_{10}^k = (1/2) (\phi_8^{k+1} + \phi_{11}^{k+1}), \\ \phi_{12}^k = & (1/2) (\phi_{11}^{k+1} + \phi_{13}^{k+1}), \phi_{14}^k = (1/2) (\phi_8^{k+1} + \phi_{13}^{k+1}), \\ \phi_{15}^k = & (1/2) (\phi_8^{k+1} + \phi_{19}^{k+1}), \phi_{16}^k = (1/2) (\phi_5^{k+1} + \phi_{21}^{k+1}), \\ \phi_{17}^k = & (1/2) (\phi_{11}^{k+1} + \phi_{23}^{k+1}), \phi_{18}^k = (1/2) (\phi_{13}^{k+1} + \phi_{25}^{k+1}), \\ \phi_{20}^k = & (1/2) (\phi_9^{k+1} + \phi_{21}^{k+1}), \phi_{22}^k = (1/2) (\phi_{21}^{k+1} + \phi_{23}^{k+1}), \\ \phi_{24}^k = & (1/2) (\phi_{23}^{k+1} + \phi_{25}^{k+1}), \phi_{26}^k = (1/2) (\phi_{19}^{k+1} + \phi_{25}^{k+1}), \end{aligned} \quad (7)$$

多重网格法的数学描述请参阅文献[7]. 图3给出了多重网格法求解三维场的基本过程的原理图.

## 2.4 程序设计

根据前述原理, 编制多重网格法求解三维静电场的程序. 该程序在 Windows 环境下用 Borland C++ 4.5 开发. 图4给出了其流程图.

在多数情况下, 所要计算的静电场由任意形状的边界封闭, 因此如何处理边界点数据就成为非常重要的问题. 为此采取了如下措施: (1) 将欲求解电位的区域“镶嵌”到一个长方体内, 并将求解区域之外、长方体之内的网格点作为域外点 (电

位恒为零)处理;(2)采用“虚拟网格点”的概念,即在长方体的外面增加一层网格点,并将增加的点作为域外点处理,详见文献[7].

### 3 同心球模型的三维场验算

由两个有共同曲率中心的球面电极所组成的球形电容器系统简称为两电极同心球系统,作为静电聚焦像管的成像系统,其发展已经比较成熟,系统的电位分布可以写成解析形式.

为验证多重网格法程序的效率和精度,对由两个同心放置的导体球组成的同心球模型进行了计算(见图5),并与目前常用的

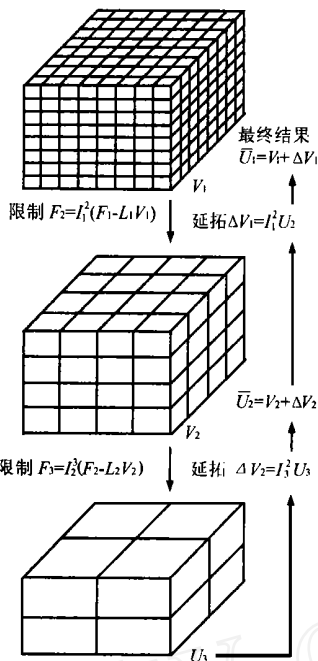


图3 多重网格法解三维静电场的基本原理

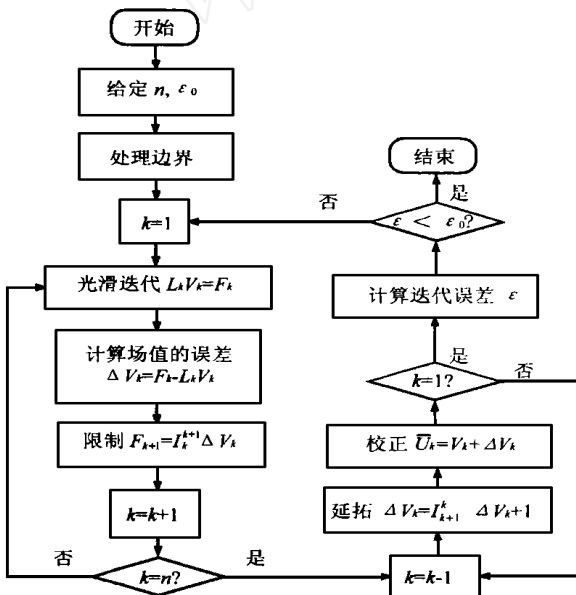


图4 多重网格法程序流程图

有限差分法(Finite Difference Method)计算程序进行了比较.

