关于正交小波包变换的几点理论探讨

李合生[1,2],毛剑琴[3],赵明生[2],吴佑寿[2]
(1. 中国工程物理研究院电子工程研究所,四川绵阳 621900;2. 清华大学电子工程系,北京 100084;
3. 北京航空航天大学第七研究室,北京 100083)

摘 要: 本文对正交小波包基函数在不同尺度上的传递关系、正交小波包变换系数在不同尺度上的传递关系、高斯白噪声的正交小波包变换系数的统计特性、以及正交小波包基的相关函数性质进行了理论研究,并获得了相应的理论结果,仿真实验验证了理论研究的正确性.

关键词: 小波包变换; 小波包基; 高斯白噪声; 相关函数
中图分类号: TN911 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2005) 01-0106-05

Some Theoretical Problems on Wavelet Packet Transform

LI He-sheng[1,2], MAO Jian-qin[3], ZHAO Ming-sheng[2], WU You-shou[2]
(1. *Institute of Electronics Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang, Sichuan* 621900, *China*;
2. *Dept. of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*;
3. *The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing* 100083, *China*)

Abstract: Some theoretical problems such as the transitive relation of orthonormal wavelet packet basis at different scales, the transitive relation of wavelet packet decomposition coefficients at different scales, the statistical attributes of wavelet packet decomposition coefficients for white Gauss noise, and the properties of correlation function for orthonormal wavelet packet basis are investigated, and some theoretical results are obtained successfully, Simulation results show the validity of the obtained theory results.

Key words: wavelet packet transform; wavelet packet basis; white gauss noise; correlation function

1 引言

自从 1984 年法国地球物理学家 J. Morlet 首先提出小波变换的概念以来,小波变换的理论得到了广泛发展,其中最具影响的是: Mallat 将计算机视觉领域内的多尺度分析的思想引入到小波分析中,提出了应用于分解和重构的 Mallat 算法[1]; Daubechies 构造了具有有限支集的正交小波基[2]. 小波变换的最大特点是在时域对信号具有任意的时间局部化分析功能,而在频域对信号具有任意的频率局部化分析功能,因此小波变换被誉为信号分析的显微镜[3]. 目前小波变换在信号处理、图象处理、语音识别等许多工程领域得到了广泛应用.

由于 Mallat 算法仅对信号低频成分进行再分解,而对高频成分不再分解,为了弥补这种不足, Wickerhanser 和 Coifman 等人将 Mallat 算法进一步深化,得到了能同时对信号低频成分和高频成分进行再分解的小波包算法[4,5]. 目前小波包变换的理论还不够完善,本文试图对小波包基以及小波包变换系数在不同尺度上的传递关系、高斯白噪声的小波包变换系数的统计特性、小波包基的相关函数进行理论上的探讨,为工程应用提供理论支持.

2 正交小波包基函数的递推关系

在小波包分析中,由尺度函数 $\phi(t)$ 通过双尺度差分方程[6]

$$\begin{cases} w_{2n}(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in Z} h_k w_n(2t-k) \\ w_{2n+1}(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in Z} g_k w_n(2t-k) \end{cases} \tag{1}$$

生成函数组 $\{w_{n,j,k}(t) = 2^{-j/2} w_n(2^{-j}t-k),\ n\in Z/Z^-,\ j\in Z,\ k\in Z\}$ 称为关于 $\phi(t)$ 的正交小波包基,其中 $w_0(t)=\phi(t)$, $\{h_k\}_{k\in Z}$ 和 $\{g_k\}_{k\in Z}$ 是由 $\phi(t)$ 导出的一对共轭正交滤波器系数.

本节在给出正交小波包基函数的递推关系之前,先援引如下定义.

定义 1[6] 从空间 $l^2(Z)$ 向空间 $l^2(2Z)$ 的投影算子定义为 F_0、F_1

$$\begin{cases} F_0(S_k)(l) = \sum_{k\in Z} h_{k-2l} S_k \\ F_1(S_k)(l) = \sum_{k\in Z} g_{k-2l} S_k \end{cases} \tag{2}$$

其中, $\{h_n\}$、$\{g_n\}$ 为双尺度差分方程中的低通和高通滤波器系数.

