

# 压控电压源 $2n$ 阶单位增益巴特沃斯 低通滤波器优化设计

杨 勇<sup>1</sup>, 邢 磊<sup>1</sup>, 诸远奇<sup>1</sup>, 杨文璐<sup>2</sup>

(1. 中国地质大学(武汉)数理学院, 湖北武汉 430074; 2. 华中科技大学光电科学与工程学院, 湖北武汉 430074)

**摘 要:** 在分析滤波器误差等值曲线的基础上, 提出一个优化设计  $2n$  阶压控电压源(VCVS)单位增益巴特沃斯  $f_0$  Hz 低通滤波器的方法: 先将  $2n$  阶低通分解为  $n$  个二阶低通, 对第  $i$  个低通, 若对应多项式的一次项系数为  $\alpha_i$ , 则选取两个电容  $C_{1i}$  和  $C_{2i}$ , 使  $C_{2i}/C_{1i}$  为  $0.25\alpha_i^2$ , 取两相同电阻  $R_{1i}$  和  $R_{2i}$  为  $1/\pi\alpha_i f_0 C_{1i}$ . 显然此方法具有方便和低成本的优势. 采用 Multisim10 仿真和实际电路测试可知该方法还具有最稳定的优势. 经分析还发现不同位置的  $C$  和  $R$  的精度对滤波器特性的影响是不同的, 可对各元件精度做合理选择, 以便在保证质量的前提下降低成本.

**关键词:** 低通滤波器; 优化设计;  $2n$  阶; 稳定性; MathCAD; 蒙特卡洛

**中图分类号:** TN713+.4      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112(2011)08-1894-04

## Optimal Design of $2n$ th-Order Voltage-Controlled Voltage Source Unit Gain Butterworth Low-Pass Filter

YANG Yong<sup>1</sup>, XING Lei<sup>1</sup>, ZHU Yuan-qi<sup>1</sup>, YANG Wen-lu<sup>2</sup>

(1. School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences (Wuhan), Wuhan, Hubei 430074, China;

2. College of Optoelectronic Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074, China)

**Abstract:** Reports a method of design  $2n$ th-order Voltage-controlled Voltage Source(VCVS) low-pass filter, based on analyzing the error isogram by MathCAD, the paper put forward the optimal design plan of  $2n$ th-order VCVS unit-gain Butterworth  $f_0$  Hz low-pass filter: firstly, decompose  $2n$ th-order filter into  $n$  2nd-order filters. For the  $i$ th one, if monomial coefficient of the polynomial expression is  $\alpha_i$ , select two capacitances  $C_{1i}$  and  $C_{2i}$ , making  $C_{2i}/C_{1i}$   $0.25\alpha_i^2$ , and then calculate value of the two resistances by the same expression  $1/\pi\alpha_i f_0 C_{1i}$ . Obviously, the design plan has the advantages of convenience, low-cost. And with the aid of Monte Carlo analysis, parameter sweep analysis and real circuit experiment the design plan has also been verified its advantage of stability. In addition, analyses also shows different  $C, R$  have different influence on the filter features.

**Key words:** optimal design; low-pass filter;  $2n$ th-order; stability; MathCAD; Monte Carlo

### 1 引言

目前, VCVS 低通滤波器的设计主要方法有查表法<sup>[1,2]</sup>、图示法<sup>[3]</sup>和算法<sup>[4-6]</sup>, 但都存在一些不足: 不能满足普遍的要求; 有些设计是先确定电阻, 再匹配电容<sup>[4]</sup>, 但特定电容难找, 订制时间长、成本高, 且电容精度也较电阻难以保证; 一些查表法、图示法和一些算法<sup>[5]</sup>没有给出必要的理论根据和计算通式, 使用者难以采用.

