噪声环境下遗传算法的收敛性和收敛速度估计

李军华,黎 明
(南昌航空大学无损检测技术教育部重点实验室,江西南昌 330063)

摘 要: 问题求解的环境往往非常复杂,不确定的环境因素、人为因素等都可导致问题处于噪声环境,从而影响实际优化问题的目标函数值的评价.噪声环境下遗传算法的研究在国内外均起步较晚,特别是收敛性和收敛速度的分析是该领域急待解决的问题.本文根据优胜劣汰遗传算法的特性,基于吸收态 Markov 链的数学模型证明了噪声环境下优胜劣汰遗传算法的收敛性,提出了噪声环境下优胜劣汰遗传算法的首达最优解期望时间的估算方法.

关键词: 遗传算法;噪声环境;吸收态 Markov 链;收敛性;收敛速度

中图分类号: TP301.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 08-1898-05

An Analysis on Convergence and Convergence Rate Estimate of Genetic Algorithms in Noisy Environments

LI Jun-hua, LI Ming
(*Key Laboratory of Nondestructive Testing (Ministry of Education), Nanchang Hangkong University, Nanchang, Jiangxi 330063, China*)

Abstract: Random noise perturbs objective functions in many practical problems, and genetic algorithms (GAs) have been widely proposed as an effective optimization tool for dealing with noisy objective functions. However, there are few theoretical studies for the convergence and the convergence speed of genetic algorithms in noisy environments (GA-NE). In this study, Objective functions are assumed to be perturbed by additive random noise. We construct a Markov chain that models elitist-worst genetic algorithms in noisy environments (EWGA-NE). Then the convergence of EWGA-NE is deduced based on the absorbing state Markov chain. Next, the convergence rate of EWGA-NE was studied. The upper and lower bounds for the number of iterations that EWGA-NE selects a globally optimal solution were derived.

Key words: genetic algorithm; noisy environment; absorbing state Markov chain; convergence; convergence rate

1 引言

传统的遗传算法(GA)虽已较为完善[1~3],在经典优化、经济调度等众多领域得以应用.但是,检测误差、大空间不完善取样,以及人机交互过程等因素都会产生噪声,从而影响实际优化问题的目标函数值的评价,利用遗传算法求解噪声环境下的优化问题受到越来越多的关注[4~6].文献[7~9]的研究表明与其它局部启发搜索算法在噪声环境下的性能相比,遗传算法具有明显优势.Arnold 与 Beyer[10]提出了噪声环境下进化算法的通用模型,并分析了噪声对球函数优化过程的影响,Gohh[11]等分析了噪声对多目标优化的影响.Nakama[12]研究了噪声环境下遗传算法的 Markov 模型,分析了噪声环境下最优保留遗传算法的收敛性,但是没有分析算法的收敛速度.对于噪声环境下遗传算法的收敛性和收敛速度的研究是非常重要的,首先要保证算法在噪声环境中的收敛性,进而对噪声环境下遗传算法收敛速度进行分析,才能知道噪声环境下遗传算法求解最优解的计算消耗时间,从而衡量算法的优化效率,以指明算法改进的正确方向.

本文将干扰噪声作为遗传编码的一部分,建立噪声环境下优胜劣汰遗传算法的 Markov 链模型,证明噪声环境下优胜劣汰遗传算法是吸收态 Markov 链,并基于吸收态 Markov 链证明了噪声环境下优胜劣汰遗传算法的收敛性,提出了噪声环境下优胜劣汰遗传算法的首达最优解期望时间的估算方法.

2 噪声环境下的遗传算法

考虑最大化问题,个体编码为二进制,编码长度为 l,搜索空间 $\boldsymbol{S}$ 包含 2^l 个二进制串.无噪声干扰时,个体 X 的目标函数值为 $f(X)$,当个体评价受到加性噪声的干扰后,个体 X 的目标函数值为 $f_\delta(X)=f(X)+\delta$,$\delta\in\boldsymbol{\varphi}$ 为随机噪声,$\boldsymbol{\varphi}$ 为有限状态噪声空间.这里列出噪声环境下的优胜劣汰遗传算法的主要步骤:

收稿日期:2010-11-24;修回日期:2011-02-25
基金项目:国家自然科学基金(No.60963002);江西省自然科学基金(No.2009GZS0090,No.2010GZS0169)

(1)确定种群规模 M 和个体编码长度 l,取 $n=0$,随机生成初始种群 $\boldsymbol{P}(0)$;

(2)随机产生干扰噪声,叠加到个体的无噪目标函数值得到有噪目标函数值;

(3)在 $\boldsymbol{P}(n)$ 中独立选择 M 对母体(Y_1^k, Y_2^k),其中 $k=1,2,\cdots,M$;

(4)对于(3)中的所有母体进行单点交叉得到 M 个个体 $Y_i'(n+1)(1\leqslant i\leqslant M)$,对所有的 $Y_i'(n+1)$进行变异操作后,得到种群 $\boldsymbol{P}'(n+1)=\{Y_i(n+1), 1\leqslant i\leqslant M\}$,评价噪声干扰后个体的目标函数值.

对于 $\boldsymbol{P}(n)$,计 $j_0=\max\{\arg\min\limits_j\{f_\delta(X_j(n))\}\}$,对于 $\boldsymbol{P}'(n+1)$,计 $i_0=\min\{\arg\min\limits_i\{f_\delta(Y_i(n+1))\}\}$,执行优胜劣汰操作后得到下一代种群 $\boldsymbol{P}(n+1)=\{Y_1, Y_2,\cdots, Y_{i_0-1}, X_{j_0}(n), Y_{i_0+1},\cdots, Y_M\}$.

(5)当满足停止准则停止,否则转向(3).

3　EWGA-NE 的 Markov 模型

优化问题的个体编码为二进制,编码长度为 l,个体 $X=(b_1^x, b_2^x,\cdots, b_l^x)$,$\boldsymbol{S}$ 为个体空间,$\boldsymbol{S}^M=\{X=(X_1, X_2,\cdots, X_M), X_i\in \boldsymbol{S}\}$为种群空间,$M$ 称为种群规模.为研究噪声环境下遗传算法的收敛性,将个体的干扰噪声作为编码的一部分,则为 $X=(b_1^x, b_2^x,\cdots, b_l^x, r_{l+1}^x)$,$r_{l+1}^x\in\boldsymbol{\varphi}$.可以认为噪声环境下问题的扩展种群空间为 $\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{\varphi}$.噪声环境下的优胜劣汰遗传算法,包含五个算子:$T_s, T_c, T_m, T_\delta, T_{ed}$分别表示选择算子、交叉算子、变异算子、噪声扰动算子和优胜劣汰算子.

定义 1[13]　令 $f:\boldsymbol{S}\to\boldsymbol{R}^+$为实际适应值函数,即个体空间到正实数空间的映射,记全局最优解集为 $\boldsymbol{S}^*=\{X;\forall Y\in\boldsymbol{S}, f(X)\geqslant f(Y)\}$.

定义 2　令 $f_\delta:\boldsymbol{\Psi}\to\boldsymbol{R}^+$视在适应值函数,即个体空间到正实数空间的映射,记扩展搜索空间全局最优解集为 $\boldsymbol{\Psi}^*=\{X;\forall Y\in\boldsymbol{\Psi}, f_\delta(X)\geqslant f_\delta(Y)\}$.

定义 3[13]　选择算子 $T_s:\boldsymbol{\Psi}^M\to\boldsymbol{\Psi}^2$,即在一个种群中选择两个个体的随机映射,设种群 $\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{\psi}^M$,则个 X_i 与 X_j 被选择作为父代个体的概率为:

$$P\{T_s(\boldsymbol{P})=(X_i, X_j)\}=\frac{f_\delta(X_i)\times f_\delta(X_j)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} f_\delta(X_k)\right)^2}$$

定义 4[13]　$T_c:\boldsymbol{\Psi}^2\to\boldsymbol{S}$ 是单点随机交叉算子,l 为编码长度,k 为用单点交叉$(\zeta(X_i),\zeta(X_j))$可以生成个体 Y 的基因位置的个数,映射 $\zeta:\boldsymbol{\Psi}\to\boldsymbol{S}$,删除扩展编码中的扰动编码部分,则:

$$P\{T_c(X_i, X_j)=Y\}=\begin{cases}\dfrac{kp_c}{l}, & Y\neq\zeta(X_i)\\ 1-p_c+\dfrac{kp_c}{l}, & Y=\zeta(X_i)\end{cases}$$