定理 1 设小波包变换的初始尺度为 j_0,小波包分解层数为 $m\in Z^+$,则在分解尺度 $j=j_0+m$ 上对任意 $n\in\{0,1,\cdots,2^m-1\}$,小波包空间 $U^n_{j_0+m}$ 的正交小波包基函数 $w_{n,j,l(t)}$ 可表示成

$$w_{n,j,l}(t) = F_{e1}\{F_{e2}\{\cdots\{F_{e_{ni}}\{w_{0,j-n,k}(t)\}(k_{n_i})\}\cdots\}(k_2)\}(l) \tag{3}$$

简写为

$$w_{n,j,l}(t) = F_{e1}F_{e2}\cdots F_{e_{ni}}\{w_{0,j-n,k}(t)\}(l) \tag{4}$$

其中, $\{w_{0,j-n,k}(t)\}_{k\in Z}$ 为小波包空间 $U^0_{j-n_i}$(亦即是尺度空间 V_{j-n_i})的标准正交基, e_i 为 n 的二进表示的第 i 个系数,即

$$n = \sum_{i=1}^{n_i} e_i 2^{i-1} \quad (n_i \text{ 为二进表示中的最大指数}) \tag{5}$$

收稿日期:2002-07-16;修回日期:2003-12-10
基金项目:国防行业重点预研项目(No. 421010103);中国工程物理研究院重大基金(No. 200270402O);中国博士后科学基金(No. 023210003)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证明　由式(1)和式(2)可得到正交小波包基函数伸缩平移系的双尺度差分方程为

$$\begin{cases} w_{2n,j,l}(t) = \sum_{k\in Z} h_{k-2l} w_{n,j-1,k}(t) = F_0\{w_{n,j-1,k}(t)\}(l) \\ w_{2n+1,j,l}(t) = \sum_{k\in Z} g_{k-2l} w_{n,j-1,k}(t) = F_1\{w_{n,j-1,k}(t)\}(l) \end{cases} \tag{6}$$

对于式(4),下面采用数学归纳法来证明.

(1)当 n = 0 时,将 $n=0$ 表示成式(5)形式,有

$$n = 0 = \sum_{i=1}^{i} e_i \cdot 2^{i-1},\ \text{此处}\ e_1 = 0 \tag{7}$$

此时 $n_i = 1$. 由式(6),则

式(4)右边 $= F_0\{w_{0,j-1,k}(t)\}(l) = w_{0,j,l}(l) =$ 式(4)左边 (8)

(2)当 n = 1 时,将 $n=1$ 表示式(5)形式,有

$$n = 1 = \sum_{i=1}^{i} e_i \cdot 2^{i-1} \text{此处}\ e_1 = 1 \tag{9}$$

此时 $n_i = 1$. 由式(6),则

式(4)右边 $= F_1\{w_{0,j-1,k}(t)\}(l) = w_{1,j,l}(l) =$ 式(4)左边 (10)

(3)归纳假设条件,对任意的 $n_0 \in \{1, \cdots, 2^m - 1\}$,假设当 $1 < n \leq n_0$ 时式(4)成立;

(4)下面证明当 n = n₀ + 1 时式(4)也成立

①当 n_0 为偶数时,设

$$n_0 = 2m,\ m \in N \tag{11}$$

则

$$n = n_0 + 1 = 2m + 1 \tag{12}$$

根据式(6),有

$$\begin{aligned} w_{n,j,l}(t) &= w_{2m+1,j,l}(t) = \sum_{k\in Z} g_{k-2l} w_{m,j-1,k}(t) \\ &= F_1\{w_{m,j-1,k}(t)\}(l) \end{aligned} \tag{13}$$

根据式(11),显然 $m \leq n_0$,由归纳假设条件(3),必然成立

$$w_{m,j-1,k}(t) = F_{e_1} F_{e_2} \cdots F_{e_{m_i}}\{w_{0,j-1-m,k}(t)\}(l) \tag{14}$$

其中,e_1、e_2、…、e_{m_i}为 m 的二进表示系数.

