

复杂噪声背景下的谐波恢复及非线性耦合谐波分析

徐 景^{1,2}, 王树勋¹, 王宏志^{3,4}, 程时昕²

(1. 吉林大学信息学院, 吉林长春 130025; 2. 东南大学移动通信国家重点实验室, 江苏南京 210096;
3. 长春工业大学计算机科学与工程学院, 吉林长春 130012; 4. 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林长春 130000)

摘 要: 本文主要在乘性噪声之间相关、乘性和加性噪声之间也相关的复杂噪声背景下, 研究谐波恢复及非线性耦合谐波分析, 提出噪声互可混的概念, 推广了有关非线性耦合谐波分析的结论, 用特殊定义的六阶时间平均矩谱切片成功地解决了复杂噪声背景下的谐波恢复问题。仿真实验证明了算法的有效性。

关键词: 时间平均矩谱; 非线性耦合谐波; 谐波恢复; (自)可混; 互可混

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 01-0117-06

Harmonic Retrieval and Nonlinear Frequency-Coupled Harmonics in the Complex Noise

XU Jing^{1,2}, WANG Shu-xun¹, WANG Hong-zhi^{3,4}, Cheng shi-xin²

(1. Information school of Jilin University, Changchun, Jilin 130025, China;
2. National Mobile Communications Research Laboratory of Southeast University, NanJing, Jiangsu 210096, China;
3. Dept of Computer Science and Technology, Changchun Technology University, Changchun, Jilin 130012, China;
4. Changchun Institute of Optic Fine Machine and Physics, Changchun, Jilin 130000, China)

Abstract: In this paper, the harmonic retrieval and frequency-coupled harmonics are studied under the condition that the complex noise include multiplicative and additive noise are correlative. First, the concept of cross-mixing is proposed. Second, the result on the frequency-coupled harmonics are extended. Third, the harmonic retrieval in the complex noise is solved with the slice of the sixth-order time-averaged moment polyspectral. The above algorithms are confirmed by the simulations.

Key words: time-averaged polyspectral; frequency-coupled harmonics; Harmonic retrieval; mixing; cross-mixing

1 引言

谐波恢复与非线性耦合谐波分析在现代信号处理中有重要地位, 在海洋学、地震学、脑电图分析和等离子物理等领域中有广泛的应用。对加性噪声背景下的谐波恢复及非线性耦合谐波分析问题的已进行了广泛的研究, Swami 和 J. M. Mendel 提出基于四阶累积量一维对角切片的谐波恢复方法^[1], 解决了高斯有色噪声背景下的谐波恢复问题; 梁应敬等^[2,3,5,14]提出了非高斯有色噪声中谐波恢复的预滤波方法和预白化方法; 张严等^[4]解决了二、三次非线性耦合谐波分析问题。

近期的研究表明, 由于信号通过非线性介质或散射, 乘法噪声在实际中广泛存在。因此人们对乘性噪声问题展开了研究。Besson^[8,9]在没有考虑加性噪声、谐波信号只能有单频率分量且假定乘法噪声具有低通特性的情形下, 研究了使用车载多谱勒雷达的远距离车辆实时测速问题; Dwyer^[10]在假定乘法噪声和加性噪声均为高斯分布且谐波信号具有单频率分量的情形下, 提出用一种特定的四阶谱来估计乘法噪声中的谐波信号参量; Swami^[11]研究了乘法噪声现象后, 指出用高阶

累积量方法估计谐波信号参量的条件是: 加性噪声为高斯分布, 乘法噪声为非零均值白噪声或零均值高斯白噪声, 并研究了乘法噪声中的二次非线性耦合谐波分析问题, 指出当乘法噪声具有高斯分布时, 它是不可识别的。直到最近, G B. Gannakis 和 G Zhou^[6]利用信号的循环平稳性质提出了乘法噪声中谐波恢复的循环统计量方法, 该方法不限制加性和乘法噪声的颜色和分布, 并提出一种特殊的多谱方法^[11]解决乘法噪声中的二次非线性耦合谐波分析问题。北京大学程乾生教授等^[12,13]也对此作出了卓有成效的研究。

上述方法要求满足乘性噪声之间相互独立、乘法噪声和加法噪声之间相互独立和噪声是可混的条件。噪声可混的条件是要求噪声的自累积量绝对可和。在实际环境中, 噪声独立往往难以得到检验和保证, 因此, 有必要对乘性噪声之间相关、加性噪声与乘性噪声也相关的复杂噪声背景下的谐波恢复和非线性耦合谐波分析问题进行研究。本文提出了噪声互可混的概念, 噪声互可混的条件是噪声的自累积量和互累积量都绝对可和, 在此条件下, 研究了复杂噪声背景下的谐波恢复及非线性耦合谐波分析问题。

收稿日期: 2000-09-25; 修回日期: 2002-06-20

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 69772013)

2 自可混与互可混

首先给出自累积量和互累积量的定义.

