一种基于互相关处理的极点提取新算法

王党卫, 粟 毅, 马兴义
(国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

摘 要: 针对传统极点提取算法在低信噪比时估计性能严重退化的缺点, 该文从理论上推导了指数衰减正弦和信号在互相关处理后仍可表示为指数衰减正弦和信号的条件, 定义了一种新的信号互相关函数估计方法, 在此基础上提出了使用互相关消噪作为预处理的信号极点提取新方法. 仿真实验表明, 在相同精度的条件下文中提出的新方法较之改进 KT 法和基于四阶累量方法需要的信噪比降低了 5dB.

关键词: 指数衰减正弦; 互相关估计; 极点提取
中图分类号: TN911.23 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2005) 06-1015-04

A New Method of Pole Extraction Using the Cross-Correlation-Based Processing

WANG Dang-wei, SU Yi, MA Xing-yi
(*School of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China*)

Abstract: In order to improve the estimation accuracy of the pole in low signal-noise-ratio, it is theoretically analyzed that the signals composed of the exponentially damped sinusoids can be still expressed as exponentially damped sinusoids after the cross-correlation. A new cross-correlation estimator is proposed, and then a novel method of the poles extraction based on the cross-correlation is given. The simulations show that in the same estimation accuracy SNR required by the novel method is 5dB lower than that of the modified Kumaresan-Tufts method or fourth-order cumulants based method.

Key words: exponentially damped sinusoids; cross-correlation estimator; poles extracting

1 引言

指数衰减正弦信号极点提取在雷达目标识别、核磁共振等领域有着广泛地应用, 一直是人们研究的热点[1,2]. 噪声污染条件下的指数衰减正弦信号极点提取问题是一个复杂的高维非线性问题, 信号的非平稳性增加了极点提取的难度. 目前文献中解决这一问题的方法大致可以分为非线性极点提取方法和基于模型的线性预测极点提取方法. 非线性极点提取算法主要有: E 脉冲方法[3]和最大似然估计及改进的快速最大似然参数估计方法[2], 基于模型的线性预测极点提取算法主要包括: Prony 法和全局最小二乘 Prony 法[4]、反传线性预测法(KT 法)[5]、广义矩阵束法(GPoF)[6]以及上述算法的改进算法[7,8]等. 尽管上述众多方法对信号极点参数的估计进行了大量卓有成效的工作, 但仍然存在着许多不足, 如 E 脉冲方法和非线性最小二乘法仅在较高信噪比条件能够获得精确的极点估值; 最大似然估计极点提取方法需要在高维空间中搜索, 运算量太大, 同时需要解决局部最小问题; 基于模型的线性预测极点提取方法虽然通过把信号极点提取问题转化为线性系统模型的参数估计问题, 利用奇异值分解, 能够在中等信噪比时达到克拉米罗限, 但在较低信噪比、大衰减因子时, 由于数据矩阵的高度病态性, 极点参数的估计性能均会严重退化. 近来基于四阶累计量的处理方法[8]为低信噪比条件下信号极点的提取带来了希望, 然而信号与噪声之间严重的交叉项制约了低信噪比时极点估计的精度.

为了进一步改善低信噪比条件下指数衰减和信号极点提取的精度, 本文利用不同时刻系统测量噪声独立同分布, 其互相关函数为零这一特性, 着重研究了指数衰减和信号互相关函数的特性, 从理论上推导了衰减指数和信号互相关处理后信号交叉项不产生新频率分量的条件, 给出了一种新的信号互相关函数估计方法, 在此基础上提出了基于互相关处理的目标极点提取新方法. 仿真试验表明本文提出的方法较之改进的 KT 法[7]和基于四阶累量的极点提取方法(FOC 法)[8]相同精度需要的信噪比降低了 5dB.

