

时域有限差分法分析平面周期性结构电磁特性

刘 荧, 毛钧杰, 姚德森

(国防科技大学电子科学与工程学院电子科学与技术系, 长沙 410073)

摘 要: 本文阐述了如何用时域有限差分法分析平面周期结构的电磁特性. FDTD 方法与周期性边界条件、吸收边界条件结合, 构成分析各种周期性结构电磁特性准确、有效的通用工具. 但为了在时域表示宽带信号的周期性边界条件, 必须引入辅助场量并加以适当变形才可建立时域迭代式. 文中以平面双周期频率选择表面为例, 给出了计算思路和结果.

关键词: 周期性结构; 周期性边界条件; FDTD 法

中图分类号: TM15 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 09-0009-03

The Analysis of the Electromagnetic Characteristics of Planar Periodic Structures Using FDTD Method

LIU Ying, MAO Junjie, YAO Demiao

(School of Electronic Science and Engineering, National University of Defence Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In this paper, it is presented how to use FDTD to analyze the electromagnetic characteristic of the planar periodic structures. The FDTD combined with periodic boundary condition (PBC) and absorber boundary condition (ABC) becomes the accurate and efficient tool for various periodic structures. In order to develop a wide band PBC and correct iteration in time domain, a set of auxiliary elements are introduced and some modification are performed. Finally some examples based on a doubly periodic infinite planar frequency selected surface (FFS) are presented.

Key words: periodic structure; periodic boundary condition; FDTD method

1 引言

分析平面周期性结构的电磁特性是微波工程人员经常遇到的问题, 一般是用积分方程法、场分量匹配法、有限元法等工具再加上 Floquet 定理来分析它, 但这些方法过程复杂, 最终均归结为高阶矩阵的求解, 数值稳定性差, 而且总是针对某一种单元结构构造相应的分析方法, 所得公式通用性差. 时域有限差分法(FDTD) 计算简单, 可一次性计算宽频带的特性, 便于处理各种复杂结构, 程序的通用性好.

一般先将周期阵列作无限阵处理, 只要分析其中一个阵元即可推出整个阵的特性, 故计算量不会构成瓶颈. 从无限均匀阵得出的结果通过适当修正可推出有限不均匀阵的结果.

2 FDTD 法分析周期性结构的基本原理

2.1 周期性边界条件 (Periodic Boundary Condition, 简称 PBC)

当周期结构阵列无限大, 且馈电或平面波照射均匀时, 结构的周期性导致它附近的场幅度的分布具有同样的周期性, 但相位上由于馈电相位线性分布或平面波的斜入射而具有有规律的相位差, 在时域则表现为有规律的延时. 这称为 Floquet 定理, 也就是一种准周期性条件^[1]. 可假想将阵面上的网格线

沿垂直阵面的方向无限平移, 将空间划分为无数个周期性子单元, 选定其中一个为研究对象, 见图 1. 其四壁采用 PBC 截断; 垂直于阵面的方向上采用吸收边界条件截断, 则研究对象

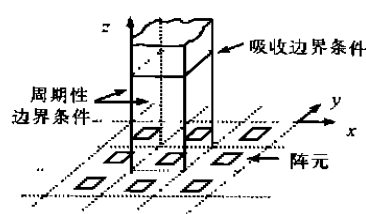


图1 子单元示意图

为一个有限空间. 单频激励时 PBC 可用频域相移表示, 如 $E(x + d_x, y, z) = E(x, y, z) e^{jk_x d_x}$; 脉冲激励时

$E(x + d_x, y, z, t) = E(x, y, z, t + S_x)$. PBC 就只能用时移表示, 时间延迟值可以通过存储一段时间步中的场值得到 (这样可能消耗很大的存储量), 但是时间超前值是不可预知的, 这是时域 PBC 的致命缺陷. 而辅助场分量法引入辅助分量, 并消去其相差, 使其在整个阵面上幅相均是周期性的, 因此不需要表示相差.

