

# 一种单分量 PPS 的快速估计算法

张希会<sup>1</sup>, 刘镰斧<sup>1</sup>, 蔡竞业<sup>1</sup>, 杨远望<sup>1</sup>, 陈兴华<sup>2</sup>

(1. 电子科技大学通信与信息工程系, 四川成都 611731; 2. 北京华航无线电测量研究所, 北京 100013)

**摘 要:** 提出了基于多项式-厄米多项式变换 (PHPT) 的多项式相位信号 (PPS) 参数估计算法. 其基本思路是将相位系数转化为泰勒系数的估计, 并用 PHPT 实现泰勒系数的估计. 该方法为线性算法, 对最低阶系数有很好估计效果, 且计算复杂度比已有算法低, 等效于三次 FFT 运算. 仿真验证了该方法的有效性.

**关键词:** 参数估计; 多项式相位信号; 厄米多项式; 泰勒展开; 多项式-厄米多项式变换

**中图分类号:** N911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 08-1923-08

## A Fast Algorithm for Mono-Component PPS Parameter Estimation

ZHANG Xi-hui<sup>1</sup>, LIU Lian-fu<sup>1</sup>, CAI Jing-ye<sup>1</sup>, YANG Yuan-wang<sup>1</sup>, CHEN Xing-hua<sup>2</sup>

(1. School of Communication and Information Engineering, UESTC, Chengdu, Sichuan 611731, China;

2. Beijing Huahang Radio Measurement Institute of Technology, Beijing 100013, China)

**Abstract:** A PHPT-based algorithm is proposed for parameter estimation of high-order polynomial phase signal (PPS). The basic idea is to translate the phase parameters estimation into the estimation of the corresponding Taylor coefficients of the signal, and Taylor coefficients are estimated by using PHPT. As a linear algorithm, the proposed method has a good performance for the estimation of the lowest-order phase coefficient, and the computational complex is about three FFT operations, which is lower than the exist ones when the phase order is more than three. Computational simulations are presented to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** parameter estimation; polynomial phase signal; hermite polynomial; taylor expansion; polynomial-to-Hermite polynomial transform

## 1 引言

许多领域如通信、雷达、声纳以及地震, 其接收信号具有连续的瞬时相位. 根据 Weierstrass 定理, 连续的瞬时相位可以通过有限区间上的有限多项式逼近. 因此, 多项式相位信号 (PPS) 成为处理这类连续瞬时相位信号的有效模型, 其参数估计也成为信号处理领域关注的热点. 对于单分量 PPS, 最大似然估计 (ML)<sup>[1]</sup> 和非线性瞬时最小二乘法 (NILS)<sup>[2]</sup> 提供了高精度的估计算法, 在加性白色高斯噪声背景中其估计方差逼近克拉门罗下限 (CRLB)<sup>[3,4]</sup>. 但由于基于多维最大化搜索, 它们计算复杂度很高. 此外, ML 代价函数不能保证全域的收敛性, 一定程度上限制了其应用范围. 为了减少计算复杂度, 离散多项式变换 (discrete polynomial transform, DPT)<sup>[5,6]</sup>, 后来被称为高阶模糊函数 (high-order ambiguity function, HAF)<sup>[7]</sup>, 以及多项式魏格纳分布 (PWVD)<sup>[8]</sup> 被提出并引起广泛的关注. 通过对接收信号进行多重非线性处理, HAF 能实现一维搜索运算对 PPS 参数的估计.

