通信网中链路重要性的评价方法

陈 勇,胡爱群,蔡天佑,钟子果
(东南大学无线电工程系,江苏南京 210096)

摘 要: 本文提出了一种通信网链路重要性的评价方法,该方法可以评价全网范围内的链路重要性.最重要的链路是将其进行边收缩操作后,得到的图的生成树数目最多.通过比较生成树的数目,我们可以判断通信网中任意两条链路的相对重要性.基于生成树数目的边收缩方法反映了某条链路处于正常工作时,对整个通信网的贡献大小.实验结果和理论分析均证明了该方法的有效性和可行性.

关键词: 通信网; 生成树数目; 边删除; 边收缩
中图分类号: TN913.21 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112(2003)04-0573-03

Evaluation Method for Link Importance in Communication Networks

CHEN Yong, HU Ai-qun, CAI Tian-you, ZHONG Zi-guo
(Department of Radio Engineering, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China)

Abstract: An algorithm to determine the most vital edges of a communication network is presented in this paper. Since a spanning tree consisting of non-failed edges must exist in order for a success state to occur in the all-terminal problem, the number of such spanning trees is a measure of reliability. For a given edge e in the graph G, G * e is the graph with the edge contracted, where the edge denotes a link and the vertex denotes a node respectively. The relative importance of the two edges in the graph can be compared by computing the number of spanning trees of G * e for each of the two edges. The most vital edge in G is an edge whose contraction maximizes the number of spanning trees and whose proper functioning contributes most to system reliability. Experimental results and theoretical analysis show that the edge-contraction algorithm is effective and feasible.

Key words: communication networks; number of spanning trees; edge-deletion; edge-contraction

1 引言

在通信网的设计和维护过程中,网络可靠性是一项重要的性能指标,许多学者对此作了大量的研究.对通信网链路的重要性进行评价,是通信网系统可靠性研究的方向之一[1~8].如何有效地评价通信网链路的重要性,有着十分广泛的实际意义.由于人为因素和自然因素,通信网链路容易发生故障,对通信网的可靠性造成影响.当有多条链路同时发生故障时,需要考虑如何确定维修的先后顺序,使通信网遭受的损失最小.或者在设计网络时,需要对网络中某些链路重点维护,减少它们的故障,以提高整个通信网的可靠性.

通信网链路重要性取决于链路对通信网可靠性的影响程度.因此,针对通信网可靠性的不同测度,也就产生了不同的评价通信网链路重要性的方法.作者对链路重要性的评价准则进行了归纳,常用的评价准则有:1) 最大流[2],2) 最小路集-割集[3],3) 最短路径[4,5],4) 可靠性多项式[3,6],5) 最小生成树[7],6) 生成树的数目[1,8],这正是本文的研究内容.

文献[1]根据生成树的数目评价全网范围内的链路重要性,认为某条边从图中删除后,所得到的图对应的生成树数目最少,则该边最重要.链路失效对网络影响越大,则该链路越重要,文献[1]很好地反映了这种情况.而本文从链路正常工作的角度出发,提出针对边收缩的链路重要性评价方法,认为某条边收缩后,得到的图对应的生成树数目越多,则该边越重要.该方法反映了链路处于正常工作时,对整个通信网的贡献.实验结果和理论分析均证明了该方法的有效性和可行性.

2 网络模型与理论基础

2.1 网络模型

通信网可用图 $G=(V,E)$ 表示,假设 G 为无自环的无向连通图,有 n 个顶点,m 条边.$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 代表顶点集合,图的顶点对应网络的节点,$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 代表边集合,图的边对应网络的链路.网络中 n 个节点间不能相互备份,也没有多余的备份节点;网络拓扑结构固定不变;网络中所有节点不发生故障;网络中所有链路的故障率相同,均为 p $(0<p<1)$,但不需要知道其具体数值.网络的链路只有两种工作状态:正常和失效.每条链路的故障发生是相互独立的.