2.1.2 辅助场分量法^[2]

用下列方程定义某个频率上的辅助场量 (上标 ~ 0 表示是频域分量):

$$P_i(x, y, z, X) = E_i(x, y, z, X) e^{jR_x x} e^{jR_y y} / G, \quad G = \sqrt{L/E} (1a)$$

$$Q_i(x, y, z, X) = H_i(x, y, z, X) e^{jB_x x} e^{jB_y y}, \quad i = x, y, z \quad (1b)$$

周期阵的主瓣方向为 \$(H, U)\$, \$B_x = (X/v) \sin H \cos U\$, \$B_y = (X/v) \sin H \sin U\$ 为波矢量在 \$x, y\$ 方向上的分量, \$X\$ 为角频率, 波速 \$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}\$. 因子 \$e^{jB_x x} e^{jB_y y}\$ 使 \$P, Q\$ 分量消去了相差, 在整个阵面上其幅相均是周期性的:

$$P_i(x, y, z, X) = P_i(x + d_x, y, z, X) = P_i(x, y + d_y, z, X) \quad (2a)$$

$$Q_i(x, y, z, X) = Q_i(x + d_x, y, z, X) = Q_i(x, y + d_y, z, X) \quad (2b)$$

因此在某个频率, 若用 \$P, Q\$ 分量代替 \$E, H\$ 分量, 则周期性边界条件就可式(2)简单表示, 不须再体现相移、时延.

上述的辅助分量都是针对某个频率而定义的, 在下一节可见, 辅助分量如何引入到时域迭代中.

3 时域迭代公式推导

以 \$P_z\$ 分量为例. 由式(1)得到用辅助场量来表示电场、磁场的表达式:

$$E_z(x, y, z, X) = P_z(x, y, z, X) e^{-jB_x x} e^{-jB_y y} G \quad (3a)$$

$$H_z(x, y, z, X) = Q_z(x, y, z, X) e^{-jB_x x} e^{-jB_y y} \quad (3b)$$

将式(3)代入频域 Maxwell 方程, 得:

$$\frac{1}{v} j \omega P_z = \frac{5 Q_y}{5 x} - \frac{5 Q_x}{5 y} - R P_z + j \frac{X}{v} \sin H \sin U Q_x - j \frac{X}{v} \sin H \cos U Q_y \quad (4)$$

对式(4)做 Fourier 反变换, 得:

$$\frac{1}{v} j \omega P_z = \frac{5 Q_y}{5 x} - \frac{5 Q_x}{5 y} - R P_z + \left[\frac{1}{v} \sin H \sin U \frac{5 Q_x}{5 t} \right] - \left[\frac{1}{v} \sin H \cos U \frac{5 Q_y}{5 t} \right] \quad (5)$$

式(5)中各分量. 没有上标 \$\sim 0\$, 它们是各频域分量对应的时域分量. 这样就得到了时域辅助分量满足的迭代方程. 同理, 对式(2)做 Fourier 反变换, 得到时域辅助分量的周期性边界条件:

$$P_i(x, y, z, t) = P_i(x + d_x, y, z, t) = P_i(x, y + d_y, z, t) \quad (6a)$$

$$Q_i(x, y, z, t) = Q_i(x + d_x, y, z, t) = Q_i(x, y + d_y, z, t) \quad (6b)$$

可见时域辅助分量在整个阵面上其幅相也是周期性的, 不须再体现相移、时延.

由式(5)可见, 时域辅助分量 \$P, Q\$ 满足的已不再是 Maxwell 方程, 而是其变异, 方程右边出现了一些额外的分量 (方括号中). 当要将式(5)离散化时, 这些项带来了麻烦. 其一, 方程两边都有时间偏导; 其二, 方程右边各项不再是空间一致的, 如 \$Q_x, P_z\$ 在原网格中不在空间同一点. 采用场分裂法来解决这个问题^[3]. 将 \$P_z\$ 分裂为三个子分量, 定义:

$$P_z^n = P_z^{an} + P_z^{bn} + P_z^{cn} \quad (7a)$$

$$\frac{1}{v} j \omega \frac{P_z^{an}}{s t} = \frac{5 Q_y^{n-1/2}}{5 x} - \frac{5 Q_x^{n-1/2}}{5 y} - R P_z^{n-1/2} \quad (7b)$$

$$P_z^{bn} = \sin H \sin U Q_x^n \quad (7c)$$

$$P_z^{cn} = -\sin H \cos U Q_y^n \quad (7d)$$

其他分量也类似分解, 并将分解式联立求解, 最后可将各分量都用带上标 \$a\$ 的子分量来表示, 例如:

$$P_z^n = \frac{\sin H \sin U}{\cos^2 H} Q_x^{an} - \frac{\sin H \cos U}{\cos^2 H} Q_y^{an} + \frac{1}{\cos^2 H} P_z^{an} \quad (8)$$

这样就可对子分量建立迭代式, 再由子分量线性组合成各分量. 式(8)中, 等式两边各分量须取同一时刻的值, 对于在网格空间中位置不一致的分量则取空间平均值. 由此可见, 本来, 在第 \$n\$ (或第 \$n+1/2\$) 时间步, 只需算出电 (或磁) 场值; 而作了场分裂后, 在每半个时间步, 均要计算电场和磁场值.