定义 5[13]　变异算子是个体空间到个体空间的随机映射 $T_m:\boldsymbol{S}\to\boldsymbol{S}$,其作用方式是独立地以概率 p_m 改变个体分量的取值,$d(Y_1, Y_2)$表示 Y_1 与 Y_2 之间的海明距离.任意两个个体 $Y_1, Y_2\in\boldsymbol{S}$,有

$$P\{T_m(Y_1)=Y_2\}=p_m^{d(Y_1,Y_2)}(1-p_m)^{(l-d(Y_1,Y_2))}$$

定义 6　噪声扰动算子将个体空间的个体映射到扩展搜索空间的映射 $T_\delta:\boldsymbol{S}\to\boldsymbol{\Psi}$,对任意个体 $X\in\boldsymbol{S}$,$Z\in\boldsymbol{\Psi}$ 有

$$P\{T_\delta(X)=Z\}=\begin{cases}p_\delta(\varepsilon(Z)), & \varepsilon(Z)=X\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

式中,映射 $\varepsilon:\boldsymbol{\Psi}\to\boldsymbol{\varphi}$,若 $Z=(b_1, b_2,\cdots, b_l, r_{l+1})$,则 $\varepsilon(Z)=r_{l+1}$.

定义 7　优胜劣汰算子 $T_{ed}:\boldsymbol{\psi}^M\to\boldsymbol{\psi}^M$,即将种群规模为 M 的种群空间映射到种群规模为 M 的种群空间,对 $\boldsymbol{P}(n), \boldsymbol{P}'(n+1), \boldsymbol{P}(n+1)\in\boldsymbol{\psi}^M$,有

$$\boldsymbol{P}'(n+1)=T(\boldsymbol{P}(n))=T_\delta\circ T_m\circ T_c\circ T_s(P(n))$$

对于 $\boldsymbol{P}(n)$,计 $j_0=\max\{\arg\min\limits_j(f_\delta(X_j(n)))\}$,对于 $\boldsymbol{P}'(n+1)$,计 $i_0=\min\{\arg\min\limits_{j\leqslant N}(f_\delta(Y_j(n+1)))\}$,则

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}(n+1)\\ &=T_{ed}(\boldsymbol{P}(n), \boldsymbol{P}'(n+1))\\ &=(Y_1(n+1),\cdots, Y_{i_0-1}(n+1), X_{j_0}(n),\cdots, Y_N(n+1))\end{aligned}$$

定理 1　噪声环境下的优胜劣汰遗传算法的种群序列$\{\boldsymbol{P}(n); n\geqslant 0\}$是有限齐次马尔可夫链.

证明　由算法流程可知,算法的种群空间 $\boldsymbol{\Psi}^M$ 是有限状态空间,且

$$\boldsymbol{P}(n+1)=(x_i(n+1)=T_\delta^i\circ T_m^i\circ T_c^i\circ T_s^i(\boldsymbol{P}(n)),\\ i\leqslant M, i\neq i_0, x_{i_0}(n+1)=x_{j_0}(n))$$

因此,$\boldsymbol{P}(n+1)$仅与 $\boldsymbol{P}(n)$有关,所以噪声环境下的优胜劣汰遗传算法的种群序列$\{\boldsymbol{P}(n); n\geqslant 0\}$是有限状态的马尔可夫链.

对于任意的 $\boldsymbol{P}_x, \boldsymbol{P}_y\in\boldsymbol{\Psi}^M$,当 $j\neq i_0$ 时,

$$\begin{aligned}&P\{T(\boldsymbol{P}(n))_j=Y_j/\boldsymbol{P}(n)=P_x\}\\ &=\sum_{(Y_1^{(j)},Y_2^{(j)})\in\boldsymbol{\Psi}^2, Z_j\in S} P\{T_s(\boldsymbol{P}_x)=(Y_1^{(j)}, Y_2^{(j)})\}\\ &\cdot P\{T_c(Y_1^{(j)}, Y_2^{(j)})=Z_j\}\cdot P\{T_m(Z_j)=\zeta(Y_j)\}\\ &\cdot P\{T_\delta(\zeta(Y_j))=Y_j\}>0\end{aligned}$$