设 $S = [S_0, \dots, S_L]^T$ 是一平稳随机向量, 则 S 随机向量的互累积量为

$$C_{S_{l_1}, S_{l_2}, \dots, S_{l_{k+1}}}^{(p)}(1, \dots, k) \triangleq \text{cum}\{S_{l_1}^{(p_0)}(t), S_{l_2}^{(p_1)}(t+1), \dots, S_{l_{k+1}}^{(p_k)}(t+k)\} \quad (1)$$

其中, k 为自然数, p 为 $(k+1)$ 维列向量, 元素取 +1 或 -1, $S^{(1)}(t) \triangleq S(t)$, $S^{(-1)}(t) \triangleq S^*(t)$, $\triangleq(1, \dots, k)$, $l_1, l_2, \dots, l_{k+1} = 0, 1, \dots, L$. 当 $S_{l_1}(t) = S(t)$, $S_{l_2}(t) = S(t)$, $\dots, S_{l_{k+1}}(t) = S(t)$ 时, 式(1)化为

$$C_{(k+1)S}^{(p)}(1, \dots, k) \triangleq \text{cum}(S^{(p_0)}(t), S^{(p_1)}(t+1), \dots, S^{(p_k)}(t+k)) \quad (2)$$

式(2)称为随机过程 $S(t)$ 的自累积量. 下面对可混的概念作一阐述.

定义 1 可混^[7]. 若平稳随机过程 $S(t)$ 的自累积量绝对可和, 则称噪声是可混的. 即满足

$$\left| C_{(k+1)S}^{(p)} \right| < \quad (3)$$

其中,

$$C_{(k+1)S}^{(p)} \triangleq \text{cum}(S^{(p_0)}(t), S^{(p_1)}(t+1), \dots, S^{(p_k)}(t+k))$$

噪声的自累积量绝对可和, 实际上刻划了噪声在时间上的近似独立性, 研究^[15]表明只要噪声是具有稳定核的线性过程或 Volterra 过程, 它都是可混的.

为了研究乘性噪声之间相关、乘性噪声和加性噪声也相关情况下的谐波恢复及非线性耦合谐波分析, 本文定义了互可混的概念.

定义 2 互可混. 若平稳随机向量的自累积量 $S = [S_0, \dots, S_L]^T$ 和互累积量都绝对可和, 则平稳随机向量 S 是互可混的. 即满足

$$\left| C_{S_{l_1}, S_{l_2}, \dots, S_{l_{k+1}}}^{(p)} \right| < \quad (4)$$

其中,

$$C_{S_{l_1}, S_{l_2}, \dots, S_{l_{k+1}}}^{(p)} \triangleq \text{cum}(S_{l_1}^{(p_0)}(t), S_{l_2}^{(p_1)}(t+1), \dots, S_{l_{k+1}}^{(p_k)}(t+k))$$

可以这样理解可混和互可混这两个概念. 第一, 研究の対象不同. 可混的研究对象为单元素, 因此可混也可以称为自可混; 而互可混的研究对象为多个元素组成的集合, 在本文中, 集合可以看作由多个乘性噪声和加性噪声组成. 第二, 刻划的内容不同. 由于自可混的研究对象为单元素, 因此它刻划的是自身的特性, 即噪声在时间上的近似独立性; 互可混它不但刻划了元素自身的特性, 而且还刻划了元素与元素之间的关系, 在本文中体现为噪声与噪声在时间上的近似不相关性. 第三, 用自累积量和互累积量来描述互可混的概念, 而没采用互相关函数来描述的原因是互可混可以体现多个元素之间的关系, 而若用互相关函数只能体现两元素之间的关系. 第四, 在研究乘性噪声背景下的谐波恢复及非线性耦合谐波分析^[6,7,12,13]时, 都假设噪声自可混和相互独立的这两个条件,

这两个条件包含两层意思: 噪声自可混相当于刻划了噪声的自身特性, 而相互独立刻划了噪声之间的相互关系. 由噪声相互独立可推出噪声的互累积量为零, 因此可得如下推断: 满足自可混和相互独立的噪声必定是互可混的, 而反之不一定成立. 同时若乘性和加性噪声满足互可混的假设, 可得观测信号满足自可混的假设, 从而由文献^[7]可得三阶和六阶时间平均矩谱存在.

3 复杂噪声背景下的二次非线性耦合谐波分析

设谐波信号的观测模型为

$$x(t) = \sum_{l=1}^L S_l(t) e^{j(t+\phi_l)} + v(t), t=0, 1, \dots, T-1 \quad (5)$$

其中, $S_l(t)$ 乘性噪声, $v(t)$ 加性噪声.

为了推导方便, 设 $S_0(t) = v(t)$, $\phi_0 = 0$, 则式(5)为

$$x(t) = \sum_{l=0}^L S_l(t) e^{j(t+\phi_l)}, t=0, 1, \dots, T-1 \quad (6)$$

对模型式(6)作如下假设:

(A1) ϕ_S 各不相等, $l+m \equiv 0 \pmod{2}$, 且 $l, m \in (-, 0) \cup (0,)$, $l, m = 1, \dots, L$.