作为 HAF 的推广, 乘积型高阶模糊函数 (product high-order ambiguity function, PHAF)<sup>[9]</sup> 采取不同时延的 HAF 相乘, 可提高最高阶相位系数的识别及估计性能. 近些年来, 涌现了许多基于经典算法扩展的新方法<sup>[10~17]</sup>, 如广义相位导数展开 (generalized representation of phase derivatives, GRPD)、广义高阶相位函数 (generalized high-order phase functions, GHOPF). 尽管 HAF 类算法相对于 ML 或 NILS 算法能大幅度减少计算量, 但由于引入了非线性处理过程, 造成误差传递效应, 具有较高的信噪比 (SNR) 门限. 本文提出了一种不同于之前讨论的 PPS 参数估计新算法. 其基本思路是利用泰勒展开系数来估计实值 PPS, 而所有未知参数都包含在泰勒系数中, 只需估计前几阶泰勒系数便可建立待估参的代数方程组. 对于复值的恒幅度单分量  $P$  阶 PPS  $f(t) = A \exp \left\{ j \sum_{p=0}^P a_p t^p \right\}$ , 其实部和虚部可分别进行分析. 一般地, 如果未知参数个数为  $N$ , 则需要得到  $N$  阶泰勒系数, 以建立  $N$  个代数方程. 通过解方程组, 最后得到  $N$  个参数的估计. 由

于泰勒展开得到的多项式并不是正交多项式,直接估计泰勒系数是非常困难,需要转换为对应的正交多项式进行处理.本文提出的多项式-厄米多项式变换(poly-nomial-to-Hermite polynomial transform, PHPT)能实现泰勒多项式到具有正交性的厄米多项式的变换,并保证对应阶数的系数之间为一一映射.利用厄米多项式的正交性,可实现对泰勒系数的估计并建立待估参数的代数方程组.

## 2 泰勒展开和厄米多项式特征

### 2.1 信号的泰勒展开

信号的泰勒展开可表示为:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \quad (1)$$

对于单分量复值 PPS  $f(t) = A \exp \left\{ j \sum_{p=0}^P a_p t^p \right\}$ ,其实部和虚部可分别进行泰勒展开

$$\operatorname{Re}\{f(t)\} = A \cos \alpha_0 - A a_1 \sin \alpha_0 \cdot t + \sum_{n=2}^{\infty} b_n t^n \quad (2)$$

$$\operatorname{Im}\{f(t)\} = A \sin \alpha_0 + A a_1 \cos \alpha_0 \cdot t + \sum_{n=2}^{\infty} c_n t^n \quad (3)$$

其中  $b_n$  表示由  $A$  和  $a_p$  构成的函数.而高阶相位系数  $a_p$  ( $p > 1$ ) 可以用过低阶的相位系数  $a_m$  ( $m < p$ ) 和幅度  $A$  估计出

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{f(t)\} &= A \cos \left\{ \sum_{m=0}^{p-1} a_m t^m \right\} \\ &= - (A \sin \alpha_0 \cdot a_p) \cdot t^p + \sum_{n=0, n \neq p}^{\infty} b_n t^n \end{aligned} \quad (4)$$

### 2.2 厄米多项式及其性质

为了方便后文讨论,本文采用的厄米多项式定义与通常定义相差系数  $1/2^n$ ,定义为:

$$H_n(\xi) \triangleq \frac{1}{2^n} (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}) \quad (5)$$

厄米多项式有两个重要的回归性质:

$$H_{n+1}(\xi) - \xi H_n(\xi) + \frac{n}{2} H_{n-1}(\xi) = 0 \quad (6)$$

$$H_{n-1}(\xi) = \frac{1}{n} H'_n(\xi) \quad (7)$$

以及正交性质:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(\xi) H_n(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \cdot n! \delta_{nm} \quad (8)$$

式(8)显示所有的正交多项式加上权  $e^{-\xi^2}$  构成  $L^2(R)$  空间上一组完备的正交基.而厄米高斯函数(Hermite-Gauss function)  $H_n(\xi) \exp(-\xi^2/2)$  也是傅里叶变换的特征函数,对应的特征值为  $e^{jn\pi/2}$ ,即

$$\mathcal{F}\left\{H_n(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)\right\} = e^{jn\pi/2} H_n(u) \exp(-u^2/2) \quad (9)$$