文献[6]对 VCVS 二阶低通滤波器进行了较详细的理论推导, 并给出了具体设计方法; 文献[7]对两种低通进行了稳定性比较; 文献[8]采用微分方法讨论了滤波器中元件“灵敏度”问题, 由于当时计算机仿真和辅助设

计<sup>[9]</sup>条件不具备, 计算较复杂, 结果不太直观具体; 文献[10]采用计算机仿真法研究了电容误差导致分数阶低通滤波器特性变化的情况, 但未涉及优化设计; 文献[11]讨论了包括 VCVS 低通在内的 3~5 阶滤波器的参数灵敏度问题, 但并未指出优化和稳定条件; 文献[12、13]虽分别研究了切比雪夫滤波器和多通带数字式滤波器的优化设计, 但未涉及巴特沃斯滤波器.

为此本文以 4 阶 VSVC 单位增益巴特沃斯低通设计为例, 介绍  $2n$  阶 VCVS 低通的优化设计, 具体是将  $2n$  阶巴特沃斯单位增益低通分解为  $n$  个二阶低通, 分别对这  $n$  个二阶低通进行优化设计, 实现方便稳定的  $2n$  阶低通滤波.

## 2 VCVS $2n$ 阶低通滤波器的设计

### 2.1 二阶设计通式推导

图 1 是基本的 VCVS 二阶低通滤波器,其传输函数为<sup>[4,6]</sup>:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i}$$

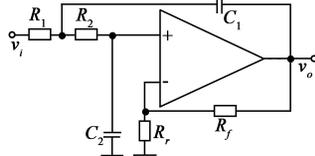


图1 压控电压源二阶低通滤波器

$$= \frac{A_F / R_1 R_2 C_1 C_2}{s^2 + s \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1 - A_F}{R_2 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}} \quad (1)$$

其中  $s = j\omega$ ,  $A_F = 1 + \frac{R_f}{R_r}$  (2)

低通传输函数通式为:  $H(s) = \frac{H_0 \omega_0^2}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \beta \omega_0^2}$  (3)

其中  $\omega_0$  是转折角频率,  $\alpha, \beta$  是二项式系数, 代表不同的滤波特性, 由式(1) ~ (3)可得:

$$\beta \omega_0^2 = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} \quad (4)$$

$$H_0 \omega_0^2 = \frac{A_F}{R_1 C_1 R_2 C_2} \quad (5)$$

$$\alpha \omega_0 = \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1 - A_F}{R_2 C_2} \quad (6)$$

令  $C_2 = k C_1$  (7)

由式(4) ~ (7)得:  $H_0 = \beta A_F$  (8)

$$\delta(k, R_2) = \beta k^2 \omega_0^2 C_1^2 R_2^2 - \alpha k \omega_0 C_1 R_2 + (1 + k - A_F) = 0 \quad (9)$$

因为  $R_2$  应有实根, 由式(9)必然有:

$$k \leq \frac{\alpha^2}{4\beta} + A_F - 1 \quad (10)$$

解方程(9)可得:

$$R_2 = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta(1 + k - A_F)}}{2\beta k \omega_0 C_1} \quad (11)$$

$$R_1 = \frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 4\beta(1 + k - A_F)}}{2\beta(1 + k - A_F)\omega_0 C_1} \quad (12)$$

至此,原则上讲,选定  $C_1$  和  $C_2$  后可由式(2)、(7)、(8)、(11)和式(12)设计任意特性的 VCVS 二阶低通。

### 2.2 VCVS $2n$ 阶单位增益巴特沃斯低通设计

对于  $2n$  阶巴特沃斯低通滤波器,它总可以分解为  $n$  个二阶低通滤波器,其二项式及系数特点是:  $s^2 + \alpha s + \beta$ ,  $\alpha > 0, \beta = 1$ ,若所需要的转折频率为  $f_0$ ,计算出  $\omega_0 = 2\pi f_0$ ;对于单位增益  $A_F = 1$ ,因此式(8) ~ (12)可简化为:

$$H_0 = 1 \quad (8a)$$

$$\delta(k, R_2) = k \omega_0^2 C_1^2 R_2^2 - \alpha \omega_0 C_1 R_2 + 1 = 0 \quad (9a)$$

$$k \leq 0.25\alpha^2 \quad (10a)$$

$$R_2 = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4k}}{2k\omega_0 C_1} \quad (11a)$$

$$R_1 = \frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 4k}}{2k\omega_0 C_1} \quad (12a)$$

