

基于偏心 Preissmann 格式的高速互连线分析

吉小鹏, 王执铨, 葛 龙

(南京理工大学自动化学院, 江苏南京 210094)

摘 要: 将偏心 Preissmann 格式应用于高速电路互连线分析, 导出一种互连线离散模型. 通过调整偏心参数, 可以获得二阶精度的差分格式. 数值仿真表明, 该方法能够应用于一般互连线的瞬态分析, 改善间断之后的数值扰动现象, 并与特征法进行了比较, 说明了方法的有效性.

关键词: 偏心 Preissmann 格式; 高速互连线; 超大规模集成电路; 数值计算

中图分类号: TN405.97 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 05-0914-05

Eccentric Preissmann Scheme Based Analysis of High-Speed Interconnects

JI Xiaopeng, WANG Zhiqian, GE Long

(College of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China)

Abstract: Eccentric Preissmann Scheme (EPS) is introduced to the analysis of high speed interconnect lines, and a discrete model of interconnect lines is derived. An efficient difference scheme with second order accuracy is obtained by adjusting the eccentric parameters. Compared to the method of characteristics (MOC), EPS can be applied to the transient analysis of general interconnect lines, and it can efficiently improve the numerical oscillation phenomena after the discontinuity.

Key words: eccentric Preissmann scheme; high speed interconnect; very large scale integration; numerical computation

1 引言

随着超大规模集成电路各代工艺中器件尺寸的不断缩小和工作频率的不断提高, 互连线迅速控制了时序、等比功耗、噪声和设计的可用性和可靠性, 成为影响电路系统性能的主导因素^[1]. 互连线本质上是分布性质的, 当器件的物理尺寸和信号的波长可比拟的时候, 集总阻抗模型就不能满足实际设计和优化的需要, 此时就必须用分布参数电路元件对其进行较为精确的建模.

目前广泛使用的分布模型是传输线模型, 其数学描述为电报方程. 电报方程是一组偏微分方程, 加上各种复杂的初边值条件, 一般难以获得解析解, 这给互连线的分析带来了极大的困难. 国内外的专家学者对此做了大量的工作, 提出了许多近似分析的方法^[2~10]. 这些方法的基本思想是将原分布参数系统, 通过离散化的方法, 转化为集总参数系统来处理. 其中比较典型的方法是时间和空间同时离散化, 转化为一组代数方程, 如有限差分方法^[7,8]. 这类方法简单直观, 易于编程进行数值计算; 缺点是需要耗用较多的计算机内存和计算时间, 但是随着计算机性能的不断改进、分布式和并行计算技术的发展,

这个缺点逐渐被掩盖了. 同时人们不断对差分格式进行研究, 希望能够提高计算的精度和效率.

电报方程是双曲型偏微分方程组, 常用的数值求解方法是差分法. 特征法^[3~6]是其中一种用来求解互连线问题的传统方法, 通过变量代换, 沿着特征线将原偏微分方程组化为常微分方程组, 然后按照特征线确定的空间和时间步长的关系进行离散求解. 该方法涉及特征线的计算, 并且时空离散步长必须满足确定的关系, 使用不便. 文献[9]研究了电报方程的时空离散方法, 并用 Lax-Friedrichs 差分格式分析互连线的瞬态行为, 但是它在分析阶跃信号时存在间断的过渡区过宽的问题. 文献[10]采用了二阶精度的 Lax-Wendroff 差分格式, 提高了求解的精度, 解决了过渡区过宽的问题. 但是该差分格式存在间断过后出现振荡的问题, 不利于互连线上升时间的估计. 另外, Lax-Wendroff 格式是显示格式, 求解时涉及到两层四点的计算值, 计算量较大.

本文研究了电报方程的时空离散方法, 给出了基于偏心 Preissmann 格式的离散方案, 改善了间断振荡, 并且具有较高的数值稳定性. 分析表明, 与 Lax-Wendroff 格式相比, 计算量明显减小; 与传统的特征法相比, 计算时

间和存储量相当,但不需要计算特征线,更易于编程实现.最后通过两个数值实验与特征法进行比较,说明该方法的有效性.