由式(13)、(14),有

$$\begin{aligned} w_{n,j,l}(t) = w_{2m+1,j,l}(t) &= F_1[F_{e_1} F_{e_2} \cdots F_{e_{m_i}}] \\ &\{w_{0,j-(1+m),k}(t)\}(l) \end{aligned} \tag{15}$$

设 n 的二进表示系数为 $e'_1, e'_2, \cdots, e'_{n_i}$,由式(5)及式(12),显然有

$$e'_1 = 1, e'_2 = e_1, \cdots, e'_{n_i} = e_{m_i}, n_i = m_i + 1 \tag{16}$$

故

$$w_{n,j,l}(t) = F_{e'_1} F_{e'_2} \cdots F_{e'_{n_i}}\{w_{0,j-n_i,k}(t)\}(l) \tag{17}$$

②当 n_0 为奇数时,同理可证式(4)对 $n = n_0 + 1$ 成立.

综上步骤①和②可知,当 $n = n_0 + 1$ 时定理 1 成立.

由上面的证明步骤(1)、(3)、(4),定理 1 得到证明.

定理 2　设初始尺度为 j_0,小波包分解层数为 $m \in Z^+$,则在分解尺度 $j = j_0 + m$ 上对任意 $n \in \{1, \cdots, 2^m - 1\}$,小波包空间 $U^n_{j_0+m}$ 的正交小波包基函数 $w_{n,j_0+m,k}(t)$,也即是 $w_{n,j,l}(t)$ 可表示成

$$w_{n,j,l}(t) = F_{e_1} F_{e_2} \cdots F_{e_{n_i-1}}\{w_{1,j-(n_i-1),k}(t)\}(l) \tag{18}$$

其中,F_0、F_1 为定义 1 中的投影算子,e_i 为 n 的二进表示的第 i 个系数.

证明　对于任意 $n \in \{1, \cdots, 2^m - 1\}$,$n$ 可二进表示成式(5)形式

$$n = \sum_{i=1}^{n_i} e_i 2^{i-1} \tag{19}$$

其中,e_i 为 n 的二进表示的第 i 个系数,n_i 为 n 的二进表示中的最大指数.

由于 $n \in \{1, \cdots, 2^m - 1\}$,显然 $n_i \geq 1$,且必然 $e_{n_i} = 1$. 否则,若 $e_{ni} = 0$,则推出 $n = 0$,与已知矛盾. 因此,根据定理 1 的式(4)得到

$$\begin{aligned} w_{n,j,l}(t) &= F_{e_1} F_{e_2} \cdots F_{e_{n_i-1}} F_1\{w_{0,j-n_i,k}(t)\}(l) \\ &= F_{e_1} F_{e_2} \cdots F_{e_{n_i-1}} w_{1,j-n_i,k}(t)\}(l) \end{aligned} \tag{20}$$

因此定理 2 得以证明.

定理 1 和定理 2 从理论上给出了小波包变换过程中,对于不同分解尺度 j 上不同小波包空间 U^n_j 的标准正交小波包基的计算方法.

3　平方可积函数的正交小波包变换系数递推关系

定义 2[6]　对于信号 $f(t) \in L^2(R)$,小波包变换定义为 $f(t)$ 在正交小波包基 $\{w_{n,j,k}(t)\}_{n\in Z/Z^-, j\in Z, k\in Z}$ 上的投影系数,即:

$$p_f(n,j,k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,[2^{-j/2}\overline{w_n}(2^{-j}t - k)]\,dt \tag{21}$$

下面对信号 $f(t) \in L^2(R)$ 在不同正交小波包空间的投影系数 $p_f(n,j,k)$ (小波包变换系数)给出其理论递推算法.