(A2) ϕ_S 为确定性常数, $\phi_l \in (-,)$.

(A3) 噪声 $S_l(t)$ 是平稳随机过程, 均值 $E[S_l(t)] = 0$, $l=0, E[S_0(t)] = 0$.

(A4) 噪声 $S_l(t)$ 满足互可混条件.

根据(A1)~(A4), 式(6)中 $x(t)$ 为非平稳信号, 其 $(k+1)$ 阶矩定义为

$$m_{(k+1)x}(t;) \triangleq E\{x^*(t)x(t+1)\dots x(t+k)\} \quad (7)$$

定义 $x(t)$ 的 $(k+1)$ 阶时间平均矩为

$$\bar{m}_{(k+1)x}() \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} m_{(k+1)x}(t;) \quad (8)$$

定义时间平均矩的 k 阶傅立叶变换为 $x(t)$ 的时间平均矩谱, 即

$$\bar{M}_{(k+1)x}() \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^k} \sum_{t=0}^{T-1} \bar{m}_{(k+1)x}() e^{-j \cdot T} \quad (9)$$

时间平均矩谱的渐近无偏估计子^[11]为

$$\bar{M}_{(k+1)x}() = \frac{1}{T^{k+1}} X_T(1) \dots X_T(k) X_T^*(1 + \dots + k) \quad (10)$$

其中,

$$X_T() = \sum_{t=0}^{T-1} x(t) \exp[-j \cdot t], \triangleq(1, \dots, k)$$

同样可定义累积量的时间平均多谱为

$$C_{(k+1)x}() \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^k} C_{(k+1)x}() e^{-j \cdot T} \quad (11)$$

定理 1 定义 $\bar{M}_{3x}()$ 为式(6)所示信号 $x(t)$ 的三阶时间平均矩谱, 则有

$$\bar{M}_{3x}() = \sum_{l_1=1}^L \sum_{l_2=1}^L \sum_{l_3=1}^L m_{l_1} m_{l_2} m_{l_3} e^{j(\phi_{l_2} + \phi_{l_3} - \phi_{l_1})} \times (l_1 - l_2 - l_3) (1 - l_2) (2 - l_3) \quad (12)$$

其中, $()$ 为 Kronecker 函数, m_l 为乘性噪声均值.

关于定理 1 的证明关键点如下:

设 $S_{l_1}(t), S_{l_2}(t), S_{l_3}(t)$ 的互累积量 $C_{S_{l_1}, S_{l_2}}^{(p)}(\cdot)$, 根据 (A4) 有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| C_{S_{l_1}, S_{l_2}}^{(p)}(\cdot) \right| = 0 \quad (13)$$

则有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| C_{S_{l_1}, S_{l_2}}^{(p)}(\cdot) e^{-j} \right| = 0 \quad (14)$$

同理, 若 $S_{l_1}(t), S_{l_2}(t), S_{l_3}(t)$ 的互累积量为 $C_{S_{l_1}, S_{l_2}, S_{l_3}}^{(p)}(\cdot)$, 2), 则有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \left| C_{S_{l_1}, S_{l_2}, S_{l_3}}^{(p)}(\cdot) e^{-j_1} e^{-j_2} \right| = 0 \quad (15)$$

以此类推.

式(14)和(15)表明, 只要噪声的自累积量和互累积量绝对可和, 则累积量的时间平均多谱为零. 这结论在定理 1 证明过程中将反复用到, 同时式(14)和(15)还表明, 可利用式(14)和(15)去除统计量中具有时间延迟的交叉项, 而抑制交叉项是非平稳、非线性信号分析的难点之一.

证明细节请见附录 1. 定理 1 表明当且仅当存在二次非线性耦合谐波时, 三阶时间平均矩谱才取非零值, 且仅在参与耦合的谐波频率处有值, 这就为判别有无二次非线性耦合谐波, 提供了理论依据.

算法步骤如下:

- (1) 根据观测信号 $x(t)$ 求得其离散傅立叶变换 $X_T(\cdot)$.
- (2) 由式(10)求得观测信号的三阶时间平均矩谱的估计.
- (3) 画出三阶时间平均矩谱估计的谱图和等高图.
- (4) 根据三阶时间平均矩谱图判别有无非线性耦合谐波, 进而根据等高图判定参与非线性耦合的频率.

4 复杂噪声背景下的谐波恢复

谐波信号的观测模型为

$$x(t) = \sum_{l=1}^L W_l(t) e^{j(l\omega + \phi_l)} + v(t) \quad (16)$$

其中, $W_l(t)$ 为乘性噪声, $v(t)$ 为加性噪声.

对模型作如下假设

(A1) ω 各不相等, 不存在非线性耦合谐波, $l = (0, 2, \dots, 3), l = 1, \dots, L$.