2 偏心 Preissmann 格式

Preissmann 于 1961 年提出了一个取时间加权和空间平均的四点差分格式——经典的 Preissmann 格式.经典的 Preissmann 格式在定床水流模型中得到广泛的应用,但是存在数值振荡的问题.为了解决间断后的数值振荡问题,偏心 Preissmann 格式 (Eccentric Preissmann Scheme, EPS)^[14] 应运而生.这是一个在时间和空间上都分别加权的差分格式.对于任意连续函数,

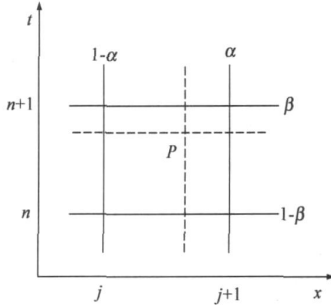


图 1 EPS 网格

可以用 EPS 差分逼近为如下格式(网格如图 1 所示):

$$u = \alpha [u_{j+1}^{n+1} + (1-\beta)u_{j+1}^n] + (1-\alpha)[\beta u_{j+1}^{n+1} + (1-\beta)u_j^n] \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) + (1-\alpha)(u_j^{n+1} - u_j^n)}{\tau} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\beta(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) + (1-\beta)(u_{j+1}^n - u_j^n)}{h} \quad (1c)$$

式(1)中 τ 和 h 分别为时间和空间步长, α, β 为偏心加权参数.

3 偏心 Preissmann 格式应用分析

考虑如下形式的线性偏微分方程:

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + bu = 0, (a \neq 0, b \neq 0) \quad (2)$$

其 EPS 逼近为如下形式:

$$[\alpha(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) + (1-\alpha)(u_j^{n+1} - u_j^n)] + \alpha\tau[\beta(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) + (1-\beta)(u_{j+1}^n - u_j^n)] + b\tau[\alpha\beta u_{j+1}^{n+1} + (1-\beta)u_{j+1}^n + (1-\alpha)[\beta u_j^{n+1} + (1-\beta)u_j^n]] = 0 \quad (3)$$

其中 $\gamma = \frac{\tau}{h}$.

下面对 EPS 逼近式(2)的精度和稳定性问题进行分析.

结合式(2),将式(3)在点 (x_j, t_{n+1}) 处 Taylor 展开可得:

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + \frac{1}{2}\{a^2[(1-2\alpha) + \gamma a[(1-2\beta)]]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\gamma ab(1-2\beta)\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma b^2(1-2\beta)u\}h + \frac{1}{6}\{[a(1-3\alpha) + 3a^2\gamma(1-\alpha-\beta) + \gamma^2 a^3(2-3\beta)]\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} +$$

$$3ab[\gamma(1-\beta-2\alpha\beta) + \gamma^2 a(2-3\beta)]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3b^2[\gamma a(1-2\beta) + \gamma^2 a(2-3\beta)]\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma^2 b^3(2-3\beta)u\}h^2 + \dots \quad (4)$$

由式(4)显然可见:当 $\alpha \neq \frac{1}{2}$ 和 $\beta \neq \frac{1}{2}$ 时,该格式具有一阶精度;当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 且 $\beta = \frac{1}{2}$ 时,该格式具有二阶精度;如果能够适当的选取 γ ,还可以具有更高精度.

分析采用 EPS 求解式(2)的稳定性问题,只需考虑相应的齐次方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

采用 Fourier 分析法^[12, 13],可以求得稳定性条件为^[14]:

$$\alpha - \frac{1}{2} + (\beta - \frac{1}{2}) \geq 0 \quad (5)$$

式中 Cr 为柯朗数.

由式(5)可见,只要偏心参数调整合适,若取 $\alpha \geq \frac{1}{2}$, $\beta \geq \frac{1}{2}$,则只要求 $Cr > 0$ 就能保证其数值稳定性.这使得进行数值仿真时,对时间和空间步长的选择更为灵活.