定理 3　设初始尺度为 j_0,小波包分解层数为 $m \in Z^+$,则在分解尺度 $j = j_0 + m$ 上对任意的 $n \in \{1, \cdots, 2^m - 1\}$,信号 $f(t) \in L^2(R)$ 在小波包空间 $U^n_{j_0+m}$ 上的投影系数 $\{p_f(n, j_0 + m, k)\}_{k\in Z}$,也即是 $\{p_f(n,j,k)\}_{k\in Z}$ 具有如下关系

$$p_f(n,j,k) = F_{e_1} F_{e_2} \cdots F_{e_{n_i}}\{p_f(0, j-n, l)\}(k) \tag{22}$$

其中,$\{p_f(0, j-n_i, l)\}_{l\in Z}$ 为信号 $f(t)$ 在小波包空间 $U^0_{j-n_i}$ 中的投影系数;e_i 为 n 的二进表示的第 i 个系数,n_i 为 n 的二进表示中的最大指数.

证明　对于任意的 $n \in \{1, \cdots, z^m - 1\}$,根据定理 1,正交小波包空间 U^n_j 的正交小波包基 $\{w_{n,j,k}\}_{k\in Z}$ 具有如下表达式

$$w_{n,j,k} = F_{e_1} F_{e_2} \cdots F_{e_{n_i}}\{w_{0,j-n_i,l}(t)\}(k) \tag{23}$$

根据投影系数 $p_f(n,j,k)$ 的定义及式(23),有

$$\begin{aligned} p_f(n,j,k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,[2^{-j/2}\overline{w}_n(2^{-j}t - k)]\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,[F_{e_1} F_{e_2} \cdots F_{e_{n_i}}(t)\{w_{0,j-n_i,l}(t)\}(k)]\,dt \\ &= F_{e_1} F_{e_2} \cdots F_{e_{n_i}}\{p_f(0, j-n_i, l)\}(k) \end{aligned} \tag{24}$$

故定理 3 得到证明.

4　高斯白噪声的正交小波包变换系数的统计特性

高斯白噪声 $v(t)$ 在小波包空间 U^n_j 上的正交小波包变换定义为

$$d_v(n,j,k) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,[2^{-j/2}\overline{w}(2^{-j}t - k)]\,dt \tag{25}$$

其中,$\{d_v(n,j,k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 是一个双无限序列. 下面给出 $\{d_v(n, j, k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 在统计意义下的性质.

定理 4　均值为 m_v、方差为 σ^2 的高斯白噪声 $v(t)$,对于

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

任意可能的 $n \in \{0, Z^+\}$,在空间 U_j^n 上进行正交小波包变换的系数序列 $\{d_v(n,j,k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 的均值满足:

(1) 当 $n=0$ 时,$E[d_v(n,j,k)] = 2^{j/2} m_v$;

(2) 当 $n \neq 0$ 时,$E[d_v(n,j,k)] = 0$.

证明

(1) 当 $n=0$ 时,小波包空间 $U_j^n = U_j^0 = V_j$,此时 $\{d_v(n,j,k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 的均值变为

$$E[d_v(n,j,k)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,(2^{-j/2}\overline{w}_0(2^{-j}t-k))\,dt\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} E[v(t)]\,(2^{-j/2}\overline{\varphi}(2^{-j}t-k))\,dt$$
$$= m_v \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-j/2}\overline{\varphi}(2^{-j}t-k)\,dt \qquad (26)$$

由尺度函数 $\varphi(t)$ 的基本性质[7],有

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-j/2}\overline{\varphi}(2^{-j}t-k)\,dt = 2^{j/2} \qquad (27)$$

由式(26)、(27),有 $E[d_v(n,j,k)] = 2^{j/2} m_v \qquad (28)$

(2) 当 $n \neq 0$ 时,n 可二进表示成式(5)形式. 由于 $n \neq 0$,根据定理 2 有

$$E[d_v(n,j,k)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,w_{n,j,k}(t)\,dt\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} E[v(t)]\,w_{n,j,k}(t)\,dt = m_v \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\,dt$$
$$= m_v\left[F_{e_1}F_{e_2}\cdots F_{e_{n_{i-1}}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} w_{1,j-n_i+1,k}(t)\,dt\right)\right] \qquad (29)$$

又因 $w_{1,j-n_i+1,k}(t) = \psi_{-n_i+1,k}(t)$,且 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{-n_i+1,k}(t)\,dt = 0$[7],故由式(29),有 $E[d_v(n,j,k)] = 0 \qquad (30)$

因此定理 4 得到了证明.