(A2) ϕ_{ls} 为确定性常数, $\phi_l = (-\pi, \pi]$.

(A3) 乘性噪声 $W_l(t)$ 和加性噪声 $v(t)$ 是均值为零的平稳随机过程, $W_l(t)$ 与 $v(t)$ 相关, 即

$$E\{W_l(t)v(t)\} = 0, l = 1, 2, \dots, L \quad (17)$$

(A4) 噪声满足互可混条件.

为可便于分析问题, 对上述信号的观测模型作如下变形

$$x(t) = \sum_{l=0}^L S_l(t) e^{j l \omega t} \quad (18)$$

其中, $S_l(t) = W_l(t) e^{j \phi_l}, l = 1, 2, \dots, L, S_0(t) = W_0(t), \omega = 0$.

根据式(7), $x(t)$ 的六阶矩为

$$m_{6x}(t; n_1, \dots, n_5) = E \{ x^*(t) x(t+n_1) x(t+n_2) x(t+n_3) x(t+n_4) x(t+n_5) \} \quad (19)$$

定义特殊的六阶矩为

$$m_{6x}(t; n_1, \dots, n_5) = E \{ x^*(t) x^*(t+n_1) x(t+n_2) x^*(t+n_3) x(t+n_4) x^*(t+n_5) \} \quad (20)$$

并且令 $n_1 = 0, n_2 = n_3 = -1, n_4 = n_5 = 2$, 则六阶矩化为

$$m_{6x}(t; -1, -2) = E \{ (x^*(t))^2 x(t+1) x^*(t+1) x(t+2) x^*(t+2) \} \quad (21)$$

定理 2 定义特殊的六阶时间平均矩谱为如下形式,

$$\bar{M}_{6,x}(-1, -2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^3} \sum_{l=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{T-1} E \{ (x^2(t))^* x(t+1) x^*(t+1) x(t+1) x(t+1) x^*(t+2) \} e^{-j_1} e^{-j_2} \quad (22)$$

则观测信号的六阶时间平均矩谱切片为

$$\bar{M}_{6,x}(-1, -2) \Big|_{l=0}^L = 2A \sum_{l=1}^L E \{ S_l^*(t) S_0(t) \} (-2 - l) + A^2 E \{ S_0^*(t) S_0^*(t) \} (t) (-2) \quad (23)$$

其中, $A = \sum_{l=0}^L E \{ S_l^*(t) S_l(t) \}$.

证明过程见附录 2.

由定理 2 可得如下结论: 观测信号的六阶时间平均矩谱切片仅在信号的谐波频率处有值, 无交叉项出现, 且用此六阶时间平均矩谱切片进行谐波恢复不需对噪声的分布、颜色和独立性作任何限制. 因此可根据六阶时间平均矩谱切片的谱峰来进行谐波恢复.

算法的基本步骤如下,

- (1) 求 $x^2(t)$ 和 $|x(t)|^2$, 这相当于一个非线性预处理过程.
- (2) 分别求出 $x^2(t)$ 和 $|x(t)|^2$ 的离散傅立叶变换.
- (3) 根据式(10)求得六阶时间平均矩谱的估计, 进而得其切片谱.
- (4) 画出切片谱图, 从而根据文[13]中提出的方法得到谐波频率的估计.

5 实验结果

实验 1 非线性耦合谐波分析

设观测信号中含有四个谐波成分, 分别为 $\omega_1 = 1.0, \omega_2 = 1.5, \omega_3 = 2.5, \omega_4 = 1.9$, 初始相位分别为 $0.3, 0.4, 0.5, 0.6$. 乘性和加性噪声由如下系统产生,

$$S_1(t) = e(t) + 0.3e(t-1) + 0.2e(t-2)$$

$$S_2(t) = e(t) + 0.4e(t-1) + 0.3e(t-2)$$

$$S_3(t) = e(t) + 0.25e(t-1) + 0.15e(t-2)$$

$$S_4(t) = e(t) + 0.55e(t-1) + 0.45e(t-2)$$

$$v(t) = e(t) + 0.15e(t-1) + 0.25e(t-2)$$

其中, $e(t)$ 为高斯白噪声, 且均值为 1, 方差为 $\sigma_e^2 = 1$, 可求得噪声的均值分别为 1.5、1.7、1.4、2、1.4. 数据长度 $T = 1024$. 按

照上节给出的方法,可以得到三阶时间平均矩谱图与等高图。

根据图 1,可认定存在非线性耦合谐波,进而根据局部放大的等高图图 2,可得参与耦合的谐波频率为 $\omega_1 = 1.5$, $\omega_2 = 1.0$ 。实验结果验证了方法的正确性。