其中  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  表示傅里叶变换算子.如果将厄米多项式直

接展开

$$H_n(\xi) = \sum_{k=0}^K e^{jk\pi} c_{n-2k} \xi^{n-2k} \quad (10)$$

其中  $K = \begin{cases} (n-1)/2, n \text{ 为奇数} \\ n/2, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ . 我们可以通过数学归纳法得到一个有趣的性质:

$$\xi^n = \sum_{k=0}^K c_{n-2k} H_{n-2k}(\xi) \quad (11)$$

式(11)除了对应的系数有正负交叠外,基本和式(10)相同,式(10)和(11)的前六项可清楚地显示这一特征:

$$\begin{aligned} H_0(\xi) &= 1; & 1 &= H_0(\xi) \\ H_1(\xi) &= \xi; & \xi &= H_1(\xi) \\ H_2(\xi) &= \xi^2 - \frac{1}{2}; & \xi^2 &= H_2(\xi) + \frac{1}{2} H_0(\xi) \\ H_3(\xi) &= \xi^3 - \frac{3}{2} \xi; & \xi^3 &= H_3(\xi) + \frac{3}{2} H_1(\xi) \\ H_4(\xi) &= \xi^4 - 3\xi^2 + \frac{3}{4}; & \xi^4 &= H_4(\xi) + 3H_2(\xi) + \frac{3}{4} H_0(\xi) \\ H_5(\xi) &= \xi^5 - 5\xi^3 + \frac{15}{4} \xi; & \xi^5 &= H_5(\xi) + 5H_3(\xi) + \frac{15}{4} H_1(\xi) \end{aligned} \quad (12)$$

此外,下面的卷积公式展现了多项式与厄米多项式的一种转换关系:

$$H_n(t) * \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) = t^n \quad (13)$$

其中  $*$  表示卷积.其证明可采用数学归纳法.

(1) 当  $n=0, 1$  时,直接计算可得成立.

$$H_0(t) * \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) dt = 1 \quad (14)$$

$$H_1(t) * \frac{\exp(-t^2)}{\sqrt{\pi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x) \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}} dx = t \quad (15)$$

(2) 假设  $n \leq k$  时式(13)成立,则  $n = k+1$  时,代入式(6)到式(13)可得

$$\begin{aligned} H_{k+1}(t) * \frac{\exp(-t^2)}{\sqrt{\pi}} &= [tH_k(t) + \frac{n}{2} H_{k-1}(t)] * \frac{\exp(-t^2)}{\sqrt{\pi}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x) H_k(t-x) \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}} dx + \frac{n}{2} t^{k-1} \\ &= t^{k+1} + \frac{n}{2} t^{k-1} - \frac{n}{2} H_{k-1}(t) * \frac{\exp(-t^2)}{\sqrt{\pi}} \\ &= t^{k+1} \end{aligned} \quad (16)$$

综合(1)和(2),可得式(13)成立.

对式(13)求逆卷积,可直接实现从多项式到厄米多项式的频域转换,即

$$\mathcal{F}\{t^n\} \cdot \exp\left(\frac{u^2}{4}\right) = \mathcal{F}\{H_n(t)\} \quad (17)$$

然而,由于  $\exp(u^2/4)$  不衰减,式(17)要求  $t$  取值范围为整个实数区间.因此有限区间内,式(17)并无实用价值.

另一种可实现有限区间的多项式到厄米多项式变换的算法—PHPT,将在下一节介绍。

### 3 PHPT 算法

多项式-厄米多项式变换 (PHPT) 定义为

$$\text{PHPT}\{f\} \triangleq e^{u^2/2} \mathcal{F}\{f(t)e^{-t^2/2}\} * e^{-u^2}/\sqrt{\pi} \quad (18)$$