定理 5 均值为 0、方差为 σ^2 的高斯白噪声 $v(t)$,对于任意可能的 $n \in \{0, Z^+\}$,在空间 U_j^n 上进行正交小波包变换所得到的系数序列 $\{p_v(n,j,k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$,其方差 $D[p_v(n,j,k)]$ 满足:

$$D[p_v(n,j,k)] = \sigma^2 \qquad (31)$$

证明 对于均值为 0、方差为 σ^2 的连续高斯白噪声 $v(t)$,对任意可能的 $n \in \{0, Z^+\}$,根据定理 4,有

$$E[p_v(n,j,k)] = 0 \qquad (32)$$

所以序列 $\{p_v(n,j,k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 的方差

$$D[p_v(n,j,k)] = E[p_v^2(n,j,k)]$$
$$= E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,\overline{w}_{n,j,k}(t)\,dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} v(s)\,\overline{w}_{n,j,k}(s)\,ds\right)\right]$$
$$= \iint E[v(t)\,v(s)]\,\overline{w}_{n,j,k}(s)\,dtds$$
$$= \iint R_v(t-s)\,\overline{w}_{n,j,k}(t)\,\overline{w}_{n,j,k}^{(s)}\,dtds \qquad (33)$$

对于均值为 0、方差为 σ^2 的高斯白噪声 $v(t)$,其自相关函数必然满足:

$$E[v(t)\,v(s)] = R_v(t-s) = \sigma^2\delta(t-s) \qquad (34)$$

根据式(33)、(34),有

$$D[p_v(n,j,k)] = \sigma^2 \int \overline{w}_{n,j,k}(t))^2\,dt = \sigma^2 \qquad (35)$$

故定理 5 得到证明.

推论 1 均值为 m_v、方差为 σ^2 的高斯白噪声 $v(t)$,对任意可能的 $n \in Z^+$,在空间 U_j^n 上进行得到的系数序列 $\{p_v(n,j,k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$,其方差 $D[p_v(n,j,k)]$ 满足:

$$D[p_v(n,j,k)] = \sigma^2 \qquad (36)$$

证明 对于均值为 m_v、方差为 σ^2 的高斯白噪声 $v(t)$,对任意可能的 $n \in Z^+$,根据定理 4,有

$$D[p_v(n,j,k)] = 0 \qquad (37)$$

根据定理 5,即可得到推论 1 的结论.

定理 4、定理 5 及推论 1 刻划了高斯白噪声在小波包变换下的统计特性,这为了解高斯白噪声的小波包变换系数的规律提供了理论根据.

5 正交小波包基函数的相关函数性质

本节在研究正交小波包基函数的相关函数性质前,首先给出两个定义.

定义 3 对于任意可能的 $n \in \{0, Z^+\}$,小波包空间 U_j^n 中的规范正交小波包基函数 $w_{n,j,k}(t)\{j,k \in Z\}$ 的自相关函数 $F_{w_n}(\tau)$ 定义为:$F_{w_n}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\,w_{n,j,k}(t+\tau)\,dt \qquad (38)$

定义 4 对于任意可能的 $n, m \in \{0, Z^+\}$ 且 $n \neq m$,在分解尺度 j 上小波包空间 U_j^n 和 U_j^m 中的正交小波包基函数 $w_{n,j,k}(t)$、$w_{m,j,l}(t)$ $(j,k,l \in Z)$ 的互相关函数 $F_{w_n,w_m}(\tau)$ 定义为:$F_{w_n,w_m}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\,w_{m,j,l}(t+\tau)\,dt \qquad (39)$

关于 $F_{w_n}(\tau)$、$F_{w_n,w_m}(\tau)$ 的性质,本文得到如下两个理论结果.