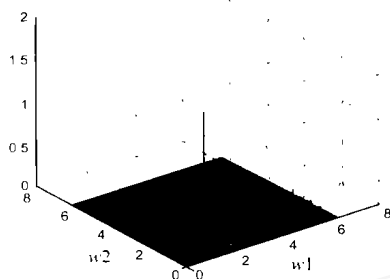


图 1 观测信号的三阶时间平均矩谱图

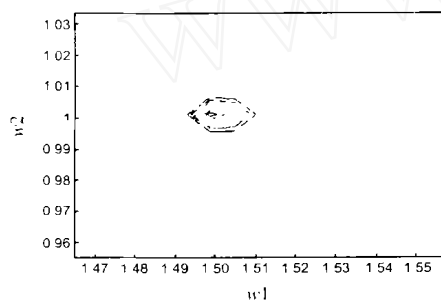


图 2 三阶时间平均矩谱的等高图

实验 2 谐波恢复

设观测信号中含有四个谐波成分,分别为 $\omega_1 = 0.5$, $\omega_2 = 0.9$, $\omega_3 = 1.2$, $\omega_4 = 1.44$, $\phi_1 = 0.3$, $\phi_2 = 0.4$, $\phi_3 = 0.5$, $\phi_4 = 0.6$ 。乘性和加性噪声由如下系统产生,

$$W_1(t) = e(t) + 0.3e(t-1) + 0.2e(t-2)$$

$$W_2(t) = e(t) + 0.4e(t-1) + 0.3e(t-2)$$

$$W_3(t) = e(t) + 0.25e(t-1) + 0.15e(t-2)$$

$$W_4(t) = e(t) + 0.55e(t-1) + 0.45e(t-2)$$

$$v(t) = e(t) + 0.15e(t-1) + 0.25e(t-2)$$

其中, $e(t)$ 为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 上均匀分布白噪声,且均值为零,数据长度 $T = 4096$ 。

实验 A 对上面给出的观测信号,若用文献 [6] 提出的循环二阶矩谱来进行谐波恢复,可得如图 3。

从图 3 可以看出,若用循环二阶矩谱将产生伪峰,出现伪峰是因为噪声之间相关,从而不能正确地估计信号频率和谐波个数。

实验 B 用本文给出的六阶时间平均矩谱切片进行谐波

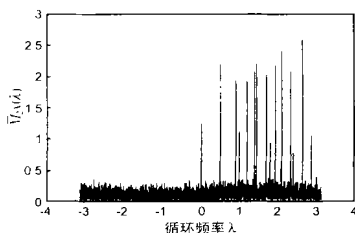


图 3 观测信号的循环二阶矩谱图

恢复,可得图 4 切片谱图。

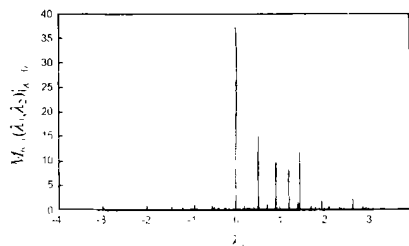


图 4 观测信号的六阶时间平均矩谱切片图

得到谐波频率的估计值 $\hat{\omega}_1 = 0.501$, $\hat{\omega}_2 = 0.9014$, $\hat{\omega}_3 = 1.2006$, $\hat{\omega}_4 = 1.4415$ 。实验 B 验证了用本文提出的方法进行谐波恢复可以很好地避免了伪峰的出现。

实验 C 噪声模型和谐波频率都保持不变,激励源 $e(n)$ 为高斯白噪声,方差 $\sigma_e^2 = 1$,数据长度 $T = 4096$ 。观测信号的六阶时间平均矩谱切片图如图 5。

根据图 5 可得谐波频率的估计值为 $\hat{\omega}_1 = 0.501$, $\hat{\omega}_2 = 0.9014$, $\hat{\omega}_3 = 1.2006$, $\hat{\omega}_4 = 1.4416$ 。实验 B 和实验 C 二者区别为,前者激励源 $e(n)$ 为均匀分布白噪声,后者为高斯白噪声,其余条件都相同,由实验结果图 4 和图 5 可知,本文提出的方法对噪声分布不敏感。

6 结论

本文针对乘性噪声之间相关、乘性和加性噪声之间也相关的复杂噪声背景,提出互可混的概念,对(自)可混与互可混这两个概念进行辨析。进而对复杂噪声背景下的非线性耦合谐波分析与谐波恢复问题展开研究,分

别提出基于三阶时间平均矩谱的非线性耦合谐波分析方法和基于特殊的六阶时间平均矩谱切片的谐波恢复方法,成功地抑制了伪峰的出现,收到较好的效果。本文提出的方法,在数据长度较短时,方差较大,如何解决这一问题有待研究。

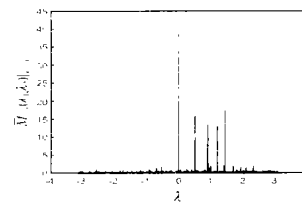


图 5 观测信号的六阶时间平均矩谱切片图

附录 1

证明:观测信号的三阶时间平均矩为,

$$\begin{aligned} \bar{m}_{3x}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-1} m_{3x}(t; \omega) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-1} E\{x^*(t)x(t+\omega_1)x(t+\omega_2)\} dt \end{aligned} \quad (24)$$