收稿日期:2002-08-21;修回日期:2002-11-15
基金项目:教育部优秀青年教师资助计划项目

G 的全顶点关联矩阵 $A_c=[a_{ij}]$ 有 n 行和 m 列,每行对应一个节点,每列对应一条链路. A_c 的元素 a_{ij} 定义如下: G 为有向图时,

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{第 } j \text{ 条边与第 } i \text{ 个顶点关联,且离开第 } i \text{ 个顶点}\\ -1 & \text{第 } j \text{ 条边与第 } i \text{ 个顶点关联,且指向第 } i \text{ 个顶点}\\ 0 & \text{第 } i \text{ 个顶点与第 } j \text{ 条边无关联}\end{cases} \tag{1}$$

A_c 的一行称为 G 的一个关联向量. 从上面的叙述可看出, A_c 的每一列恰好含有两个非零元素,分别为 +1 和 -1. 因此,可从任意剩余的 $n-1$ 行得出删除的那一行. 这样, A_c 的任意 $n-1$ 行都包含了关于 A_c 的全部信息,也就是说, A_c 中的各行是线性相关的. A_c 的任意 $(n-1)$ 行子矩阵 A 称为图 G 的一个关联矩阵. 对应于 A_c 中某行但不在 A 中的顶点称为 A 的参考顶点.

2.2 理论基础

如果一个矩阵的每个子方阵的行列式为 1, -1 或 0, 则该矩阵是单位模的.

引理 1[9] 有向图的全顶点关联矩阵 A_c 是单位模的.

计算连通图的生成树数目的公式可由 Binet-Cauchy 定理的矩阵理论导出. 根据引理 1 和 Binet-Cauchy 定理,可得下面的定理.

定理 1[9] 设 G 是连通无向图, A 是由 G 的每条链路任意标定方向后所得到的有向图的关联矩阵. 因此

$$\tau(G)=\det(AA^{\mathrm{T}}) \tag{2}$$

其中, $\tau(G)$ 是 G 的生成树的数目.

3 基于生成树数目的边收缩方法

3.1 算法描述

设 e 是图 $G=(V,E)$ 的一条边,则 $G-e$ 是从 G 中删除边 e 后所得的子图. 值得注意的是,边 e 的端点并不从 G 中删除. 图 G 的一对顶点 v_i 和 v_j 短接,指的是这两个顶点由一个新顶点代替,原先与 v_i 和 v_j 关联的所有边现在都与新顶点关联. 边的收缩是指将边删除,并把它的端点短接, $G*e$ 是从 G 中收缩边 e 后得到的子图.

文献[1]根据生成树的数目评价全网范围内的链路重要性,认为某条边从图中删除后,所得到的图对应的生成树数目最少,则该边最重要. 链路失效对网络影响越大,则该链路越重要. 而本文从链路正常工作的角度出发,提出针对边收缩的链路重要性评价方法,认为某条边收缩后,得到的图对应的生成树数目越多,则该边越重要.

令 *edgnum* 代表图的边数, *vtxnum* 代表图的顶点数, *flag* 用来表示指定边的两个端点的标号,数组 *nst* 存储各边的生成树数目,对于已知拓扑结构图,可以直接输入 A_c 完成初始化,在实际的仿真过程中,通过计算机按要求随机产生满足 A_c 性质的输入初始值,同样不难实现. 因此,本文算法可简描述如下:

输入:图 G 的全顶点关联矩阵 A_c

输出:图 G 中的各条链路分别进行边收缩操作后,所得到的图对应的生成树数目.

```
  begin
初始化图 G 的全顶点关联矩阵 Ac.
FOR j := 1 TO edgnum DO {主循环,计算各链路对应的生成树数目}
{k := 0;
nst[j] := 0;
    FOR i := 1 TO vtxnum DO
    IF Ac[i,j] ≠0 THEN flag[k+1] := Ac[i,j];
B := Ac - Ac(the flag[1] - throw) - Ac(thflag[2] - throw);
A := B - B(the j-th column);
nst[j] := det(AA^T);
}
  end
```

3.2 实验结果

利用图 1 的 ARPA 网络对边收缩方法进行说明,图中共有 21 个节点和 26 条链路. 图 2 是图 1 中各条链路任意标定方向后得到的有向图,式(3)是与之相对应的 A_c,式中的各行之间交换位置,不影响计算结果,这是因为相应的操作相当于图中的节点标号发生变化,网络的拓扑结构不受影响. 各列之间同样可交换位置,只不过链路的标号也需要随之发生变化. 对图 1 同时应用文[1]中的方法和本文方法,结果如表 1 所示.