若  $f(t) = b_n t^n$ , 合并式 (11), (9), (13) 和 (10), 可得到一个重要的性质:

$$\text{PHPT}\{b_n t^n\} = e^{in\pi/2} b_n H_n(u) \quad (19)$$

式 (19) 不要求  $t$  的取值覆盖整个实数区间, 因为  $\mathcal{F}\{b_n t^n \cdot \exp(-\frac{t^2}{2})\}$  得到  $e^{in\pi/2} b_n H_n(u) \exp(-u^2/2)$ , 其包含的  $\exp(-u^2/2)$  可以抵消非衰减因子  $\exp(u^2/2)$ . 由傅里叶变换和卷积的线性叠加性, 可自然地得到式 (18) 定义的 PHPT 满足线性叠加性. 因此式 (19) 可推广得到

$$\text{PHPT}\left\{\sum_{n=0}^N b_n t^n\right\} = \sum_{n=0}^N e^{in\pi/2} b_n H_n(u) \quad (20)$$

由式 (20) 可得, 多项式变换到厄米多项式, 其对应  $n$ -阶系数  $b_n$  变换到  $e^{in\pi/2} b_n$ . 结合式 (2), (3) 和 (20) 有

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \text{PHPT}\{\text{Re}(f(t))\}, H_0(u) \rangle \\ c_0 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \text{PHPT}\{\text{Im}(f(t))\}, H_0(u) \rangle \end{aligned} \quad (21)$$

其中  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示  $\langle g, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f(u) \cdot \exp(u^2/2) du$ . 则参数  $A$  和  $a_0$  可用 PHPT 算法估计:

$$\begin{cases} \hat{A} = \sqrt{b_0^2 + c_0^2} \\ \hat{a}_0 = \arctan(c_0/b_0) \end{cases} \quad (22)$$

其他相位参数  $a_p (p > 0)$  通过  $\hat{A}$  和  $\hat{a}_0$  估计得到:

$$b_p = \frac{1}{p! \sqrt{\pi}} \langle \text{PHPT}\left\{\frac{d^p}{dt^p} [\text{Re}(\varphi(t))]\right\}, H_0(u) \rangle \quad (23)$$

$$\hat{a}_p = -b_p/c_0 \quad (24)$$

其中  $\varphi(t) = f(t) - \hat{A} \cos(\sum_{n=0}^{p-1} \hat{a}_n t^n)$ . 整个算法的流程图如图 1 所示。

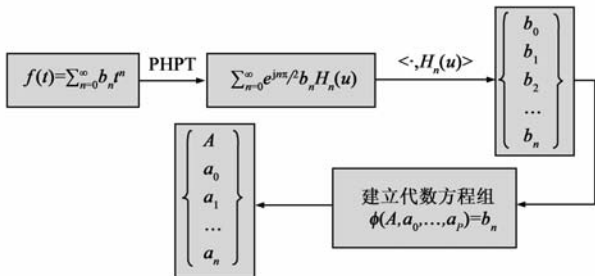


图1 PHPT估计算法流程图

### 4 仿真与结果讨论

在本节中, 我们给出单分量 5 阶 PPS 在高斯白噪声环境下的参数估计仿真实验. 对最低阶相位系数  $a_0$  的

估计性能与其他已有的典型算法以及 CRLB 进行对比. 在一般非线性算法中, 相位参数估计是从最高位开始的, 由于误差传递影响,  $a_0$  具有最差的估计性能. 而本文采用的算法则从最低位  $a_0$  开始, 因此能获得较好的  $a_0$  估计性能. 设信号幅度  $A = 1$ , 相位参数  $a_0 = \pi/6$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = 0$  和  $a_5 = 1/12$ , 即

$$f(t) = \exp(j\pi/6 + jt^2 - jt^5/12) + n(t), \quad t \in (-12.5\pi, 12.5\pi) \quad (25)$$

其中  $n(t)$  复高斯白噪声. 当  $\text{SNR} = 30\text{dB}$  时, 进行 100 次蒙特卡罗实验估计得到  $A$  和  $a_n (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$  估计值为:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= 1.00437705, & \hat{a}_0 &= 0.52331395, & \hat{a}_1 &= 0.00024647, \\ \hat{a}_2 &= 1.00530890, & \hat{a}_3 &= -0.0000936, & \hat{a}_4 &= -0.0013625, \\ \hat{a}_5 &= -0.08258423 \end{aligned} \quad (26)$$