由假设(1),式(24)可化简为

$$\begin{aligned} \bar{m}_{3x}(\omega) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L e^{j(\phi_2 + \phi_3 - \phi_1)} E\{S_{l_1}^*(t)S_{l_2}(t+\omega_1)S_{l_3}(t+\omega_2)\} dt \\ &\quad (l_1 - l_2 - l_3)e^{j\omega_1 l_2} e^{j\omega_2 l_3} \\ &\quad + \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L E\{S_{l_1}^*(t)S_0(t+\omega_1)S_{l_3}(t+\omega_2)\} dt \\ &\quad (l_1 - l_3)e^{-j\phi_1} e^{j\phi_2} e^{j\phi_3} \end{aligned}$$

$$+ E\{S_{l_1}^*(t) S_{l_2}(t+1) S_0(t+2)\} \quad (l_1 - l_2 = 1) \\ \times e^{-j\phi_{l_1}} e^{j(\phi_{l_2} + \phi_{l_1})} \\ + E\{S_0(t) S_0(t+1) S_0(t+2)\} \quad (25)$$

下面观测信号的时间平均矩谱,不失一般性,分析式(25)第一项的时间平均矩谱,为了便于分析问题,不考虑相位因子,并且对矩使用 C-M 公式,逐项分析矩的展开式的时间平均多谱,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T \text{cum}\{S_{l_1}^*(t), S_{l_1}(t+1), S_{l_3}(t+2)\} \quad (l_1 - l_2 - l_3 = 1) \\ \times e^{j(\phi_{l_2} - \phi_{l_1})} e^{j(\phi_{l_3} - \phi_{l_2})} \quad (26)$$

由式(15)可知上不等式右边等于零,从而可知不等式左边必为零,同理可证矩展开式项只要含有二阶累积量,其三阶时间平均矩谱必为零,只有最后一项不为零,为如下形式

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T \text{cum}\{S_{l_1}^*(t), S_{l_2}(t+1), S_{l_3}(t+2)\} \quad (l_1 - l_2 - l_3 = 1) \\ \times e^{j(\phi_{l_2} + \phi_{l_3} - \phi_{l_1})} \quad (27)$$

由假设(A4)和加性噪声均值为零,同理可证明三阶时间平均矩的剩余项的三阶时间平均多谱为零.定理1得证.

附录 2

证明:首先求信号的六阶时间平均矩,

$$\bar{m}_{6,x}(1, 2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^6} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T E\{x^2(t)\}^* x(t+1) x^*(t+1) \\ \times x(t+2) x^*(t+2) \quad (28)$$

下面证明这样一个结论:累积量只要含有时间延迟时,累积量的时间平均多谱为零,当累积量无时间延迟时,累积量的时间平均多谱才有可能不为零.为了证明的方便,下面作一变量代换令

$$X_1(t) = S_{l_1}(t) S_{l_2}(t) \\ X_2(t+1) = S_{l_3}(t+1) S_{l_4}(t+1) \\ X_3(t+2) = S_{l_5}(t+2) S_{l_6}(t+2)$$

严格的书写, $X_1(t)$ 应写成 $X_{S_{l_1} S_{l_2}}(t)$, 这不影响证明过程. 因此将式(28)用 C-M 公式展开得

$$E\{X_1(t) X_2(t+1) X_3(t+2)\} \\ = E\{X_1(t)\} E\{X_2(t+1)\} E\{X_3(t+2)\} \\ + E\{X_1(t)\} \text{cum}\{X_2(t+1), X_3(t+2)\} \\ + E\{X_2(t+1)\} \text{cum}\{X_1(t), X_3(t+2)\} \\ + E\{X_3(t+2)\} \text{cum}\{X_1(t), X_2(t+1)\} \\ + \text{cum}\{X_1(t), X_2(t+1), X_3(t+2)\} \quad (29)$$

下面证明展开式(29)除第一项外,其余项的时间平均多谱为零,不妨先证第二项的时间平均多谱为零.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E\{X_1(t)\} \text{cum}\{X_2(t+1), X_3(t+2)\} e^{-j\omega_1 t} e^{-j\omega_2 t} \quad (30)$$

由 L-S 公式^[15],可将上式化为

$$|E\{S_{l_1}(t) S_{l_2}(t)\}| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \text{cum}\{S_{l_3}(t+1), S_{l_5}(t+2)\} \text{cum}\{S_{l_4}(t+1), S_{l_6}(t+2)\} \\ + \text{cum}\{S_{l_3}(t+1), S_{l_6}(t+2)\} \\ \times \text{cum}\{S_{l_4}(t+1), S_{l_5}(t+2)\} \\ + \text{cum}\{S_{l_3}(t+1), S_{l_4}(t+1), S_{l_5}(t+2), S_{l_6}(t+2)\} \quad (31)$$