定理 6 给定尺度 $j \in Z$,对任意可能的 $n \in \{0, Z^+\}$,小波包空间 U_j^n 的正交小波包基函数 $w_{n,j,k}(t)$ $(k \in Z)$ 的自相关函数 $F_{w_n}(\tau)$ 满足:

(1) $F_{w_n}(\tau)$ 关于原点对称,亦即是 $F_{w_n}(-\tau) = F_{w_n}(\tau)$;

(2) 对任意满足 $2^{-j}\tau \in Z/\{0\}$ 的 τ,$F_{w_n}(\tau) = 0$,且 $F_{w_n}(0) = 1$;

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} F_{w_n}(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 2^j, & \text{当 } n=0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } n \in Z^+ \text{ 时} \end{cases}$;

(4) $\mathcal{F}w_n(\omega) = 2^j |\hat{w}_n(2^j\omega)|^2$,其中符号"$|\ |$"为取模运算.

证明

(1) $F_{w_n}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\,w_{n,j,k}(t-\tau)\,dt \qquad (40)$

令 $t-\tau = t'$,则 $t = t'+\tau$,代入式(40),得到

$$F_{w_n}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t'+\tau)\,w_{n,j,k}(t')\,dt'$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\,w_{n,j,k}(t+\tau)\,dt = F(\tau) \qquad (41)$$

(2) $F_{w_n}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\,w_{n,j,k}(t+\tau)\,dt$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\,w_{n,j,k-2^{-j}\tau}(t)\,dt \qquad (42)$$

由于 $\{w_{n,j,k}(t)\}_{k \in Z}$ 构成小波包空间 U_j^n 的规范正交基,故当 $k \neq k-2^{-j}\tau$,且 $(k-2^{-j}\tau) \in Z$ 时,有

$$F_{w_n}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\,w_{n,j,k-2^{-j}\tau}(t)\,dt = 0 \qquad (43)$$

亦即是当 $2^{-j}\tau \in Z/\{0\}$ 时,$F_{w_n}(\tau) = 0$.

很显然,当 $\tau = 0$ 时,有

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$F_{w_n}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\, w_{n,j,k}(t)\, dt = 1 \tag{44}$$

(3) 由 $F_{w_n}(\tau)$ 的定义,得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{w_n}(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\, w_{n,j,k}(t+\tau)\, dt \right) d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t) \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t+\tau)\, d\tau dt \tag{45}$$

令 $s = t + \tau$,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{w_n}(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(s)\, ds \right) dt$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\, dt \right)^2 \tag{46}$$

当 $n = 0$ 时, $w_{0,j,k}(t) = \phi_{j,k}(\tau)$,代入式(46),得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{w_0}(\tau)\, d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,k}(t)\, dt \right)^2 = 2^j \tag{47}$$

当 $n \in Z^+$ 时, n 可二进表示成式(5)形式. 由于 $w_{1,j,k}(t) = \psi_{j,k}(t)$,根据定理 2,得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{w_n}(\tau)\, d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} F_{e_1} F_{e_2} \cdots F_{e_{n_i - 1}} \{ w_{1,j-n_i+1,k}(t) \}\, dt \right)^2$$
$$= \left(F_{e_1} F_{e_2} \cdots F_{e_{n_i - 1}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j-n_i+1,k}(t)\, dt \right\} \right)^2$$
$$= 0 \tag{48}$$

(4) 对式(38)两边关于变量 τ 作傅立叶变换,得到

$$F_{w_n}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\, w_{n,j,k}(t+\tau)\, dt \right) e^{-j\omega\tau} d\tau$$
$$= 2^{j/2} \hat{w}_n(2^j\omega)\, e^{-i2^j k\omega} \cdot 2^{j/2} \overline{w}(2^j\omega)\, e^{i2^j k\omega}$$
$$= 2^j | \hat{w}_n(2^j\omega) |^2 \tag{49}$$

故定理 6 得到证明.

定理 7　对任意可能的 n 和 m, n, $m \in \{0, Z^+\}$ 且 $n \neq m$, 在分解尺度 j 上不同小波包空间 U_j^n 和 U_j^m 中的正交小波包基函数 $w_{n,j,k}(t)$、$w_{m,j,l}(t)$ 的互相关函数 $F_{w_n,w_m}(\tau)$ 满足:

(1) 对任意满足 $2^{-j}\tau \in Z$ 的 τ, $F_{w_n,w_m}(\tau) = 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} F_{w_n,w_m}(\tau)\, d\tau = 0$;

(3) $F_{w_n,w_m}(\omega) = 2^j w_m(2^j\omega)\, \hat{w}(2^j\omega)\, e^{-i2^j(l-k)\omega}$, 其中符号"~"为取复共轭运算.