图 2 给出了本文算法和已有典型算法对最低阶相位参数  $a_0$  估计的均方根误差 (RMSE) 比较。

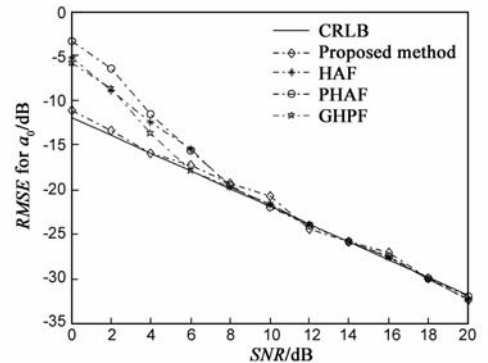


图2 参数  $a_0$  估计的 RMSE 比较

从图 2 中, 我们可以看到本文算法对  $a_0$  有较低的估计 RMSE 并靠近 CRLB<sup>[3]</sup>, 而 HAF 等其他算法则具有明显的信噪比门限 (大约 6–10 dB). 不同 SNR 下其他相位参数的 RMSE 如图 3 所示。

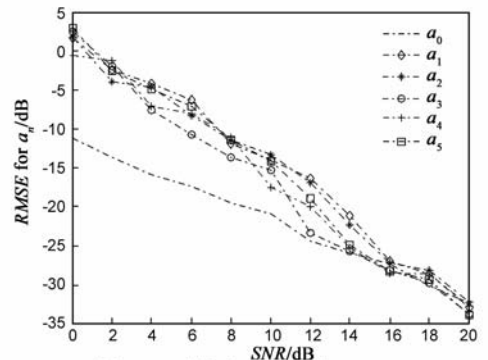


图3  $f(t)$  所有相位参数的 RMSE

由图 3 可以得到, 随着 SNR 增加, 所有参数的 RMSE 都靠近  $a_0$ , 因为高阶相位系数的估计需要参考低阶相位系数的估计值. 一般地, 本文算法的高阶相位系数估计性能不如 HPF、PHAF 等非线性算法. 但因为本文

算法为线性算法,且从低阶相位系数开始估计,因此最低阶相位系数的估计性能则明显优于非线性类算法,实际的应用中可采取本文算法与其他算法相结合的方法.另外 PHPT 的计算可采用三次 FFT 完成(其中卷积可采用两次 FFT 实现),不需要作峰值搜索,本文算法的总计算复杂度为  $O(3N\log_2 N)$ ,当待估 PPS 阶数  $P$  大于 3 时,优于其他非线性算法  $O(PN\log_2 N)$ .

## 5 结论

本文提出了一种基于 PHPT 的参数估计算法.该方法能快速有效地估计单分量高阶 PPS 的幅度与相位参数,并能对最低阶相位系数提供逼近克拉门罗下限的估计性能.事实上,本文提出的方法不仅局限于分析 PPS 信号,只要信号能进行泰勒展开分析,都可采用本文算法进行分析处理.