其中 $T=T_\delta\circ T_m\circ T_c\circ T_s$ 与 n 无关,当 $j=i_0$ 时,

$$P\{X_{i_0}(n+1)=Y_j/\boldsymbol{P}(n)=\boldsymbol{P}_x\}=\begin{cases}1, & Y_j=X_{j_0}(n)\\ 0, & Y_j\neq X_{j_0}(n)\end{cases}$$

于是,种群序列$\{\boldsymbol{P}(n); n\geqslant 0\}$是齐次 Markov 链.

定义 8[14]　给定一个 Markov 链$\{\boldsymbol{P}(n); n\geqslant 0\}$,和最优解空间 $\boldsymbol{S}^*$,若$\{\boldsymbol{P}(n); n\geqslant 0\}$满足 $P(\boldsymbol{P}(n+1)\cap\boldsymbol{S}^*=\boldsymbol{\Phi}/\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{S}^*\neq\boldsymbol{\Phi})=0$,则称$\{\boldsymbol{P}(n); n\geqslant 0\}$为一个吸收态 Markov 链.

定理 2 噪声环境下优胜劣汰遗传算法的种群序列$\{\boldsymbol{P}(n);n\geqslant 0\}$是一个吸收态 Markov 链.

证明 由定理 1 可知噪声环境下优胜劣汰遗传算法的种群序列$\{\boldsymbol{P}(n);n\geqslant 0\}$是有限齐次 Markov 链.

设最优解空间为 $\boldsymbol{\Psi}^*$ 由定义可知,

$$\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi},$$

$$\because\ X_{j_0}(n)=\max_j\{f_\delta(X_j(n)),X_j(n)\in\boldsymbol{P}(n)\},$$

$$\therefore\ X_{j_0}(n)\in\boldsymbol{\Psi}^*\text{ 且 }X_{j_0}(n)\in\boldsymbol{P}(n+1)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{P}(n+1)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}$$

$$\therefore\ P\{\boldsymbol{P}(n+1)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}/\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}\}=1$$

$$\therefore\ P\{\boldsymbol{P}(n+1)\cap\boldsymbol{\Psi}^*=\boldsymbol{\Phi}/\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}\}=0$$

原命题得证.

4 EWGA-NE 的收敛性分析

定义 9[14](收敛性) 给定一个吸收态 Markov 链$\{\boldsymbol{P}(n);n\geqslant 0\}$和最优解空间 $\boldsymbol{S}^*$,记 $\lambda(n)=P\{\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{S}^*\neq\boldsymbol{\Phi}\}$表示在 n 时刻搜索到最优解的概率,若$\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda(n)=1$,则称$\{\boldsymbol{P}(n);n\geqslant 0\}$收敛.

定理 3 EWGA-NE 对应的一个吸收态 Markov 链$\{\boldsymbol{P}(n);n\geqslant 0\}$和最优解空间 $\boldsymbol{\Psi}^*$,若

$$P\{\boldsymbol{P}(n+1)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}/\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{\Psi}^*=\boldsymbol{\Phi}\}=\mu(n)\geqslant\gamma(n)\geqslant 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=0}^{n}[1-\gamma(i)]=0,$$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda(n)=1$

其中 $\lambda(n)=P\{\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}\}$.

证明 (1)求 $P\{\boldsymbol{P}(n+1)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}/\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{\Psi}^*=\boldsymbol{\Phi}\}$,由算法流程有

$$\begin{aligned}&P\{T(\boldsymbol{P}(n))_j=Y_j/\boldsymbol{P}(n)=\boldsymbol{P}_x,\boldsymbol{P}_x\cap\boldsymbol{\Psi}^*=\boldsymbol{\Phi}\}\\&=\sum_{(Y_1^{(j)},Y_2^{(j)})\in\boldsymbol{\Psi}^2,Z_j\in S}P\{T_s(\boldsymbol{P}_x)=(Y_1^{(j)},Y_2^{(j)})\}\\&\cdot P\{T_c(Y_1^{(j)},Y_2^{(j)})=Z_j\}\cdot P\{T_m(Z_j)=\zeta(Y_j)\}\\&\cdot \boldsymbol{P}\{T_\delta(\xi(Y_j))=Y_j\}\end{aligned}$$