4 基于偏心 Preissmann 格式的互连线离散模型

本节基于偏心 Preissmann 格式,导出一种互连线的离散模型.首先给出描述互连线的一般数学模型——电报方程:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -R(x)I(x, t) - L(x)\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \quad (6a)$$

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -G(x)V(x, t) - C(x)\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \quad (6b)$$

$$x \in (0, D), t \in \mathbb{R}^+$$

边界条件为:

$$f(V(0, t), I(0, t), e(t)) = 0 \quad (6c)$$

$$g(V(D, t), I(D, t), e(t)) = 0 \quad (6d)$$

式中 $V(x, t)$ 和 $I(x, t)$ 分别表示沿线的瞬态电压和电流值,为了行文方便,在不引起误解的情况下简写为 V 和 I . D 表示互连线的长度; $R(x)$ 为互连线的分布电阻; $L(x)$ 为互连线的分布电感; $C(x)$ 为互连线的分布电容; $G(x)$ 为互连线的分布电导.对于均匀互连线的情况, $R(x)$ 、 $L(x)$ 、 $C(x)$ 和 $G(x)$ 均为常数,可直接表示成 R 、 L 、 C 和 G . $f(\cdot, \cdot)$ 和 $g(\cdot, \cdot)$ 为互连线端点的电压、电流值必须强制满足的函数关系, $e(t)$ 为外加激励源矢量.

为了将 EPS 差分格式应用于互连线分析,将上述电

报方程写成如下形式:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + M \frac{\partial U}{\partial x} + NU = 0 \quad (7)$$

式中 $U = \begin{bmatrix} I \\ V \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$, E 为适当维数的单位矩阵.

将式(7)按 EPS 差分成如下形式:

$$\begin{aligned} & [\alpha(U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}) + (1-\alpha)(U_j^{n+1} - U_j^n)] + \gamma M [\beta(U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}) + (1-\beta)(U_j^{n+1} - U_j^n)] + \gamma N [\alpha(U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}) + (1-\alpha)(U_j^{n+1} - U_j^n)] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $U_j^n = U(jh, n\tau)$, $\gamma = \frac{\tau}{h}$, τ 和 h 分别为离散的时间和空间步长.

整理式(8)成如下形式:

$$AU_j^{n+1} + BU_{j+1}^{n+1} = CU_j^n + DU_{j+1}^n \quad (9)$$

其中: $A = (1-\alpha)(I + \gamma N) - \gamma \beta M$

$$B = \alpha(I + \gamma N) + \gamma \beta M$$

$$C = (1-\alpha)[I - \gamma(1-\beta)N] + \gamma(1-\beta)M$$

$$D = \alpha[I - \gamma(1-\beta)N] - \gamma(1-\beta)M$$

I 为适当维数的单位矩阵.

假设传输线分为 K 等分, 各分点值依次表示为:

$U_0, U_1, U_2, \dots, U_{k-1}, U_k$, 共有 $k+1$ 个待求未知量. 当从 n 时间层推进到 $n+1$ 层时, 其关系如下:

$$AU_j^{n+1} + BU_{j+1}^{n+1} = CU_j^n + DU_{j+1}^n, j = 0, 1, 2, \dots, k-1 \quad (10)$$

这样可以得到 k 个方程, 由边界条件还可以得到另外的一个方程. $k+1$ 个方程联立成方程组, 则得到基于 EPS 格式的互连线差分模型.

从差分形式来看, 该模型是一个涉及两点双层的隐式格式, 计算过程简单, 计算量明显小于 Lax-Wendroff 格式的两层四点形式. 求解该方程组, 则可以得到 $n+1$ 时间层上所有分点的值. 由于所得到的方程组的系数矩阵呈带状, 具有稀疏特征, 采用稀疏矩阵表示技术, 那么存储容量大约是普通方法的 $1/N$ (N 为系数矩阵的规模). 对稀疏矩阵方程可以采用各种快速算法进行求解^[12, 13], 提高计算效率.