## 参考文献

- [1] T J Abatzoglou. Fast maximum likelihood joint estimation of frequency and frequency rate [J]. IEEE Trans, Aerosp Electron Syst, 1986, 22(11): 708 – 715.
- [2] J Angeby. Estimating signal parameters using the nonlinear instantaneous least squares approach [J]. IEEE Trans, Signal Process, 2000, 48(10): 2721 – 2732.
- [3] Shimon Peleg, Boaz Porat. The cramer-Rao lower bound for signals with constant amplitude and polynomial phase [J]. IEEE Trans, Signal Process, 1991, 39(3): 749 – 752.
- [4] Y Wu, HC So, H Liu. Subspace-based algorithm for parameter estimation of polynomial phase signals [J]. IEEE Trans, Signal Process, 2008, 56(10): 4977 – 4983.
- [5] S Peleg, B Friedlander. The discrete polynomial-phase transform [J]. IEEE Trans, Signal Process, 1995, 43(8): 1901 – 1914.
- [6] S Golden, B Friedlander. A modification of the discrete polynomial transform [J]. IEEE Trans, Signal Process, 1998, 46(5): 1452 – 1455, 1901 – 1914.
- [7] B Porat, B Friedlander. Asymptotic statistical analysis of the high-order ambiguity function for parameter estimation of polynomial phase signals [J]. IEEE Trans, Inf Theory, 1996, 42(3): 995 – 1001.
- [8] B Barkat, B Boashash. Design of higher order polynomial Wigner – Ville distributions [J]. IEEE Trans, Signal Process, 1999, 47(9): 2608 – 2611.
- [9] S Barbarossa, A Scaglione, G B Giannakis. Product high-order ambiguity function for multicomponent polynomial-phase signal modeling [J]. IEEE Trans, Signal Process, 1998, 46(3): 691 – 708.
- [10] B Porat. Digital Processing of Random Signals: Theory and Methods. Englewood Cliffs [M]. NJ: Prentice-Hall, 1994.
- [11] B Boashash, P O' Shea. Polynomial Wigner – Ville distributions and their relationship to time-varying higher order spectra [J]. IEEE Trans, Signal Process, 1995, 42(1): 216 – 220.
- [12] M Benidir, A Ouldali. Polynomial phase signal analysis based on the polynomial derivatives decomposition [J]. IEEE Trans, Signal Process, 1999, 47(7): 1954 – 1965.
- [13] 刘庆云, 张汗灵, 梁红. 多分量多项式相位信号瞬时频率变化率的估计 [J]. 电子学报, 2005, 33(10): 1890 – 1892. Liu Qing-Yun, Zhang Han-Ling, Liang Hong. Estimation of instantaneous frequency rate for multicomponent polynomial phase signals [J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(10): 1890 – 1892. (in Chinese)
- [14] P Wang, I Djurovic, J Yang. Generalized high-order phase function for parameter estimation of polynomial phase signal [J]. IEEE Trans, Signal Process, 2008, 54(7): 3023 – 3028.
- [15] 王勇, 姜义成. 多项式相位信号瞬时频率变化率估计及其应用 [J]. 电子学报, 2007, 35(12): 2403 – 2407. Wang Yong, Jiang Yi-cheng. Estimation of instantaneous frequency rate for polynomial phase signal and its application [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(12): 2403 – 2407. (in Chinese)
- [16] 杜东平, 唐斌, 孙闽红. 基于 ERWT 的 NLFM 信号检测及参数估计 [J]. 电子学报, 2007, 35(12): 2367 – 2370. Du Dong-ping, Tang Bin, Sun Ming-hong. NLFM signal detection and parameter estimation based on ERWT [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(12): 2367 – 2370. (in Chinese)
- [17] 刘庆云, 李志舜, 李海英, 梁红. 多分量多项式相位信号的参量估计 [J]. 电子学报, 2004, 12(32): 2302 – 2305. Liu Qing-yun, Li Zhi-shun, Li Hai-ying, Liang Hong. Parameter estimation of multicomponent polynomial phase signals [J]. Acta Electronica sinica, 2004, 12(32): 2302 – 2305. (in Chinese)

## 作者简介



张希会 男, 1979 年 6 月出生于四川荣县, 2007 年毕业于电子科技大学通信与信息工程学院, 获硕士学位. 现为电子科技大学通信与信息工程学院在读博士生, 从事积分变换、信号检测与参量估计方面的有关研究.  
E-mail: seaham\_yeah@163.com



刘镰琴 男, 副教授, 1955 年 9 月出生于四川成都. 1990 年于电子科技大学获硕士学位, 现在电子科技大学任教, 从事通信系统及信息处理方面研究. 曾获国家科技进步二等奖, 机电部科技进步二等奖, 四川省科技进步三等奖等奖项.  
E-mail: liliu@uestc.edu.cn