若 $\boldsymbol{P}(n+1)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}$,则$\exists j\leqslant M,Y_j\in\boldsymbol{\Psi}^*$,有

$$\begin{aligned}&P\{\boldsymbol{P}(n+1)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}/\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{\Psi}^*=\boldsymbol{\Phi}\}\\&=\sum_{(Y_1^{(j)},Y_2^{(j)})\in\boldsymbol{\Psi}^2,Z_j\in S,Y_j\in\boldsymbol{\Psi}^*}\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{T}_s(\boldsymbol{P}_x)=(Y_1{}^{(j)},Y_2{}^{(j)})\}\\&\cdot P\{T_c(Y_1^{(j)},Y_2^{(j)})=Z_j\}\cdot P\{T_m(Z_j)=\xi(Y_j)\}\\&\cdot P\{T_\delta(\xi(Y_j))=Y_j\}\geqslant Mp_m^l p_{\delta_{\max}}\geqslant 0\end{aligned}$$

式中 $p_{\delta_{\max}}$ 为 $\delta_{\max}$的概率.

所以 $\gamma(n)=Mp_m^l p_{\delta_{\max}}$,有 $1-Mp_m^l p_{\delta_{\max}}<1$.

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=0}^{n}[1-\gamma(i)]=\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=0}^{n}[1-Mp_m^l p_{\delta_{\max}}]=\lim_{n\to+\infty}[1-Mp_m^l p_{\delta_{\max}}]^n=0$$

(2)证明$\{\boldsymbol{P}(n);n\geqslant 0\}$收敛

由全概率公式,有

$$\begin{aligned}\lambda(n)=\lambda(n-1)&\\&\times P\{\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}/\boldsymbol{P}(n-1)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}\}\\&+(1-\lambda(n-1))\\&\times P\{\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}/\boldsymbol{P}(n-1)\cap\boldsymbol{\Psi}^*=\boldsymbol{\Phi}\}\end{aligned}$$

由于$\{\boldsymbol{P}(n);n\geqslant 0\}$是吸收态 Markov 链,即

$$P\{\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}/\boldsymbol{P}(n-1)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}\}=1,$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lambda(n)&=\lambda(n-1)+(1-\lambda(n-1))\\&\quad\times P\{\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}/\boldsymbol{P}(n-1)\cap\boldsymbol{\Psi}^*=\boldsymbol{\Phi}\}\\&=\lambda(n-1)+(1-\lambda(n-1))\mu(n-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ 1-\lambda(n)&=1-\lambda(n-1)-(1-\lambda(n-1))\mu(n-1)\\&=(1-\lambda(n-1))(1-\mu(n-1))\end{aligned}$$

同理

$$1-\lambda(n-1)=(1-\lambda(n-2))(1-\mu(n-2))$$

$$\begin{aligned}\therefore\ 1-\lambda(n)&=(1-\lambda(n-1))(1-\mu(n-1))\\&=(1-\lambda(n-2))(1-\mu(n-2))(1-\mu(n-1))\\&=(1-\lambda(0))\prod_{i=0}^{n-1}(1-\mu(i))\\&\leqslant(1-\lambda(0))\prod_{i=0}^{n-1}(1-\gamma(i))\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to+\infty}(1-\lambda(n))\leqslant(1-\lambda(0))\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=0}^{n-1}(1-\gamma(i))$$

$$\because\ \lim_{n\to+\infty}\prod_{i=0}^{n-1}(1-\gamma(i))=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to+\infty}(1-\lambda(n))\leqslant 0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to+\infty}\lambda(n)=1$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{\Psi}^*\neq\boldsymbol{\Phi}\}=1.$

原命题得证.

5 EWGA-NE 的收敛速度分析

本节将基于吸收态 Markov 链,分析噪声环境下优胜劣汰遗传算法的收敛速度,提出噪声环境下优胜劣汰遗传算法的首达最优解期望时间的估算方法并给出算法的首达最优解期望时间的上、下界.