2 有限长序列互相关函数特性分析

通常指数衰减正弦和信号模型可以表示为:

$$x(n) = \sum_{i=1}^{M} a_i e^{s_i n},\ n \geqslant 0 \tag{1}$$

其中复幅度 $a_i = A_i e^{\phi_i}$(ϕ_i 为各信号的相位), $i = 1, 2, \cdots, M$, 信号的复频率 $s_i = -\sigma_i + j2\pi f_i$, $i = 1, 2, \cdots M$, σ_i 为衰减因

收稿日期: 2004-04-10; 修回日期: 2005-01-16

子,f_i 是极点频率. 这里极点频率和衰减因子是需要估计的参数. 假设现得到两个不同时刻的采样序列, 分别表示为:

$$x(n)=\sum_{i=1}^{M}a_i e^{s_i n},\ n\geqslant 0 \tag{2}$$

$$y(m)=\sum_{j=1}^{M}b_j e^{s_j m},\ m\geqslant 0 \tag{3}$$

其中 $a_i=A_i e^{\phi_i}$, $b_j=B_j e^{\theta_j}$. 下面分两种情况讨论无噪声污染时 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的互相关函数.

2.1 无限长数据序列互相关函数特性

设无限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 分别满足式(1)的模型, 则其互相关函数可表示为:

$$r_{xy}(\tau)=\sum_{n=n_0}^{+\infty}x(n)y^*(n+\tau),\ \tau=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{4}$$

其中 $n_0=\max\{0,-\tau\}$

结合式(1)和(4)可得:

$$\begin{aligned}r_{xy}(\tau)&=\sum_{n=n_0}^{+\infty}x(n)y^*(n+\tau)\\&=\sum_{n=n_0}^{+\infty}\Big[\sum_{i=1}^{M}a_i e^{s_i n}\Big]\Big[\sum_{j=1}^{M}b_j e^{s_j(n+\tau)}\Big]^*\\&=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}a_i b_j^* e^{s_j^*\tau}\frac{e^{(s_i+s_j^*)n_0}}{1-e^{(s_i+s_j^*)}}\end{aligned} \tag{5}$$

当 $\tau<0$

$$r_{xy}(\tau)=\sum_{i=1}^{M}\alpha_i e^{-s_i\tau} \tag{6}$$

其中 $\alpha_i=a_i\sum_{j=1}^{M}\frac{b_j^*}{1-e^{(s_i+s_j^*)}}$

当 $\tau\geqslant 0$, $$r_{xy}(\tau)=\sum_{j=1}^{M}\beta_j e^{s_j^*\tau} \tag{7}$$

其中 $\beta_j=b_j^*\sum_{i=1}^{M}\frac{a_i}{1-e^{(s_i+s_j^*)}}$

可见当 τ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时, $x(n)$ 和 $y(n)$ 的互相关函数总可以表示为指数衰减正弦模型, 且保留原始信号的极点信息.

2.2 有限长数据序列互相关函数特性

上节我们讨论了无限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 互相关函数的特性, 下面利用上述研究方法来分析有限长序列互相关函数的特性.

对于序列 $\{x(n)\}$, $n=0,1,2,\cdots N_1-1$ 和 $\{y(m)\}$, $m=0,1,2,\cdots N_2-1$, 最为常用的一种互相关函数估计表达式如下[9]:

$$r_{xy}(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{n=S_1}^{S_2}x(n)y^*(n+\tau),\ |\tau|\leqslant N-1 \tag{8}$$

其中 $N=\min(N_1,N_2)$, $S_1=\max\{0,-\tau\}$, $S_2=\min\{N-1-\tau,N-1+\tau\}$. 把式(1)代入式(8)可得:

$$r_{xy}(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}a_i b_j^* e^{s_j^*\tau}\cdot\frac{e^{(s_i+s_j^*)S_1}[1-e^{(s_i+s_j^*)(S_2-S_1+1)}]}{1-e^{(s_i+s_j^*)}} \tag{9}$$