实心球内半径  $R_a = 5\text{mm}$ , 其电位  $\phi_a = 1000\text{V}$ . 外壳空心球内半径  $R_c = 20\text{mm}$ , 接地. 用多重网格法程序和有限差分法程序分别计算电位分布, 表1列出了从内球面到外壳的网格线上6个点的计算结果及相对误差. 表中第二列给出了各点电位的解析值  $\phi_0$ , 其解析公式为

$$\phi_0 = [(\phi_a R_a) / (R_c - R_a)] / [(R_c / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - 1] \quad (8)$$

其中  $x, y, z$  是该点的空间坐标.

相对误差 由下式计算<sup>[5]</sup>

$$= [(\phi_0 - \phi) / (\phi_{\max} - \phi_{\min})] \times 100\% \quad (9)$$

其中  $\phi$  是电位的计算值,  $\phi_{\max}$  和  $\phi_{\min}$  分别对应于系统的最大和最小电位.

表1 同心球模型的计算结果

$R(\text{mm})$	电位解析值 $\phi_0(\text{V})$	多重网格法		有限差分法	
		$\phi(\text{V})$	(%)	$\phi(\text{V})$	(%)
$R_a = 5$	1000	1000	0	1000	0
8	500	501.627	0.1627	502.037	0.02037
11	272.727	273.546	0.0819	274.076	0.1349
14	142.857	143.263	0.0406	143.713	0.0856
17	58.8235	59.0043	0.01808	59.2466	0.04231
$R_c = 20$	0	0	0	0	0

对此同心球模型的计算, 用多重网格法程序的计算时间为 91 秒, 用有限差分法程序的计算时间为 189 秒. 比较三维场计算二者的结果, 可以看出前者的计算速度大约是后者的二倍, 而前者的最大误差为 0.189%, 后者的最大误差为 0.22%, 也就是说在相同精度的情况下多重网格法程序比有限差分法程序运算快约一倍.

### 4 结论

本文将多重网格法推广到求解三维电子光学系统的场分布, 导出了三维笛卡尔坐标系中的七点差分方程以及限制和延拓公式, 编制了计算三维静电场电位分布的多重网格法程序.

作为实例, 用多重网格法和有限差分法分别验算了一个同心球模型. 结果表明在达到相同计算精度的情况下前者的计算速度比后者快约一倍, 在大数据量实际系统的计算中是比较可观的. 这表明多重网格法是电子光学系统 CAD 中计算三维场分布的一种高效、实用的数值计算方法.



张... 北京理工大学博士生, 1973 年出生. 1995 年毕业于北京理工大学光电工程系, 获工学学士学位. 同年 9 月保送北京理工大学光电工程系攻读博士学位. 研究方向为光信息获取与弱光探测、光电子成像技术.



周立伟 北京理工大学教授, 博士生导师, 中国工程院院士. 1932 年出生. 1958 年毕业于北京工业学院. 1966 年苏联列宁格勒电工学院物理系毕业, 获苏联物理数学副博士学位. 主要从事宽电子束聚焦理论与设计研究及光电子成像的教学与科研工作, 有 3 部专著及学术论文等 160 余篇, 有多项成果获得国家及部级奖励.

(下转第 93 页)

表 4

扫描链数	常规测试方法	情况 1		情况 2		情况 3	
		多项式时间算法 <sup>[1]</sup>	区间构造法	多项式时间算法 <sup>[1]</sup>	区间构造法	多项式时间算法 <sup>[1]</sup>	区间构造法
1	49598	0	75.97 %	0	70.49 %	0	42.72 %
2	25049	36.54 %	75.21 %	17.59 %	69.74 %	5.14 %	41.47 %
3	17033	34.86 %	74.32 %	23.20 %	67.88 %	0.58 %	41.77 %
4	13025	38.44 %	72.94 %	18.91 %	68.79 %	7.16 %	41.64 %