由(8a) ~ (12a)原则上就可以完成 VCVS  $2n$  阶单位增益巴特沃斯低通滤波器的设计,其中优先选取的是每个二阶低通的电容  $C_1$ ,下面的问题是如何取每个二阶低通的电容比值  $k$ 。

### 2.3 $k$ 值的选取

由式(11a)、(12a)可知  $k$  值至少存在一个最方便的选择,即取  $k = 0.25\alpha^2$ ,这时不仅计算方便,而且此时  $R_1 = R_2$ ,元件规格可减少一种,订货和装配都较方便,成本也可降低.实际设计时,可以先根据经验公式选取  $C_1 \approx 10^{-3 \sim -5} f_0^{-1}$ ,然后可以十分简单地计算出其他元件的取值:

$$C_2 = 0.25\alpha^2 C_1, R_1 = R_2 = \frac{2}{\alpha \omega_0 C_1} = \frac{1}{\pi \alpha f_0 C_1} \quad (13a)$$

为保证增益为 1,并为运放正端提供地回路同时补偿运放失调,由式(2)、(8)取:

$$R_f \ll R_r, R_f / R_r \approx R_f = R_1 + R_2 = \frac{2}{\pi \alpha f_0 C_1}$$

### 2.4 稳定性分析

由上节知  $k = 0.25\alpha^2$  是方便、低成本的选择,但  $k = 0.25\alpha^2$  时构成的滤波器稳定性如何,需要分析和验证.以组成 100kHz,4 阶单位增益巴特沃斯低通为例,它由 2 个二阶低通组成,这两个二阶低通的  $\alpha$  系数分别是 0.7654 和 1.8478.很明显,完全满足参数方程(9a)即  $\delta = 0$  就是理想的 VCVS 单位增益巴特沃斯低通,若  $\delta$  偏离 0,也就偏离了理想状况。

采用 MathCAD 作出误差  $\delta$  随  $k$  和  $R_2$  变化的等值曲线,如图 2 所示,是  $\alpha = 0.7654$  时的误差等值曲线( $\alpha = 1.8478$  时相似,图略), $\delta = 0$  曲线是理想曲线,其附近曲线密集的地方表示  $\delta$  更容易偏离理想状况, $k$  取值不为  $k = 0.25\alpha^2$  时,例如,图 2 中  $k = 0.08$  线与  $\delta = 0$  曲线相交两点,这两点对应的电阻值就是  $R_1$  和  $R_2$ ,而  $k = 0.25\alpha^2 \approx 0.15$  线与  $\delta = 0$  曲线只相交一点,此点对应的电阻值就是相等的  $R_1$  和  $R_2$ .因此  $k = 0.25\alpha^2$  处等值线最稀疏,也就是最稳定.可见,设计最方便、成本最低的  $k = 0.25\alpha^2$  方案,恰好也应该是最稳定的方案!

事实上,由式(9a)可证明  $\delta$  的梯度幅值为:  $|\nabla \delta| = (\omega_0^2 C_1^2 R_2^2)^2 + (2k\omega_0^2 C_1^2 R_2 - \alpha \omega_0 C_1)^2$  其极小值条件就是:  $2k\omega_0^2 C_1^2 R_2 - \alpha \omega_0 C_1 = 0$ ,又  $\delta = 0$ ,必有:  $k = 0.25\alpha^2$  为最稳定条件。

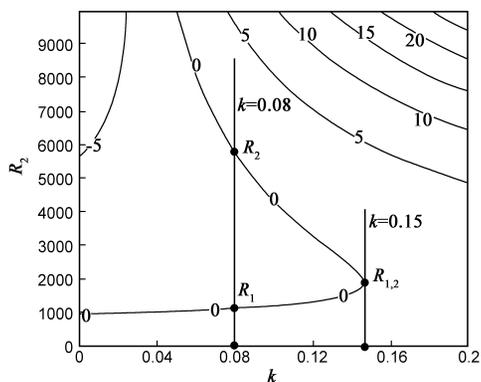


图2 VCVS  $\alpha=0.7654$ 误差等值图

### 3 优化方案的稳定性验证

上节的理论分析可见,优化设计的结论是: $n$ 个二阶低通的 $k$ 取值为 $0.25\alpha^2$ 时,VCVS二阶单位增益低通同时具有方便、低成本和稳定的优势,以下加以证明.