5 数值实验

本小节用两个例子来说明 EPS 在高速互连线分析中的应用, 并通过数值仿真, 与用传统的特征法计算得到的结果进行比较, 验证 EPS 方法处理问题的简便和有效性.

例 1^[15] 单根有损耗传输线, 长度 $l = 0.2$ m, 电路连接情况如图 2 所示:

其分布参数为:

$$L = 500 \text{ nH/m}, C = 200 \text{ pF/m}$$

$$R = 100 \Omega/\text{m}, G = 0$$

传输线以梯形电压激励, 其上升和下降时间均为 1.0 ns , 顶部持续时间为 2.0 ns , 幅度为 1 V , 激励端和电压源串联的内阻以及负载端电阻均为 50Ω .

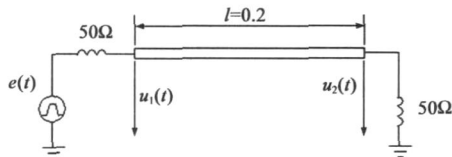


图 2 单根有耗互连传输线电路

按前面描述的 EPS 方法, 用 Matlab 编程可以计算出互连线两端的电压波形如图 3 所示. 图中实线为用 EPS 方法算得的结果, 点划线为用传统的特征法(MOC)计算所得结果, 划线为软件 HSPICE 仿真所得结果. 图中三种方法所得曲线差别几乎不可分辨. 在电压曲线 $u_2(t)$ 上随机地选取 250 个时间点上的数据进行统计分析, EPS 与 MOC 所得结果的平均相对偏差为 0.0014 , 说明 EPS 所得结果具有较高的准确性. 此外, EPS 和 MOC 两种方法都将互连线均匀离散成 50 段, 但是 EPS 方法不需要考虑特征线问题, 因而使用起来更为灵活.

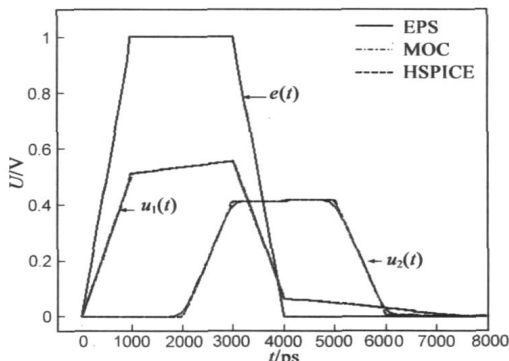


图 3 互连线两端电压波形

例 2^[15] 三根相互耦合的互连线段, 其长度 $l = 14 \text{ cm}$, 其激励端和负载端的端接情况如图 4 所示:

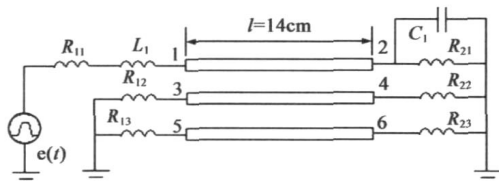


图 4 耦合三导体互连传输线电路

传输线的分布参数矩阵为:

$$L = \begin{bmatrix} 300 & 100 & 50 \\ 100 & 400 & 100 \\ 50 & 100 & 300 \end{bmatrix} \text{ nH/m}$$

$$C = \begin{bmatrix} 44 & -10 & -4 \\ -10 & 35 & -10 \\ -4 & -10 & 44 \end{bmatrix} * \frac{100}{24} \text{ pF/m}$$

$$R = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 10 & 50 & 10 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix} \Omega/\text{m} \quad G = 0$$

其余为:

$$R_{11} = R_{13} = 35.35\Omega, R_{12} = 28.2\Omega, R_{21} = 10\Omega$$

$$R_{22} = 70\Omega, R_{23} = 30\Omega, L_1 = 10\text{nH}, C_1 = 1\text{pF}$$

激励电压为梯形波, 幅度为 1V, 上升和下降时间各为 1.5ns, 顶部持续时间为 4.5ns.