定义 10[12](首达最优解期望时间) 给定一个吸收态 Markov 链$\{\boldsymbol{P}(n);n\geqslant 0\}$和最优解空间 $\boldsymbol{S}^*$,称 $\tau=\min\{n;\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{S}^*\neq\boldsymbol{\Phi}\}$为首达最优解时间,则称 τ 的期望$E(\tau)$为首达最优解期望时间.

引理 1[14] 给定吸收态 Markov 过程$\{\boldsymbol{P}(n);n\geqslant 0\}$和最优解空间 $\boldsymbol{S}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda(n)=1$,则其首达最优解期望时间为

$$E(\tau)=\sum_{i=0}^{+\infty}(1-\lambda(i))$$

根据引理 1,如果算法的 $\lambda(i)$是已知的,则可以准确地计算出算法的首达最优解期望时间,从而可以衡

量算法的收敛速度.但是,$\lambda(i)$很难确定,首达最优解期望时间也就不能确定.

引理 2[14]　给定一个吸收态 Markov 链$\{\boldsymbol{P}(n);n\geqslant 0\}$和最优解空间 $\boldsymbol{S}^*$,若

$$\lambda(n)=P\{\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{S}^*\neq\boldsymbol{\Phi}\},$$

$$P\{\boldsymbol{P}(n+1)\cap\boldsymbol{S}^*\neq\boldsymbol{\Phi}/\boldsymbol{P}(n)\cap\boldsymbol{S}^*=\boldsymbol{\Phi}\}=\mu(n)\geqslant 0$$

满足 $0\leqslant a(n)\leqslant\mu(n)\leqslant b(n)\leqslant 1(\forall n=0,1,2,\cdots)$,则

$$(1-\lambda(0))+\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\lambda(0))\prod_{i=0}^{n-1}(1-b(i))\leqslant E(\tau)$$

$$\leqslant(1-\lambda(0))+\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\lambda(0))\prod_{i=0}^{n-1}(1-a(i))$$

定理 4　EWGA-NE 对应的一个吸收态 Markov 链$\{\boldsymbol{P}(n);n\geqslant 0\}$和最优解空间 $\boldsymbol{S}^*$,最优解 X^* 与次优解 $\tilde{X}^*$ 的目标函数值的差为 Δf,若 $\Delta f<(\delta_{\max}-\delta_{\min})$,则

$$\begin{aligned}&(1-\lambda(0))[M(1-p_m)^l p_{(\delta_{\max}-\Delta f,\delta_{\max})}]^{-1}\\&\leqslant E(\tau)\leqslant(1-\lambda(0))[Mp_m^l p_{(\delta_{\max}-\Delta f,\delta_{\max})}]^{-1}\end{aligned}\tag{1}$$

若 $\Delta f\geqslant(\delta_{\max}-\delta_{\min})$,则

$$\begin{aligned}&(1-\lambda(0))[M(1-p_m)^{l-1}p_m]^{-1}\\&\leqslant E(\tau)\leqslant(1-\lambda(0))[Mp_m^l]^{-1}\end{aligned}\tag{2}$$

(因篇幅限制,证明过程略)

Greiner[15]多次采样个体的适应度,以平均值作为个体的有效适应度,有效降低了噪声的幅值,使得噪声的干扰区间小于 Δf.此时的首达最优解期望时间由式(2)确定,比较式(1)和(2)可知,式(2)对应情况的首达最优解期望时间小于式(1)的情况.因此,定理 4 从理论上说明了重采样方法确实能有效改善算法的性能.Darwen[16]的研究表明加大种群规模能有效提高噪声环境下进化算法的优化性能,而由式(1)和(2)可知,加大种群规模 M 可以减小首达最优解期望时间,因此,定理 4 从理论上补充了文献[16]的研究.

6　结论

本文针对噪声环境下遗传算法收敛性和收敛速度估计,提出了噪声环境下优胜劣汰遗传算法的吸收态 Markov 链模型、基于吸收态 Markov 链的特性证明了噪声环境下优胜劣汰遗传算法的收敛性,并给出了首达最优解期望收敛时间的估算方法,估计了噪声环境下优胜劣汰遗传算法首达最优解期望收敛时间的上下界,理论上实现了对噪声环境下遗传算法收敛速度的衡量.