式(31)又可化为

$$|E\{S_{l_1}(t) S_{l_2}(t)\}| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T |C_{S_{l_3} S_{l_5}}(\tau)| |C_{S_{l_4} S_{l_6}}(\tau)| \\ + |C_{S_{l_3} S_{l_6}}(\tau)| |C_{S_{l_4} S_{l_5}}(\tau)| \quad (32)$$

对上式(32)的两项分别使用施瓦兹不等式,可得

$$|E\{S_{l_1}(t) S_{l_2}(t)\}| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \sqrt{|C_{S_{l_3} S_{l_5}}(\tau)|^2 |C_{S_{l_4} S_{l_6}}(\tau)|^2} \\ + \sqrt{|C_{S_{l_3} S_{l_6}}(\tau)|^2 |C_{S_{l_4} S_{l_5}}(\tau)|^2} \quad (33)$$

由互可混条件,可证得式(33)大括号内的求和项都为有限值,从而就证明了式(29)第二项的时间平均多谱为零,同理可证其它项的时间平均多谱为零.这里需要说明的是上述没有考虑取共轭,由于证明的过程主要利用的是绝对可和性,而取共轭不影响绝对可和性.从而可得

$$\bar{M}_{6,x}(1, 2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^6} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T E\{S_{l_1}^*(t) S_{l_2}^*(t)\} \\ \times E\{S_{l_3}^*(t) S_{l_4}(t)\} E\{S_{l_5}^*(t) S_{l_6}(t)\} \\ \cdot (1 + (\phi_{l_3} - \phi_{l_4})) (2 + (\phi_{l_5} - \phi_{l_6})) \\ \cdot (-\phi_{l_1} - \phi_{l_2} - \phi_{l_3} + \phi_{l_4} - \phi_{l_5} + \phi_{l_6}) \quad (34)$$

令 $\omega_1 = 0$, 又由假设(A1)可得

$$\bar{M}_{6,x}(1, 2) \big|_{\omega_1=0} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^6} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T E\{S_{l_1}^*(t) S_{l_2}^*(t)\} \\ \times E\{S_{l_5}^*(t) S_{l_6}(t)\} (2 + (\phi_{l_5} - \phi_{l_6})) \\ \cdot (-\phi_{l_1} - \phi_{l_2} - \phi_{l_5} + \phi_{l_6}) \quad (35)$$

要六阶时间平均矩谱切片有非零值,当且仅当,

$$2 + \phi_{l_5} - \phi_{l_6} = 0 \bmod(2\pi) \quad (36-a)$$

$$-\phi_{l_1} - \phi_{l_2} - \phi_{l_5} + \phi_{l_6} = 0 \bmod(2\pi) \quad (36-b)$$

下面分几种情形进行讨论,

(I) 满足(36-b)的四个频率全不为零,由于假设(A1),此

情形显然不成立.

(II) 满足(36-b)的四个频率只有一个为零,由假设(A1)可知此情形不成立.

(III) 满足(36-b)的四个频率中只有二个为零,由假设(A1)可知 l_6 不能为零, l_1 、 l_2 、 l_5 中有二个为零,一个与 l_6 相等.此时,六阶时间平均矩谱切片为

$$\begin{aligned} \bar{M}_{6,x}(1, 2) \Big|_{l_1=0} = & \sum_{l_1=1}^L \sum_{l_3=0}^L E\{S_{l_1}^*(t) S_0^*(t)\} \times E\{S_0^*(t) \\ & S_{l_1}(t)\} E\{S_{l_3}^*(t) S_{l_3}(t)\} (2 - l_1) \\ & + \sum_{l_2=0}^L \sum_{l_3=0}^L E\{S_0^*(t) S_{l_2}^*(t)\} \\ & E\{S_{l_3}^*(t) S_{l_3}(t)\} \times E\{S_0^*(t) S_{l_2}(t)\} \\ & (2 - l_2) + \sum_{l_5=1}^L \sum_{l_3=0}^L E\{S_0^*(t) S_0^*(t)\} \\ & E\{S_{l_3}^*(t) S_{l_3}(t)\} \times E\{S_{l_5}^*(t) S_{l_5}(t)\} (2) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} = & 2 \sum_{l_2=1}^L \sum_{l_3=0}^L E\{S_0^*(t) S_{l_2}^*(t)\} E\{S_{l_3}^*(t) S_{l_3}(t)\} \\ & \times E\{S_0^*(t) S_{l_2}(t)\} (2 - l_2) \\ & + \sum_{l_5=1}^L \sum_{l_3=0}^L E\{S_{l_1}^*(t) S_0^*(t)\} E\{S_{l_3}^*(t) S_{l_3}(t)\} \\ & \times E\{S_{l_5}^*(t) S_{l_5}(t)\} (2) \end{aligned} \quad (38)$$