可见, 在当 $\tau<0$ 和 $\tau\geqslant 0$ 当两种情况下, S_2-S_1+1 都是 τ 的函数, 各信号之间的交叉项产生了新的极点分量. 为了消除有限长序列互相关函数 $r_{xy}(\tau)$ 中产生的新极点分量, 则必须使得 S_2-S_1+1 与 τ 无关, 即等于常数. 下面给出一种新的有限长序列互相关估计方法:

$$\hat{r}_{xy}(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{n=Z_1}^{Z_2}x(n)y^*(n+\tau),\ |\tau|\leqslant\tau_{\max} \tag{10}$$

其中 $N=\min(N_1,N_2)$, $Z_1=\max\{0,-\tau\}$, $Z_2=\min\{N-1-\tau_{\max},N-1+\tau_{\max}-\tau\}$ 则在这种新的互相关定义下, 对于 $\tau\geqslant 0$, 式(9)可表示为

$$\begin{aligned}\hat{r}_{xy}(\tau)&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}a_i b_j^* e^{s_j^*\tau}\frac{[1-e^{(s_i+s_j^*)(N-\tau_{\max})}]}{1-e^{(s_i+s_j^*)}}\\&=\sum_{j=1}^{M}\beta_j e^{s_j^*\tau}\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\beta_j=b_j^*\sum_{j=1}^{M}\frac{a_i[1-e^{(S_i+S_j^*)(N-\tau_{\max})}]}{1-e^{(S_i+S_j^*)}}$, 即可以表示为指数衰减正弦之和. 显然, 自相关函数包含的极点为原信号极点的复共轭, 各信号之间交叉项不会产生的新极点分量.

3 基于观测信号互相关序列的信号极点提取新方法

在实际应用当中, 观测信号不可避免地会受到噪声的污染. 假设得到某含有 M 个指数衰减正弦信号过程两个不同时刻观测样本, 样本长度分别为 N_1 和 N_2, 则可分别表示为

$$x'(n)=x(n)+v(n)=\sum_{i=1}^{M}a_i e^{s_i n}+v(n),\quad n=0,1,2,\cdots N_1-1 \tag{12}$$

$$y'(m)=y(m)+w(m)=\sum_{j=1}^{M}b_j e^{s_j m}+w(m),\quad m=0,1,2,\cdots N_2-1 \tag{13}$$

其中 $a_i=A_i e^{\phi_i}$, $b_j=B_j e^{\theta_j}$, $v(n)$ 和 $w(m)$ 是相互独立的测量噪声, 其相关函数为零.

则从式(10)可得

$$\begin{aligned}\hat{r}_{x'y'}(\tau)&=\hat{r}_{xy}(\tau)+\frac{1}{N}\sum_{n=Z_1}^{Z_2}x(n)w^*(n+\tau)\\&\quad+\frac{1}{N}\sum_{n=Z_1}^{Z_2}v(n)y^*(n+\tau)+\hat{r}_{vw}(\tau)\\&=\hat{r}_{xy}(\tau)+\mu(\tau),\ 0\leqslant\tau\leqslant\tau_{\max}\end{aligned} \tag{14}$$

其中

$\mu(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{n=Z_1}^{Z_2}x(n)w^*(n+\tau)+\frac{1}{N}\sum_{n=Z_1}^{Z_2}v(n)y^*(n+\tau)$ 为信号与噪声的交叉项.

从前面的推导可知, 经过互相关处理以后, 信号中的噪声已经被有效地抑制, 信号与噪声的交叉项期望 $E[\mu(\tau)]=0$, 即 $\hat{r}_{x'y'}(\tau)$ 是 $r_{x'y'}(\tau)$ 的无偏估计, 同时 $\hat{r}_{x'y'}(\tau)$ 保留了原信号的极点信息, 并可以用指数衰减正弦之和来表示. 下面我们提出一种基于观测信号互相关序列的信号极点提取新方法, 该方法首先求解两个不同时刻采样序列的互相关序列,

然后使用 KT 法[5] 从信号的互相关序列中提取信号极点, 具体提取算法如下:

(1) 用式(10) 计算不同时刻受噪声污染序列 $\{x'(n)\}$, $n=0,1,2,\cdots N_1-1$ 和 $\{y'(m)\}$, $m=0,1,2,\cdots N_2-1$ 的互相关序列 $\hat{r}_{x'y'}(\tau)$;

(2) 给定模型阶数 L (判阶方法可参阅文献[10]), 使用互相关估计值 $\hat{r}_{x'y'}(\tau)$ 构造下面线性方程组

$$\begin{bmatrix} r_{x'y'}(1) & r_{x'y'}(2) & \cdots & r_{x'y'}(L) \\ r_{x'y'}(2) & r_{x'y'}(3) & \cdots & r_{x'y'}(L+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{x'y'}(\tau_{\max}-L) & r_{x'y'}(\tau_{\max}-L+1) & \cdots & r_{x'y'}(\tau_{\max}-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b(1) \\ b(2) \\ \vdots \\ b(L) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \hat{r}_{x'y'}(0) \\ \hat{r}_{x'y'}(1) \\ \vdots \\ \hat{r}_{x'y'}(\tau_{\max}-L-1) \end{bmatrix}$$

(3) 按照 KT 法使用奇异值分解, 求解模型系数 b_i, $i=1,2,\cdots L$, 然后解下面方程程求其根 z_i, $i=1,2,\cdots L$

$$B(z)=1+b(1)z^{-1}+b(2)z^{-2}+\cdots+b(L)z^{-L}=0 \quad (15)$$

(4) 通过下式求信号极点

$s_i=-\operatorname{conj}\left(\frac{1}{\Delta t}\ln(z_i)\right)$, $i=1,2,\cdots L$, Δt 为采样时间间隔.

4　仿真实验及结果分析

4.1　计算机仿真实验

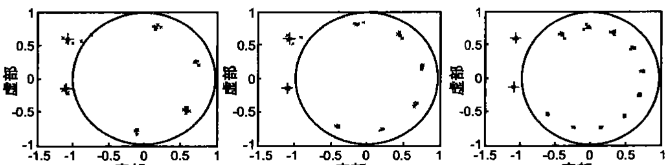
为了验证以上分析和本文提出方法的性能, 下面使用计算机模拟某过程两个不同时刻的观测数据, 我们采用文献[5]、[8] 中的信号模型:

$$y(n)=\sum_{k=1}^{M}c_k e^{s_k n+\phi_k}+e(n),\ n=0,1,\cdots,N-1$$

其中 $M=2$, 极点分别为 $s_1=-0.1+j2\pi^*0.52$, $s_2=-0.2+j2\pi^*0.42$, $C_1=C_2=1$, $e(n)$ 是均值为零的复高斯白噪声, 给定信噪比, 方差可由下式计算得到 $\mathrm{SNR}=10\log10\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)$.

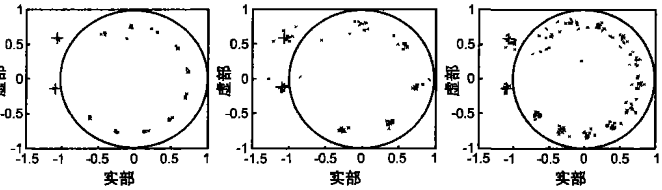
下面使用上面的数据模型产生两种样本序列, 其中样本一两个极点的相位同为 0^0 (与文献中相同), 样本二极点的相位分别为 $[0,2\pi]$ 上均分分布的随机变量. 信号中极点个数(或模型阶数 L) 的判定可参阅文献[10], 本文假定极点个数判断正确, 通过蒙特卡洛实验首先研究了 $\tau_{\max}$ 取值对本文方法性能的影响, 然后对比了本文新方法、改进 KT 法及 FOC 法的性能.

实验 1: SNR = 50 dB 时, $N=50$, $\tau_{\max}$ 取不同值时本文新方法求解式(15) 的零点分布图, 结果见图 1(a)、(b)、(c), 其中对给定的信噪比分别进行 10 次蒙特卡洛实验, "+" 为真实零点位置, "*" 为解得根的位置.