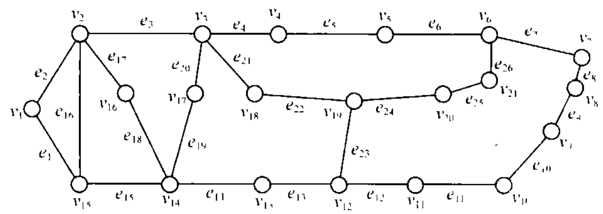


图 1 ARPA 网络模型[3]

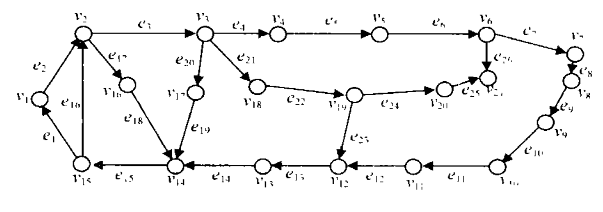


图 2 ARPA 网络中各条链路任意标定方向后得到的有向图

$$A_c=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & e_{17} & e_{18} & e_{19} & e_{20} & e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26}\end{array} \\ \begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7\\ v_8\\ v_9\\ v_{10}\\ v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\\ v_{14}\\ v_{15}\\ v_{16}\\ v_{17}\\ v_{18}\\ v_{19}\\ v_{20}\\ v_{21}\end{array} & \begin{bmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{bmatrix}\end{array} \tag{3}$$

从表 1 可以看出,当标号为 16 的链路从图中删除后,利用文[1]的方法,得到的数值与用其它链路计算所得的结果相比最大,所以该链路具有最小的重要性. 与此相对应,利用本

文方法,该链路的计算结果与其它链路相比最小,同样表明该链路具有最小的重要性. 观察标号 24,25,26 的三条链路,对这几条链路计算得到的结果相同,表明这三

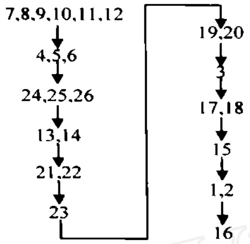


图 3　链路重要性的排序结果

表 1　文献[1]方法与本文方法的计算结果

链路标号	生成树的数目	
	文献[1]方法	本文方法
1,2	5856	9811
3	4807	10860
4,5,6	2527	13140
7,8,9,10,11,12	1884	13783
13,14	3053	12614
15	5703	9964
16	7757	7910
17,18	5266	10401
19,20	4736	10931
21,22	3602	12065
23	3733	11934
24,25,26	2697	12970

条链路具有相同的重要性. 这一点不难理解,如果两条链路有一个度为 2 的公共顶点,那么删除或收缩其中的一条链路就相当于删除或收缩另一条链路. 采用 Hasse 图表法对图 1 的链路进行重要性排序,结果如图 3 所示. 自上而下代表链路重要性由高到低,两种方法的排序结果完全一致.

4　边删除方法和边收缩方法的等价性证明

上节中分别采用两种不同的方法,得到的评价结果完全一致,这不是偶然的. 这里要证明文献[1]的边删除方法和本文提出的边收缩方法,在链路重要性评价效果上是等价的.

定理 2　设 e 是无向图 G 的非环状边,$\tau(G)$,$\tau(G-e)$ 和 $\tau(G*e)$ 分别表示图 G,$G-e$ 和 $G*e$ 的生成树数目,则基于生成树数目的边删除方法与边收缩方法,在评价全网范围内的链路重要性时是等价的.