() 满足(36-b)的频率全为零,此时的时间平均矩谱切片为

$$\begin{aligned} \bar{M}_{6,x}(1, 2) \Big|_{l_1=0} = & \sum_{l_3=0}^L E\{S_0^*(t) S_0^*(t)\} \\ & \times E\{S_{l_3}^*(t) S_{l_3}(t)\} E\{S_0^*(t) S_0(t)\} (2) \end{aligned} \quad (39)$$

综上所述,观测信号的六阶时间平均矩谱切片为,

$$\begin{aligned} \bar{M}_{6,x}(1, 2) \Big|_{l_1=0} = & \sum_{l_3=0}^L E\{S_0^*(t) S_0^*(t)\} \\ & \times E\{S_{l_3}^*(t) S_{l_3}(t)\} E\{S_0^*(t) S_0(t)\} (2) \\ & + 2 \sum_{l_1=1}^L \sum_{l_3=0}^L E\{S_0^*(t) S_{l_1}^*(t)\} E\{S_{l_3}^*(t) S_{l_3}(t)\} \\ & \times E\{S_0^*(t) S_{l_1}(t)\} (2 - l_1) \\ & + \sum_{l_5=1}^L \sum_{l_3=0}^L E\{S_{l_1}^*(t) S_0^*(t)\} E\{S_{l_3}^*(t) S_{l_3}(t)\} \\ & \times E\{S_{l_5}^*(t) S_{l_5}(t)\} (2) \end{aligned} \quad (40)$$

若令 $A = \sum_{l=0}^L E\{S_l^*(t) S_l(t)\}$, 从而可得定理 2 的形式, 证毕.

参考文献:

- [1] A Swami, J M Mendel. Cumulant-based approach to harmonic retrieval problem [A]. Proceeding of 1988 IEEE ICASSP[C]. USA: IEEE, 1998.
- [2] 梁应敞, 王树勋, 戴逸松. 非高斯有色噪声中的正弦信号频率估计[J]. 电子学报, 1995, 23(4): 111 - 114.
- [3] Yan Zhang, Shur Xun Wang. Harmonic Retrieval in Colored non-Gaussian noise using cumulants [J]. IEEE Trans., 2000, SP-48(4): 982 - 987.
- [4] 张严, 王树勋, 李生红. 二次相位耦合的 $1/\frac{1}{2}$ 谱分析方法[J]. 电子学报, 1996, 24(4): 109 - 113.
- [5] 梁应敞. 非最小相位信号建模及谐波恢复的高阶统计量算法研究[D]. 长春: 吉林工业大学, 1993.
- [6] GB Gannakis, G Zhou. Harmonics in multiplicative and additive parameter estimation using cyclic statistics [J]. IEEE Trans., 1995, SP-43(9): 2217 - 2221.
- [7] G Zhou, G B. Gannakis. Polyspectral analysis of mixed process and coupled harmonics [J]. IEEE Trans., 1996, IT-42(3): 943 - 958.
- [8] O Besson, F Castanie. On estimating the frequency of sinusoid in autoregressive multiplicative noise [J]. IEEE Trans., 1993, SP-30: 65 - 83.
- [9] O Besson, P Stoica. Analysis of MUSIC and ESPRIT frequency estimate for sinusoidal signals with lowpass envelopes [J]. IEEE Trans., 1996, SP-44(9): 2359 - 2364.
- [10] R F Dwyer. Fourth-order spectra of Gaussian amplitude modulated sinusoids [J]. Journal of the Acoust. Soc 1991, 90: 918 - 926.
- [11] A Swami. Multiplicative noise models: parameter estimation using cumulants [J]. IEEE Trans., 1994, 36(3): 355 - 373.
- [12] 程乾生, 李宏伟. 调幅信号的参数循环累量估计[J]. 电子学报, 1998, 26(7): 99 - 104.
- [13] 李宏伟, 程乾生. 乘性和加性噪声中谐波恢复的循环统计方法[J]. 电子学报, 1998, 26(7): 105 - 111.
- [14] Xianda Zhang, Yingchang Liang, Yanda Li. A Hybrid approach to harmonic retrieval in non-Gaussian ARMA noise [J]. IEEE Trans., 1994, IT-40(4): 1220 - 1226.
- [15] D R Brillinger. Time Series: Data Analysis and Theory [M]. San Francisco, CA: Holden-Day, 1981.

作者简介:

徐 景 男, 1975 年生于江苏无锡, 1998 年于吉林工业大学获学士学位, 2001 年于吉林大学获通信与信息系统硕士学位, 现为东南大学移动通信国家重点实验博士生, 研究方向为移动通信新技术.

王树勋 男, 1946 年生于吉林长春, 1970 年毕业于清华大学电机系, 1983 年在吉林工业大学获硕士学位, 现为吉林工业大学教授、博士生导师, 研究方向为高阶统计量在数字信号处理中的应用及微计算机应用, 已出版专著 3 部, 发表论文 30 余篇.