#### 3.1 设计实例

以设计截止频率为100kHz的VCVS 4阶单位增益巴特沃斯低通滤波器为例,具体设计步骤是:

(1)将4阶分解为2个二阶,查相关资料<sup>[4]</sup>得此2个二阶的 $\alpha$ 系数分别为 $\alpha_1 = 0.7654$ 和 $\alpha_2 = 1.8478$ .

(2)选取2个二阶低通滤波器的 $C_{11} = C_{12} \approx 10^{-3} \sim 10^{-5} f_0^{-1}$ ,例如取2.2nF.

(3)按 $k = 0.25\alpha^2$ ,即 $k_1 = 0.15, k_2 = 0.85$ ;由 $C_2 = kC_1$ 算2个二阶的 $C_2, C_{21} = 0.33\text{nF}, C_{22} = 1.87\text{nF}$ .

(4)由式(11a)、(12a)计算出 $R_1$ 和 $R_2$ ;  $R_f$ 和 $R_r$ 的计算参见2.3节.具体设计数据见表1.

表1  $C_{11} = C_{12} = 2.2\text{nF}$ 时VCVS 2级二阶低通的设计值表

性能	$n$ 级	$K$	$C_2(\text{nF})$	$R_1(\Omega)$	$R_2(\Omega)$	$R_f(\Omega)$
优化	1级	0.15	0.33	1890	1890	3780/0
	2级	0.85	1.87	783	783	1566/0
普通	1级	0.08	0.18	1129	5792	6921/0
	2级	0.40	0.88	453	2889	3342/0

采用Multisim10电路仿真软件,对表1所设计的低通进行参数扫描分析和蒙特卡洛仿真分析,仿真界面见图3.图中所标注的元件参数对应优化设计时的电容电阻值,非优化的普通设计的一种情况(并非最差)只

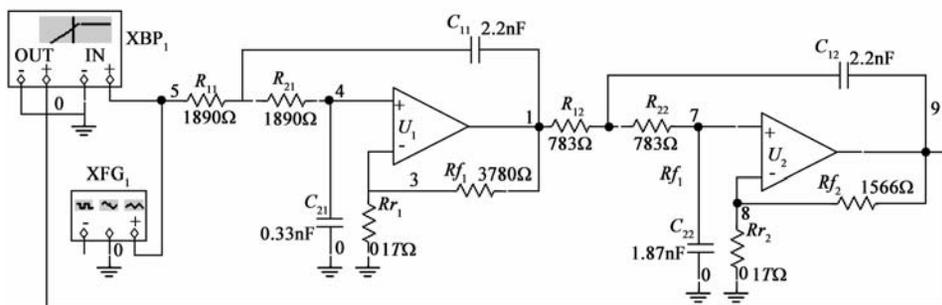


图3 优化电路的Multisim10仿真界面

需按表1修改元件参数.

#### 3.1.1 Multisim10 蒙特卡洛分析

如图3,设8个主要参数 $C_{11}, C_{21}, R_{11}, R_{21}, C_{12}, C_{22}, R_{12}, R_{22}$ 分别随机变化 $\pm 20\%$ ,采用蒙特卡洛分析功能,运行400次分析其幅频曲线变化.如图4所示,是采用优化方案低通的分析结果,图5是按表1非优化低通的分析的结果.对比可知,在相同条件下,优化设计的低通幅频特性曲线较稳定,曲线分布较集中,且接近理想曲线,通带内最大增益约1.2,而按表1设计的普通低通曲线较分散,最大增益高达1.4.