证明　由于 e 是图 G 的非环状边,有时也称为连杆,显然,e 或者包含在图 G 的一个生成树中,或者不包含在图 G 的一个生成树中. 图 G 中包含 e 的生成树与图 $G*e$ 的生成树一一对应,即 $\tau(G*e)$ 是 G 中包含 e 的生成树的数目. 另一方面,G 中不包含 e 的生成树与 $G-e$ 的生成树一一对应,即 $\tau(G-e)$ 是 G 中不包含 e 的生成树的数目. 所以,$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G*e)$. 又因为 $\tau(G-e)$ 与基于生成树数目的边删除方法对应,而 $\tau(G*e)$ 与基于生成树的边收缩方法对应,所以两者在评价全网范围内的链路重要性的效果是等价的. 证毕.

5　结论

本文提出了采用生成树数目评价准则的边收缩方法,用来评价通信网链路的重要性. 概括地讲,文献[1]中的方法与本文中的方法分别考虑如下两种情况:

1) 当链路 e 出现故障时对整个通信网的破坏程度;

2) 当链路 e 正常工作时对整个通信网的贡献大小.

对于链路 e_1、e_2 而言,在全网范围内,如果有:

1) $G-e_1$ 的生成树数目小于 $G-e_2$ 的生成树数目;

2) $G*e_1$ 的生成树数目大于 $G*e_2$ 的生成树数目.

两个条件同时成立时,可无疑地确定 e_1 比 e_2 重要. 文中证明了两个条件的等价性,揭示了两者之间内在的必然联系,从而完善了通信网可靠性理论.

致谢　感谢 Florida Atlantic University 数学科学系的 Stephen C. Locke 教授对本文有益的帮助和指导.

参考文献:

[1] F P Tsen, T Y Sung, M Y Lin, et al. Finding the most vital edges with respect to the number of spanning trees [J]. IEEE Trans Reliability, 1994, 43(4): 600 - 602.

[2] M O Ball, B L Golden, R V Vohra. Finding the most vital arcs in a network [J]. Operations Research Letters, 1989, 8: 73 - 76.

[3] L B Page, J E Perry. Reliability polynomials and link importance in networks[J]. IEEE Trans. Reliability, 1994, 43(1): 51 - 58.

[4] E Nardelli, G Proietti, P Widmayer. Finding the detour-critical edge of a shortest path between two nodes [J]. Information Processing Letters, 1998, 67(1): 51 - 54.

[5] E Nardelli, G Proietti, P Widmayer. A faster computation of the most vital edge of a shortest path [J]. Information Processing Letters, 2001, 79(2): 81 - 85.

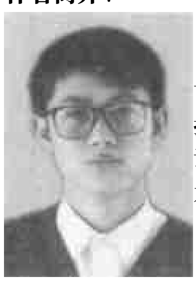
[6] L Traldi. Commentary on: Reliability polynomials and link importance in Networks [J]. IEEE Trans Reliability, 2000, 49(3): 322.

[7] L H Hsu, R H Jan, Y C Lee, et al. Finding the most vital edge with respect to minimum spanning tree in weighted graphs [J]. Information Processing Letters, 1991, 39: 277 - 281.

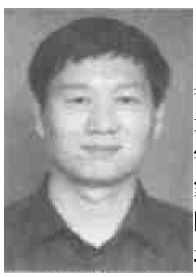
[8] V V B Rao. Most-vital edge of a graph with respect to spanning trees [J]. IEEE Trans. Reliability, 1998, 47(1): 6 - 7.

[9] M N S Swamy, K Thulasiraman. Graphs, Networks, and Algorithms [M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1981.

作者简介:



陈　勇　男,1976 年 4 月出生于吉林省延边市,2001 年毕业于南京理工大学电子工程与光电技术学院,获工学硕士学位,现正在东南大学攻读信号与信息处理专业博士学位,主要研究方向为通信网的可靠性、信息安全、无线局域网等.



胡爱群　男,1964 年 11 月出生于江苏省如皋市,教授,博士生导师,1992 年毕业于东南大学无线电工程系信号与信息处理专业,获工学博士学位,现为东南大学信息安全研究中心主任,国家 863 计划信息安全主题专家组成员,在国际、国内核心期刊上发表学术论文 30 余篇,研究领域为信息安全、通信信号处理.