(a) $\tau_{\max}=12, L=6$ 时本文新方法求取零点分布图　(b) $\tau_{\max}=16, L=8$ 时本文新方法求取零点分布图　(b) $\tau_{\max}=24, L=12$ 时本文新方法求取零点分布图

图 1　$\tau_{\max}$ 取不同值时本文新方法求取零点分布图



(a) 本文新方法求取零点分布图 $N=50, \tau_{\max}=24, L=12$　(b) 改进 KT 法求取零点分布图 $N=25, L=12$　(c) FOC 法求取零点分布图 $N=50, L=12$

图 2　三种方法求取的零点分布图

实验 2: SNR = 10dB 时, 本文新方法、改进的 KT 法及 FOC 法求解的零点分布图, 结果见图 2(a)、(b)、(c), 其中对给定的信噪比分别进行 10 次蒙特卡洛实验, "+" 为真实零点位置, "*" 为解得根的位置.

实验 3: 不同信噪比时, 本文新方法、改进的 KT 法及 FOC 法极点估计性能对比, 结果见表 1~4 (对给定的信噪比分别进行 200 次蒙特卡洛实验).

表 1　极点 1 衰减因子的平均相对误差

SNR(dB)	本文方法	改进 KT 法	FOC 法
30	2.9646E-5	2.0404E-3	1.417E-4
24	2.3296E-4	3.3012E-3	4.2341E-4
20	6.9678E-4	4.8199E-3	3.5915E-3
14	2.1987E-3	4.8333E-3	1.476E-2
10	1.9273E-3	1.1151E-2	4.9066E-2
4	7.3642E-3	0.14211	0.65511

表 2　极点 1 频率的平均相对误差

SNR(dB)	本文方法	改进 KT 法	FOC 法
30	7.1303E-6	1.0104E-5	1.2959E-5
24	8.4811E-6	6.2449E-5	4.337E-5
20	2.1326E-5	1.4752E-4	1.0992E-4
14	6.7296E-5	1.4793E-4	4.5174E-4
10	1.5129E-4	3.413E-3	1.5017E-3
4	5.8987E-4	2.3184E-3	2.0051E-2

表 3　极点 2 衰减因子的平均相对误差

SNR(dB)	本文方法	改进 KT 法	FOC 法
30	1.6988E-3	1.7659E-3	9.2649E-4
24	2.074E-3	1.0228E-2	2.2318E-2
20	2.7593E-3	1.6318E-2	5.6388E-2
14	1.243E-2	8.0937E-2	0.24477
10	3.529E-2	0.38013	0.65358
4	0.1442	1.2591	1.4805

表 4　极点 2 频率的平均相对误差

SNR(dB)	本文方法	改进 KT 法	FOC 法
30	1.2875E-4	1.3383E-4	7.0217E-5
24	1.5718E-4	7.7518E-4	1.6915E-3
20	2.0912E-4	1.2367E-3	4.2735E-3
14	9.4206E-4	6.134E-3	1.855E-2
10	2.6746E-3	2.8809E-2	4.9533E-2
4	1.0928E-2	9.5423E-2	0.1122

4.2 结果分析

从上面实验一的结果可以看出, 本文提出方法的性能与 τ_{max}的取值有较大关系, 当 τ_{max}取值较小时, 求解的多项式(15)零点分布较为分散, 方差较大, 随着 τ_{max}值的增大, 由于求和范围增大, 互相关函数估计的精度增加, 互相关处理对噪声的平滑作用增强, 零点估计值分布的方差减小(见图1(a)、(b)、(c)), 因而通常要选择较大的 τ_{max}值. 同时由于本文新方法在极点提取之前利用互相关运算进行了消噪处理, 因此能够改善低信噪比时信号极点的提取, 从实验2的结果可以看出, 在SNR=10dB时, 本文提出方法求解多项式(15)零点的方差远小于改进KT法和FOC法的方差, 甚至在更低信噪比(SNR=5dB)(见图1(c))时求解零点的方差也小于改进KT法和FOC法在高信噪比(SNR=10dB)时求解零点的方差. 由于多相式零点与极点相对应, 因此求解的极点的方差也要远小于改进KT法和FOC法求解极点的方差, 这说明本文使用新定义的互相关估计方法得到的相关函数序列信噪比被大大提高, 其消噪能力要优于改进KT法中有限次Hankel[7]化消除噪声的能力, 同时信号与噪声交叉项的影响要远小于基于四阶累计量的方法, 互相关处理能够大大减弱求解极点所用的线性方程组的病态性, 从而使得估计的极点参数较之文献中方法更为稳定、精确. 从表1、2可以看出本文提出的新方法对于小衰减因子极点参数的估计性能相比改进KT法和FOC法提高了约10dB, 而对于大衰减因子极点估计性能提高了约5dB(见表3和4).