计算出辅助场分量后, 还要将它还原成原来的电磁场分量, 这只要经过简单的时移即可. 对式(3)作 Fourier 反变换, 得:

$$E_z(x, y, z, t) = P_z(x, y, z, t) - \frac{\sin H \cos U}{v} x - \frac{\sin H \sin U}{v} y G \quad (9a)$$

$$H_z(x, y, z, t) = Q_z(x, y, z, t) - \frac{\sin H \cos U}{v} x - \frac{\sin H \sin U}{v} y \quad (9b)$$

4 稳定性条件

场分裂法使得场的时域迭代方程组有所改变, 稳定性条件也随之改变. 由于任意波模式都可展开为平面波谱, 故只要迭代方程组对所有平面波本征模都稳定即可.

考虑均匀无耗的非磁性媒质空间 (\$R = R^* = 0\$). 平面波本征模取如下形式:

$$P_i^n(I, J, K) = P_i^n e^{-j(k_x I x + k_y J y + k_z K z)}, \quad (10)$$

$$Q_i^n(I, J, K) = Q_i^n e^{-j(k_x I x + k_y J y + k_z K z)}$$

\$k_x, k_y, k_z\$ 分别为平面波本征模的波矢量在 \$x, y, z\$ 方向的分量 (注意: 此处的 \$k_x, k_y\$ 不同于 2.1.2 节中的 \$k_x, k_y\$), 可在 \$[-\pi, \pi]\$ 取值. \$I, J, K\$ 是网格坐标. 子分量的平面波本征模形式同式(10), 但要加上上标 \$a\$, 如 \$P_i^{an}(I, J, K)\$. 将本征模代入 \$P_z^a \sim Q_z^a\$ 的迭代式, 可以得到如下的二阶差分方程:

$$x^{an} = A x^{a(n-1)} + B x^{a(n-1/2)} = A x^{a(n-1)} + B^* T x^{a(n-1/2)} \quad (11)$$

\$x^{an} = (p_x^a p_y^a p_z^a q_x^a q_y^a q_z^a)^T\$, 矩阵 \$T\$ 是各分量与各子分量间的转换矩阵. 进一步推得一阶差分方程:

$$y^{an} = M y^{a(n-1/2)}; y^{an} = (x^{an}, x^{a(n-1/2)})^T, \quad (12)$$

$$y^{a(n-1/2)} = (x^{a(n-1/2)}, x^{a(n-1)})^T$$

$$M = \begin{bmatrix} B^* T & A \\ I & 0 \end{bmatrix} \text{ 称为迭代矩阵, 当空间步长 } \Delta s \text{ 一定时}$$

(一般要求 \$\Delta s < k_{\min}/10\$), 它的每一个元素都是 \$\Delta t, k\$ (\$k = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}\$) 的函数, 记为 \$M(\Delta t, k)\$. 根据稳定性的 Von Neumann 条件^[4], 要求对于所有的 \$k\$, 迭代矩阵 \$M\$ 的最大谱半径 \$Q_{\max}(M(\Delta t, k)) \leq 1\$. 由此可以确定 \$\Delta t\$ 的上限.

图 2 表示在均匀无耗的媒质空间 (\$R = R^* = 0\$) 中, 不同 \$H\$ 时, \$P, Q\$ 分量迭代式的最大谱半径随 \$\Delta t\$ 的变化曲线. 计算时取 \$x = y = z = 116 \text{ mm}\$. 可见 \$Q_{\max}(M)\$ 曲线随 \$\Delta t\$ 增大到某个值会突然增大; 在突变之前 \$Q_{\max}(M)\$ 小于等于 1, 迭代式是

稳定的. 所以突变处对应的 Δt 是满足稳定性条件的最大 Δt . 由图 2 可知, 主瓣方向越偏离法向, 计算时所能取的 Δt 越小. 当主瓣方向接近掠射时, 将会导致很小的计算时间步长.