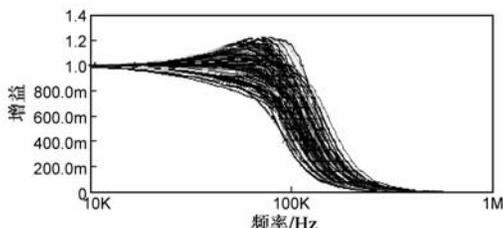


图4 优化设计的4阶低通的蒙特卡洛分析

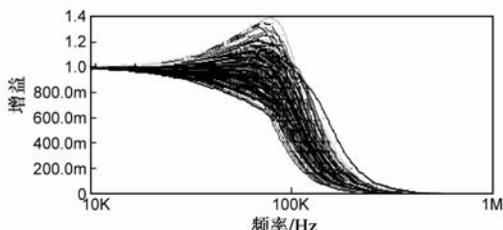


图5 非优化设计的4阶低通的蒙特卡洛分析

#### 3.1.2 Multisim10 参数扫描分析

为确定元件参数变化对低通幅频特性曲线的具体影响,采用Multisim10的元件参数扫描功能进行分析.如图3设4个电容 $C_{11}, C_{21}, C_{12}, C_{22}$ 分别取优化设计标准值变化(误差) $-20\%、0\%、+20\%$ 三值进行参数线性扫描,将仿真数据导出后用MathCAD在同一图中按同一规格画出对应的传输曲线,并突出重点频带区,如图6所示,每个电容同样是变化 $\pm 20\%$ ,但对幅频特性的影响是不同的,其中以 $C_{22}$ 的影响最明显, $C_{11}$ 的影响次之,而 $C_{12}$ 和 $C_{21}$ 的影响相当,都较小.由此可见,优化低成本设计时,可以相对放宽对 $C_{12}$ 和 $C_{21}$ 的精度要求,以减低成本,同时需要保证 $C_{22}, C_{11}$ 的精度,以保证质量.

采用同样的研究方案可知(图略),图3所示的优化电路中 $R_{11}, R_{21}, R_{12}, R_{22}$ 四个电阻的误差对幅频特性的影响比电容的影响明显小些,其中 $R_{11}, R_{21}$ 的影响相同且很小, $R_{12}, R_{22}$ 的影响相同但稍大.

即对  $R_{11}$ 、 $R_{21}$  的精度控制可适当放宽。

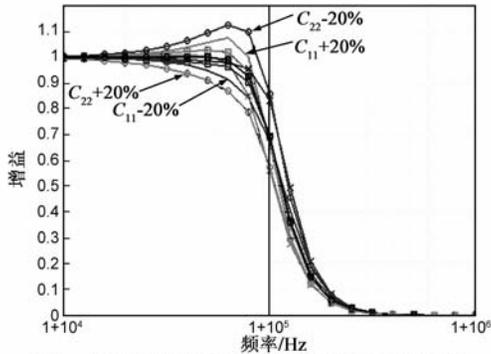


图6 4阶优化设计低通电容变化时的幅频特性

### 3.2 实验验证

按图 3 电路,用 OP27 搭建实际 100kHz VCVS 4 阶单位增益巴特沃斯低通.用 F20 信号发生器输出 200mV<sub>pp</sub> 正弦扫频信号,用日立 V-212 示波器观察,如图 7 所示,是实际 100kHz VCVS 4 阶单位增益巴特沃斯低通的输出效果,可见通带内平坦,幅度为 200mV<sub>pp</sub>,100kHz 处(5 格)幅度降为 70%,约 140mV<sub>pp</sub>,即转折频率为 100kHz.效果良好。