5 结论

本文着重研究了低信噪比条件下有限长指数衰减正弦和信号极点提取问题, 提出了一种以互相关消噪为预处理的极点提取新方法, 仿真实验表明本文定义的互相关估计方法对指数衰减正弦和信号的去噪能力十分优越, 在同样精度条件下本文新的极点提取方法较之改进KT法和FOC法需要的信噪比降低了约5dB. 此外本文方法可以推广到其他基于模型的线性预测极点提取算法及非线性极点提取算法, 精确提取极点的信噪比可望进一步降低.

参考文献:

[1] Chaung C, Moffat. Natural resonance of radar targets via Prony's method and target discrimination[J]. IEEE Trans Aerosp Elect Syst, 1976, 12(9): 583-589.

[2] Umesh S. Estimation of parameters of exponentially damped sinusoids using fast maximum likelihood estimation with application to NMR spectroscopy data[J]. IEEE Trans On signal processing. 1996, 44(9): 2245-2259.

[3] Rothwell E J, Chen K M. A hybrid E-pulse/least squares technique for natural resonance extraction[J]. Proc IEEE, 1988, 76(3): 296-298.

[4] Rahman M A, Yu K B. Total least squares approach for frequency estimation using linear prediction[J]. IEEE Trans Acoust, Speech, Signal Processing, 1987, 35(10): 1440-1454.

[5] Kumaresan R, Tuffts D W. Estimating the parameters of exponentially damped sinusiods and pole-zero modeling in noise[J]. IEEE Trans Antennas and Propagation, 1982, 30(6): 833-840.

[6] Hua Y, Sarkar T K. Matrix pencil method for estimation parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise[J]. IEEE Trans Acoustics, Speech, Signal Processing, 1990, 38(5): 814-824.

[7] Li Y, Liu K J R, et al. A parameter estimation scheme for damped sinusoidal signals based on low-rank Hankel approximation[J]. IEEE Trans Signal processing, 1997, 45(2): 481-486.

[8] Papadopoulos C K, Nikias C L. Parameter estimation of exponentially damped sinusoids using higher order statistics[J]. IEEE Trans Acoustics, Speech, Signal Processing, 1990, 38(8): 1424-1436.

[9] 姚天任, 孙洪. 现代数字信号处理[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1999.

[10] Konstantinides K, Yao K. Statistical analysis of effective singular values in matrix rank determination[J]. IEEE Trans Acoustics, Speech, Signal Processing, 1988, 36(5): 757-763.

作者简介:

王党卫 男, 1976年12月生于陕西咸阳, 现在国防科技大学电子科学与工程学院攻读信息与通信工程专业博士学位, 主要从事雷达目标特性与目标识别、信号处理的研究. Email: wdw65@sohu.com

粟 毅 男, 1961年11月生于山东泰安, 国防科技大学电子科学与工程学院教授, 博士生导师, 主要从事信号处理、雷达系统、遥感信息处理的研究.

马兴义 男, 1970年11月生于山东邹城, 现在国防科技大学电子科学与工程学院攻读信息与通信工程专业博士学位, 主要从事计算电磁学、雷达目标特性及识别的研究.