如图 5 所示, 实线为用 EPS 方法计算所得的结果, 点划线为 MOC 方法计算所得结果, 划线为软件 HSPICE 仿真所得结果. 由图可见, 三种方法所得曲线吻合得很好. 在电压曲线 $u_1(t)$, $u_4(t)$ 和 $u_6(t)$ 上分别随机地选取 250 个时间点上的数据进行统计分析, 图(a), (b), (c) 中 EPS 与 MOC 所得结果的平均相对偏差分别为 0.0040, 0.0011, 3.4269×10^{-4} , 验证了 EPS 方法的有效性.

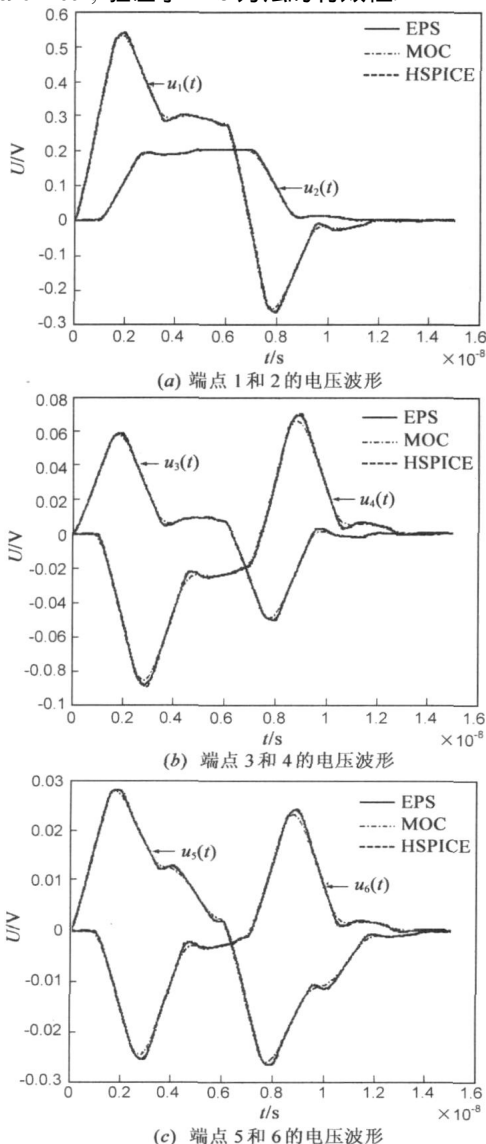


图 5 耦合三导体传输线两端电压波形

特征法对于耦合多导体的情况, 一般采取特征模变换的方法来实现解耦, 即将方程组系数矩阵对角化, 将多导体转化成单根线的情况, 对每个特征模用单线 MOC 来处理, 然后反变换为实际电压电流, 再结合边界条件求得真实解. 但是对于有耗多导体情况, 只有少数特殊形式的系数矩阵能够实现同时对角化, 如 Toeplitz 阵^[15]. EPS 方法对于这样的情况则无需作特殊处理, 求解的方法与单根线的情况相同, 具有很强的通用性.

6 结论

本文对电报方程采取了基于偏心 Preissmann 格式的时空离散方法, 求解了单根互连线和耦合多导体互连线问题. 理论分析显示, 适当选取偏心加权参数, 可以获得至少二阶精度的差分离散方法. 这种方法不需要考虑特征线问题, 对单根线和耦合线的处理方法相同, 具有较强的通用性, 并且对时间和空间步长的选择也较为灵活. 数值仿真表明, 该方法计算简单, 数值稳定, 具有较高的效率和计算精度, 可用于一般非频变互连线的瞬态分析. 由于文中方法是一种时域数值方法, 处理含频变参数的互连线时较为困难, 这也是今后值得进一步研究的方向.