## 5 电路验证及比较

以图 5 中电路 2 为例,在应用全扫描设计测试该电路条件下,把应用区间构造法与文献[1]中的多项式算法就实现结果进行比较。对于

同一种电路结构,表 3 给出电路的三种测试长度不同的情况。表 4 给出区间构造法与多项式时间算法相对常规测试方法的测试应用时间的减少效果的比较,其中第二列中为时钟周期数,其后几列给出的是减少的百分比。区间构造法和常规测试方法得到的多扫描链对应的最小 COST 值见表 5。

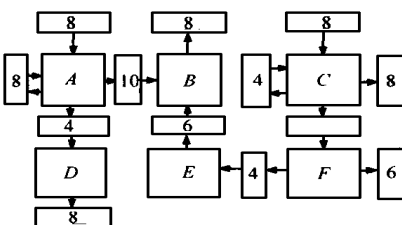


图 5

表 3

	情况 1	情况 2	情况 3
A	40	60	200
B	80	500	80
C	50	80	500
D	200	200	50
E	500	50	40
F	60	40	60

表 5<sup>\*</sup>

扫描链数	常规测试方法	区间构造法		
		情况 1	情况 2	情况 3
1	13	18	18	26
2	14	24	25	40
3	15	28	33	53
4	16	37	37	58

注: \*表示在  $\mu = 1$  情况下计算 COST 值

## 6 结论

本文提出一种多扫描链的构造方法——区间构造法,与常规测试方法中的多扫描链的构造方法相近的是各扫描链的长度相同。不同的是区间构造法建立在交迭测试体系的基础上,测试应用时间与扫描寄存器在扫描链上的分布有关。实验

电路的验证结果表明应用此构造过程构造的多扫描链能够显著地减少测试应用时间。但由于限制了扫描寄存器的分布区间必然增加了硬件开销,本文通过对多扫描链的构造形式的连线复杂度的定性标准 COST 的计算实现了在硬件开销和测试应用时间上取得了折衷。

## 参考文献

- [1] S. Narayanan, R. Gupta and M. A. Breuer. Configuring multiple scan chains for minimum test time. International Conference on Computer Aided Design, 1992: 4 ~ 8
- [2] R. Gupta and M. A. Breuer. Ordering storage elements in a single scan chain. International Conference on Computer-Aided Design, 1991: 408 ~ 411
- [3] S. Narayanan, C. Njinda and M. A. Breuer. Optimal sequencing of scan registers. International Test Conference, 1992: 293 ~ 302
- [4] Pradhan, Dhiraj K and Saxena, Jayashree. Novel scheme to reduce test application time in circuits with full scan. IEEE T-CAD, 1995, 14 (12): 1577 ~ 1586
- [5] Lee, Soo Young and Saluja, Kewal K. Test application time reduction for sequential circuits with scan. IEEE T-CAD, 1995, 14 (9): 1128 ~ 1140



李兆麟 1994 年于哈尔滨工业大学获学士学位,现为哈尔滨工业大学博士生,主要研究方向为 ASIC 的可测性设计。

叶以正 哈尔滨工业大学教授,博士生导师,主要研究方向为 EDA 技术与集成电路设计方法学。

(上接第 96 页)

## 参考文献

- [1] Munro, E. and Chu, H. C. . Optik, 1982, 60: 371; Optick, 1982, 61: 1 ~ 16
- [2] MacGregor, D. M. . IEEE Conf. Proc. Int. Conf. on Consumer Electronics, 1983: 130 ~ 131
- [3] Franzen, N. . Electron Optical Systems for Microscopy, Microanalysis and Microlithography. J. J. Hren et al. ,eds. Chicago: SEM, 1984: 115

- [4] Smith, M. R. and Munro, E. J. Vac. Sci. Technol, 1987, B5: 161 ~ 164
- [5] Rouse, J. R. . Three-Dimensional computer modelling of electron optical systems. Advances in Optical and Electron Microscopy, 1994, 13: 1 ~ 121
- [6] 哈克布思. 多重网路方法. 北京: 科学出版社, 1988: 48 ~ 70
- [7] 张智诤, 周立伟, 金伟其. 一种计算轴对称静电场的多重网路法. 电子学报, 1993, 21 (6): 1 ~ 6
- [8] 徐萃薇. 数值方法导论. 北京: 高等教育出版社, 1985: 7