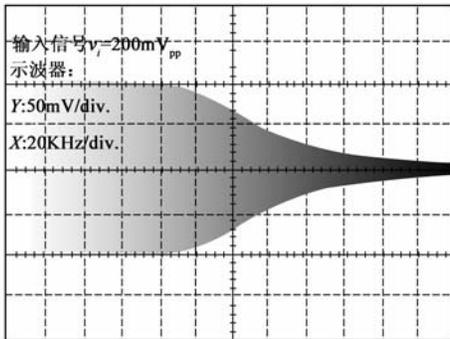


图7 100kHz VCVS 4阶巴特沃斯低通

## 4 结束语

将  $2n$  阶低通优化设计归结为  $n$  个二阶低通的优化的方案,经数学计算、计算机仿真和电路实验都证明该方案不仅计算简单、元件规格较少、成本较低,且具有稳定的优点.经仿真分析还发现电容变化对性能影响较电阻明显,且 4 个电容同样是变化  $\pm 20\%$ ,对幅频特性的影响也是不同的,其中以  $C_{22}$  的影响最明显,  $C_{11}$  的影响次之,而  $C_{12}$  和  $C_{21}$  的影响相当,都较小.由此可见,优化低成本设计时,可以相对放宽对电阻和  $C_{12}$ 、 $C_{21}$  的精度要求,以降低成本,同时需要保证  $C_{22}$ 、 $C_{11}$  的精度,以保证质量。

本文设计方法虽是以 VCVS 4 阶单位增益巴特沃斯低通为例,但对其他类型的滤波器设计也有指导意义。

### 参考文献

[1] D E 约翰逊, J R 约翰逊, H P 穆尔.有源滤波器精确设计手册[M].李国荣,译.北京:电子工业出版社,1984.1-68.

- [2] 谢自美.电子线路设计.实验.测试(第 2 版)[M].武汉:华中科技大学出版社,2006.99-109.
- [3] J L 希尔本, D E 约翰逊.有源滤波器设计手册[M].北京:地质出版社,1980.1-48.
- [4] 秦世才,王朝英.集成运算放大器应用原理[M].天津:天津科学技术出版社,1983.298-323.
- [5] B Carter, R Mancini. OpAmps For Everyone(3E)[M]. Singapore: Elsevier (Singapore) Pte Ltd., 2009.365-384.
- [6] 高明甫,杨勇,孔令斌.二阶压控电压源低通滤波器设计[J].电子技术,2010,47(411):73-75.  
Gao Ming-fu, Yang Yong, Kong Ling-bin. Design of low-pass filter of second-order voltage-controlled voltage source [J]. Electron Technology, 2010, 47(411): 73-75. (in Chinese)
- [7] 远坂俊昭.测量的电子电路设计——滤波器篇[M].鼓军,译.北京:科学出版社,2006.37-49.
- [8] 段尚枢.运算放大器应用基础[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1996.134-176.
- [9] 滕建辅.滤波器电路的计算机辅助设计综述[J].电子学报,1995,23(10):70-75.  
Teng Jian-fu. A survey of computer-aided filter design [J]. Acta Electronica Sinica, 1995, 23(10): 70-75. (in Chinese)
- [10] B Maundy, A S Elwakil, T J Freeborn. On the practical realization of higher-order filters with fractional stepping [J]. Signal Processing, 2011, 91: 484-491.
- [11] P V Ananda Mohan. Sensitivity analysis of third and fourth-order filters [J]. Circuits Syst Signal Process, 2010, 29: 999-1005.
- [12] 苏涛,梁昌洪,谢拥军.广义 Chebyshev 最优滤波器设计 [J]. 电子学报, 2003, 31(12): 2018-2020.  
Su Tao, Liang Chang-hong, Xie Yong-jun. Optimization filter design with general Chebyshev functions [J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(12): 2018-2020. (in Chinese)
- [13] 曾 ■ 昭,李仁发.高阶多通带滤波器优化设计研究 [J]. 电子学报, 2002, 30(1): 87-89.  
Zeng Zhe-zhao, Li Ren-fa. Study on the optimum design of the high-order multi-band-pass filter [J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(1): 87-89. (in Chinese)

### 作者简介



杨 勇 男,1963 年 8 月生于湖北,博士,教授,主要研究方向为电子显微分析、电子测控技术、物理学。

E-mail: yyangong@163.com

邢 磊 男,1987 年 8 月生于河北,中国地质大学(武汉)物理系硕士生,学习方向是物理检测。