参考文献:

- [1] D A Hodges, H G Jackson, R A Saleh. Analysis and Design of Digital Integrated Circuits: in Deep Submicron Technology [M]. Third Edition. Hightstown, NJ: McGraw-Hill Companies, Inc, 2004.
- [2] J R Griffith, M S Nakhla. Time domain analysis of lossy coupled transmission lines[J]. IEEE Trans on MTT, 1990, 38(10): 1480-1487.
- [3] E S Kuh, J F Mao, J M Wang. Interconnect simulation based on passivity and method of characteristics[A]. Proc IEEE Pacific & ASIAN Conf on CAS[C]. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1996. 449-457.
- [4] Q Xu, Z F Li, P Mazumder, J F Mao. Time domain modeling of high speed interconnects by modified method of characteristics[J]. IEEE Trans Microwave Theory and Tech, 2000, 48(2): 323-327.
- [5] A R Djordjevic, T K Sarker, R F Harrington. Time domain response of multi conductor transmission lines[A]. Proc of the IEEE[C]. Piscataway, NJ: IEEE, 1987, 75(6): 743-764.
- [6] F Y Chang. The generalized method of characteristics for waveform relaxation analysis of lossy coupled transmission lines[J]. IEEE Trans on MTT, 1989, 37(12): 2028-2038.
- [7] Z Y Yuan, Z F Li. Frequency dependent parameters calculation of on-chip interconnection lines by FDTD method[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 1999, 21(5): 357-

359.

- [8] 褚庆昕. 基于 FDTD 模拟综合 VLSI 互连线的时域特征模型[J]. 电子学报, 1998, 26(9): 7- 10.
- Q X Chu. Time domain characteristic model synthesis of interconnects in VLSI from FDTD simulation[J]. Acta Electronica Sinica, 1998, 26(9): 7- 10. (in Chinese)
- [9] 郭裕顺. 传输线瞬态分析中基于电报方程时空离散的有效分析方法[J]. 电子学报, 2001, 29(3): 373- 377.
- Y S Guo. An efficient transient analysis method for general transmission lines based on the time space discretization of telegrapher equations[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(3): 373- 377. (in Chinese)
- [10] 窦磊, 王执铨. Lax Wendroff 差分法在高速互连线分析中的应用[J]. 信息与控制, 2005, 34(6): 724- 728.
- L Dou, Z Q Wang. Application of Lax Wendroff difference method to the analysis of high speed interconnect transmission lines[J]. Information and Control, 2005, 34(6): 724- 728. (in Chinese)
- [11] 袁正宇, 李征帆. NILT 法分析高速集成电路芯片内频变互连线的瞬态响应[J]. 电路与系统学报, 1999, 4(4): 57- 61.

Z Y Yuan, Z F Li. Application of NILT method to the transient simulation of frequency dependent on chip interconnects in high speed IC[J]. Journal of Circuits and Systems, 1999, 4(4): 57- 61. (in Chinese)

- [12] K W Morton, D F Mayers. Numerical Solution of Partial Differential Equations[M]. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [13] D Kincaid, W Cheney. Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing[M]. Third Edition. Stamford, CT: Thomson Learning, 2002.
- [14] 杨国录. 四点时空偏心 Preissmann 格式的应用问题[J]. 泥沙研究, 1991, 12(4): 88- 98.
- G L Yang. Application of four-point eccentric Preissmann scheme[J]. Journal of Sediment Research, 1991, 12(4): 88- 98. (in Chinese)
- [15] 李征帆, 毛军发. 微波与高速电路理论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2001.
- Z F Li, J F Mao. Theory of Microwave and High Speed Circuit[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2001. (in Chinese)

作者简介:



吉小鹏 男, 1983 年 1 月出生于江苏省海安县, 博士研究生, 2005 年 7 月获南京理工大学电子信息工程专业学士学位. 主要研究方向为分布参数系统理论及其应用、VLSI 中的信号完整性分析等. E-mail: xpeng_ji@yahoo.com.cn



王执铨 男, 1939 年 1 月出生于湖北省武汉市, 教授, 博士生导师. 研究领域为复杂系统建模、动态大系统故障诊断与容错控制等.