基于本文对噪声环境下遗传算法收敛速度的分析结论,在未来的工作中将集中研究提高噪声环境下遗传算法收敛速度的改进方法,提高噪声环境下遗传算法的优化性能.

参考文献

[1] 周育人,岳喜顺,周继香.演化算法的收敛速率与效率分析[J].计算机学报,2004,27(11):1485-1491.
Zhou Yu-ren, Yue Xi-shun, Zhou Ji-xiang. The convergence rate and efficience of evolutionary algorithms[J]. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(11): 1485-1491. (in Chinese)

[2] 罗小平,韦巍.生物免疫遗传算法的几乎处处强收敛性分析及收敛速度估计[J].电子学报,2005,33(10):1803-1807.
Luo Xiao-ping, Wei Wei. The analysis on strong convergence (a.s.) and convergence rate estimate of immune genetic algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(10): 1803-1807. (in Chinese)

[3] 刘淳安,王宇平.动态多目标优化的进化算法及其收敛性分析[J].电子学报,2007,35(6):1118-1121.
Liu Chun-an, Wang Yu-ping. Evolutionary algorithm for dynamic multi-objective optimization problems and its convergence[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(6): 1118-1121. (in Chinese)

[4] T Bäck, U Hamme. Evolution strategies applied to perturbed objective functions[A]. IEEE World Congress of Computational Intelligence[C]. Orlando, Florida, USA: IEEE, 1994. 40-45.

[5] P Darwen, J Pollack. Co-evolutionary learning on noisy tasks[A]. Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation[C]. Washington, DC , USA: IEEE, 1999. 1724-1731.

[6] H G Beyer. Evolutionary algorithms in noisy environments: theoretical issues and guidelines for practice[J]. Comput Methods in Mech Appl Eng, 2000, 186(2-4): 239-267.

[7] D V Arnold, H G Beyer. A comparison of evolution strategies with other direct search methods in the presence of noise[J]. Comput Optim Appli, 2003, 24: 135-159.

[8] 袁颖,林皋,等.基于改进遗传算法的桥梁结构损伤识别应用研究[J].应用力学学报,2007,24(2),186-190.
Yuan Ying, Lin Gao, et al. Improved genetic algorithmfor bridge damage detection[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2007, 24(2): 186-190. (in Chinese)

[9] Leszek Siwik, Szymon Natanek. Elitist evolutionary multi-agent system in solving noisy multi-objective optimization problems[A]. 2008 IEEE CEC[C]. IEEE, 2008. 3319-3326.

[10] D V Arnold, H G Beyer. A general noise model and its effects on evolution strategy performance[J]. IEEE Trans Evol Comput, 2006, 10(4): 380-391.

[11] C K Goh, K C Tan. An investigation on noisy environments in evolutionary multiobjective optimization[J]. IEEE Trans Evol Comput, 2007, 11(3): 354-381.

[12] T Nakama. Theoretical analysis of genetic algorithms in noisy environments based on a Markov model[A]. Proceedings of the 2008 Genetic and Evolutionary Computation Conference[C]. Atlanta, Georgia, USA: ACM, 2008. 1001-1008.

[13] 张文修,梁怡.遗传算法的数学基础[M].西安:西安交通大学出版社,2003.

Zhang Wen-xiu,Liang Yi.Mathematical Foundation of Genetic Algorithms[M].Xi'an:Xi'an Jiaotong University Press,2003.(in Chinese)

[14] 黄翰,郝志峰,等.蚁群算法的收敛速度分析[J].计算机学报,2007,30(8):1344 – 1353.

Huang Han,Hao Zhi-feng,et al.The convergence speed of ant colony optimization[J].Chinese Journal of Computers,2007,30(8):1344 – 1353.(in Chinese)

[15] H Greiner.Robust optical coating design with evolution strategies[J].Appl Opt,1996,35(28):5477 – 5483.

[16] P Darwen,J Pollack.Co-evolutionary learning on noisy tasks[A].Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation[C]. Washington, DC, USA: IEEE, 1999. 1724 – 1731.

作者简介

李军华 男,1974 年生于江西莲花,副教授.主要研究方向为进化计算、智能控制.

E-mail:jhlee126@126.com

黎 明 男,1965 年生于江西南昌,教授,博士生导师,主要研究方向为进化计算、图像处理.