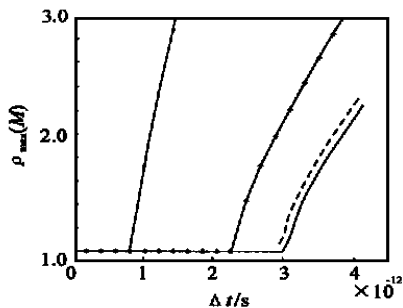


图2 均匀无耗媒质中, 不同主瓣方向时, P、Q 迭代矩阵最大谱半径随 Δt 值的变化曲线. 取 $U=0$, 从右到左依次为 $H=0, 10, 30, 60$ 时的曲线.

5 吸收边界条件

在垂直于周期

性阵面的方向上, 需用吸收边界条件截断. 当能量最大方向偏离法向时, 存在可传播的 Floquet 模, 对吸收边界条件的要求比较一般情况要高一些. Berenger 提出的完全匹配层^[6] (简称 BPML) 是一种较好的吸收边界条件, Gedney 构造的单轴各项异性 PML 吸收边界条件 (简称 GPML)^[7] 是 BPML 的一种改进形式, 使用得比较广泛. 在辅助场 FDTD 中, BPML 和 GPML 的迭代式也发生了变异, 且有可能不同于均匀媒质中的情况, 所以在采用某种吸收边界条件之前, 要分析它的稳定性.

下图中给出了当 $x=y=z=116\text{mm}$ 时, 辅助场 BPML 和 GPML 各自的变化曲线. 可见 GPML 迭代式的谱半径从一开始就大于 1, 是无条件不稳定的, 而且改变 R 值 (指 PML 层中最大的 R 值) 也不能改变这一性质, 见图 3. 因此在分析二维周期性结构时, 不能采用 GPML, 尽管它在别的算例中是较好的吸收边界条件. BPML 则存在 Δt 的稳定区间. 计算发现, BPML 层中可取的最大 Δt 与非 PML 层中的相同, 且不随 R 值变化, 见图 4. 因此, BPML 吸收边界条件不会给稳定性带来额外的限制. 两图中所示的都是 $(H, \varphi) = (30, 90)$ 时的曲线, 其他角度情况类似.

6 应用结果

用辅助场 FDTD 法分析频率选择表面 (FFS) 的能量反射系数的频率响应. 这个例子充分体现了 FDTD 法可一次计算宽频带响应的优点. 在每个入射角度经一次 FDTD 计算就得到整个频率响应曲线.

无限大双周期 FFS 由窄振子组成, 排列为矩形栅格. 振子为无限薄导体, 宽 $W=1127\text{mm}$, 长 $L=1217\text{mm}$, 相邻振子中心

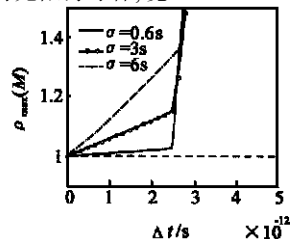


图3 GPML 中 P、Q 迭代矩阵谱半径随 Δt 值的变化曲线. 取 $(H, \varphi) = (30, 90)$

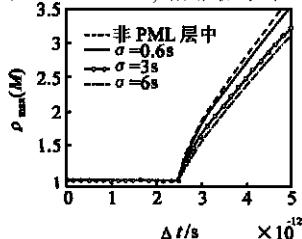


图4 BPML 中 P、Q 迭代矩阵谱半径随 Δt 值的变化曲线. 取 $(H, \varphi) = (30, 90)$

左右间距 $dx=1718\text{mm}$, 前后间距 $dy=1718\text{mm}$. 图 5 为其示意图. 此 FFS 结构是文献[7]中图 10、图 11 中计算实例所采用的结构. 入射波为平面波, 入射角为 (H, U) . 电场极化方向平行于振子长轴向. 入射脉冲为调制到中心频率 $f_0=11\text{GHz}$ 的 Gauss 脉冲, 3dB 带宽为 6GHz.

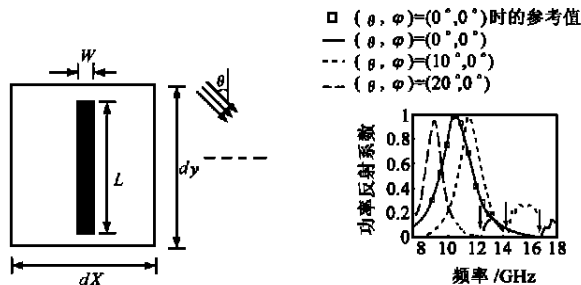


图5 窄振子 FFS 阵单元及入射方向的示意图

图6 FFS 功率反射系数的频率响应. 随入射角的变化

图 6 中, f_0 所代表的数据来自文献[7], 它与本文的计算结果吻合得很好. 在高于谐振频率的频段, 反射系数经谷点 (图中箭头所指处) 后又逐渐增大, 这是由于在高频端出现了可传播的 Floquet 模而造成的. 解析计算表明, 当入射角 $(H, U) = (0, 0)$ 时, 若频率高于 161.9GHz 则会出现第二个可传播的 Floquet 模 (第一个为主模), 即栅瓣; 当入射角 $(H, U) = (10, 0)$ 或 $(H, U) = (20, 0)$ 时, 若频率高于 141.4GHz 或 121.6GHz 则会出现栅瓣, 这些频率点正对应于图 6 中谷点之后开始上升的位置.

7 结论

分析周期性结构时, 在时域有限差分法中引入消去了相位差的辅助场量, 再适当进行场量分裂, 可以建立迭代式. 理论上来说, 这种方法可以处理任意周期性结构. 但是, 对稳定性条件和吸收边界条件都有新的要求, 尤其是当采用某种吸收边界条件时, 一定要研究它是否满足稳定性条件. 与常规频域方法和时域时延方法相比, 用辅助场 FDTD 分析周期性结构, 从根本上减少了计算量和复杂度.

作者简介:



刘 莹 1973 年出生. 1995 年毕业于国防科技大学微波与电磁场专业. 同年在该校攻读微波与电磁场专业硕士学位. 1997 年 5 月提前攻读该校通信与电子工程专业博士学位. 主要研究方向为电磁场数值计算与微波技术.

毛钧杰 1966 年毕业于西安军事电讯工程学院, 现为国防科技大学教授、博士生导师. 主要从事雷达、微波毫米波及天线方面的教学和科研工作.

(下转第 84 页)

绍了相关的基础知识,以期引起更多研究者对这一领域的关注.由于篇幅所限,许多问题未及深究.所幸国内涉足这一领域的研究者逐渐增多,著述^[45]及译介的典范性文献^[46]业已面世.全文所述仅为作者一得之见,实为时频分析冰山之一角.

参考文献:

- [1] DI Gabor. J. Inst. Elec. Eng. , 1946, 93: 429- 457.
- [2] RI KI Potter, et al. Van Nostrand, New York, NY, 1947.
- [3] JI Ville. Cables et Transmissions, 1948, 2A: 61- 74.
- [4] EI PI Wigner. Physical Review, 1932, 40: 749- 759.
- [5] JI Morlet, et al. Geophysics, 1982, 47(2): 222- 236.
- [6] LI Cohen. Englewood Cliffs, NJ: Prentice2Hall, 1995.
- [7] CI HI Page. J. Appl. Phys. , 1952, 23: 103- 106.
- [8] CI HI MI Turner. J. Appl. Phys. , 1954, 25: 1347- 1351.
- [9] HI Margenau, et al. Prog. Theor. Phys. , 1961, 26: 722- 738.
- [10] MI JI Levin. IEEE Trans. Inform. Theory, 1964, 10: 95- 97.
- [11] AI Rihaczek. IEEE Trans. Inform. Theory, 1968, 14: 369- 374.
- [12] MI HI Adkroyd. Radio Electron. Eng. , 1970, 239: 145- 152.
- [13] LI Cohen. J. Math. Phys. , 1966, 7: 781- 786.
- [14] SI Qian, DI Chen. Englewood Cliffs, NJ: Prentice2Hall, 1996.
- [15] OI Rioul, PI Flandrin. IEEE Trans. SP, 1992, 40(7): 1746- 1757.
- [16] PI Flandrin, et al. Appl. Comp. Ham. Anal. , 1996, 3(1): 10- 39.
- [17] KI Kodera, et al. Phys. Earth Planet. Interiors, 1976, 12: 142- 150.
- [18] KI Kodera, et al. IEEE Trans. ASSP, 1986, ASSP234: 64- 76.
- [19] FI Auger, et al. IEEE Trans. SP, 1995, 43(5): 1068- 1089.
- [20] RI GI Baraniuk, et al. Signal Processing, 1993, 32(6): 263- 284.
- [21] SI Qian, DI Chen. Signal Processing, 1994, 36(1): 1- 11.
- [22] SI Malat, ZI Zhang. IEEE Trans. SP, 1993, 41(12): 3397- 3415.
- [23] 邹红星, 周小波, 李衍达. Dopplerlet 变换在不同特性噪声背景下的信号恢复中的应用. 2000, 28(9): 1- 4.
- [24] SI Mann, SI Haykin. Vision Interface 91, 1991, 6: 3- 7.

- [25] SI Mann, SI Haykin. Electron. Lett. , 1992, 28(2): 114- 115.
- [26] DI Mihovilovic, et al. Electron. Lett. , 1991, 27(13): 1159- 1161.
- [27] DI Mihovilovic, et al. J. Geophys. Res. , 1992, 97(A11): 17199- 17204.
- [28] SI Mann, et al. IEEE Trans. SP, 1995, 43(11): 2745- 2761.
- [29] RI Baraniuk, et al. IEEE Trans. SP, 1996, 44(12): 3129- 3135.
- [30] 殷勤业, 等. 电子学报, 1997, 25(4): 52- 58.
- [31] AI Bultan. IEEE Trans. SP, 1999, 47(3): 731- 745.
- [32] 邹红星, 周小波, 李衍达. 采用 Dopplerlet 基函数的时频信号表示 [J]. 清华大学学报(自然科学版), 2000, 40(3): 55- 58.
- [33] AI BI Fineberg, KIL I Yu. ICASSP. 96: 25- 28.
- [34] VI Chen, et al. IEEE Trans. Aerosp. Elec. Syst. , 1998, 34(2): 486- 499.
- [35] VI Chen, HILin. IEEE SPM, 1999, 16(2): 81- 93.
- [36] JI Wang, JI Zhou. IEEE SPM, 1999, 16(2): 94- 99.
- [37] LI Stankovic, VI Katkovnik. IEEE Trans. SP, 1999, 47(4).
- [38] MI Amin. IEEE Trans. SP, 1997, 45(1): 90- 101.
- [39] SI Barbarossa, et al. IEEE Trans. SP, 1999, 47(4): 957- 965.
- [40] BI Friedlander, et al. IEEE Trans. SP, 1995, 43(9): 2088- 2094.
- [41] BI Boashash, BI Ristic. Signal Processing, 1998, 67(1): 1- 23.
- [42] PI Loughlin(Edl). Proc. IEEE, 1996, 84(9).
- [43] BI Boashash(Edl). Sydney, Australia: Longman Cheshire, 1992.
- [44] LI Cohen. IEEE SPM, 1999, 16(1): 22- 28.
- [45] 张贤达, 保铮. 北京: 国防工业出版社, 1998. 9.
- [46] LI 科恩(白居宪译). 西安: 西安交通大学出版社, 1998. 3.

作者简介:

邹红星 (见本期第 4 页)

周小波 (见本期第 4 页)

李衍达 (见本期第 4 页)

(上接第 101 页)

参考文献:

- [1] N. Amitay, V. Galindo, C. P. Wu. Theory and Analysis of Phased Array Antennas [M]. Chapter 2. Wiley2Interscience, 1972.
- [2] Veysoglu M. E. , Shin R. T. , Kong J. A. A finite2difference time2do2main analysis of wave scattering from periodic surface [J]: Oblique Incidence Case. Journal of Electromagnetic and Applications, 1993, 7: 1595- 1607.
- [3] J. Alan Roden, Stephen D. Gedney, Morris P. Kesler, et al. Time2do2main analysis of periodic structures at oblique incidence: orthogonal and

nonorthogonal FDID implementations [J]. IEEE Trans. MIT, 1998, 46: 420- 426.

- [4] R. D. Richtmyer, K. W. Morton. 初值问题的差分方法 [M]. 第 4 章. 广州: 中山大学出版社, 1992.
- [5] Jean2Pierre Berenger. Thre2dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 128: 363- 379.
- [6] Stephen D. Gedney. An anisotropic perfectly matched layer2absorbing medium for the truncation of FDID lattices [J]. IEEE Trans. AP, 1996, 44: 1630- 1639.
- [7] AD2A326105. RCS of an array [R]. 1997.