证明　(1)
$$F_{w_n,w_m}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\, w_{m,j,k}(t+\tau)\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\, w_{m,j,l-2^{-j}\tau}(t)\, dt \tag{50}$$

由于 $\{ w_{n,j,k}(t) \}_{k \in Z}$、$\{ w_{m,j,l}(t) \}_{l \in Z}$ 分别构成小波包空间 U_j^n 和 U_j^m 的规范正交基,而当 $m \neq n$ 时, $U_j^n \perp U_j^m$[7],因此当 $2^{-j}\tau \in Z$ 时,有 $\int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\, w_{m,j,k-2^{-j}\tau}(t)\, dt = 0$ (51)

即对任意满足 $2^{-j}\tau \in Z$ 的 τ,有 $F_{w_n,w_m}(\tau) = 0$.

(2) 由 $F_{w_n,w_m}(\tau)$ 的定义,得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{w_n,w_m}(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} w_{m,j,l}(t+\tau)\, d\tau \right) dt$$

令 $s = t + \tau$,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{w_n,w_m}(\tau)\, d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\, dt \right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} w_{m,j,l}(s)\, ds \right) \tag{52}$$

由于 $m \neq n$,因此 m、n 不可能同时为 0,不妨设 $n \in Z^+$, n 可二进表示成式(5)形式. 由于 $n \in Z^+$,根据定理 2 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\, dt = F_{e_1} F_{e_2} \cdots F_{e_{n_i - 1}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w_{1,j-n_i+1,k}(t)\, dt \right\}$$
$$= F_{e_1} F_{e_2} \cdots F_{e_{n_i - 1}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j-n_i+1,k}(t)\, dt \right\} = 0 \tag{53}$$

由式(52)、(53),得到 $\int_{-\infty}^{\infty} F_{w_n,w_m}(\tau)\, d\tau = 0$ (54)

(3) 对式(39)两边关于变量 τ 作傅立叶变换,得到

$$F_{w_n,w_m}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} w_{n,j,k}(t)\, w_{m,j,l}(t+\tau)\, dt \right) e^{-i\omega\tau} d\tau$$
$$= 2^{j/2} \hat{w}_m(2^j\omega)\, e^{-i2^j k\omega} \cdot 2^{j/2} \overline{\hat{w}}_n(2^j\omega)\, e^{i2^j k\omega}$$
$$= 2^j w_m(2^j\omega)\, \hat{w}_n(2^j\omega)\, e^{-i2^j(l-k)\omega} \tag{55}$$

故定理 7 的结论成立.

6　正交小波包基函数相关性的数字仿真实验

设初始尺度 $j_0 = 0$,采用的正交小波包基函数分别由 *aubechies II*[8,9] 和 *Symlets II*[9] 的基本尺度函数生成,分解层

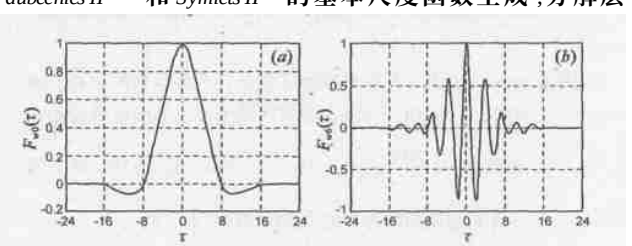

图 1　*Dauubechies II* 基本尺度函数生成的正交小波包基函数的自相关函数图　(a) U_3^0 空间的正交小波包基函数的自相关函数,其中, $\int_{-\infty}^{\infty} F_{w_0}(\tau)\, d\tau \approx 7.9998 \approx 2^3$; (b) U_3^6 空间的正交小波包基函数的自相关函数,其中, $\int_{-\infty}^{\infty} F_{w_6}(\tau)\, d\tau \approx 1.2488e-14 \approx 0$

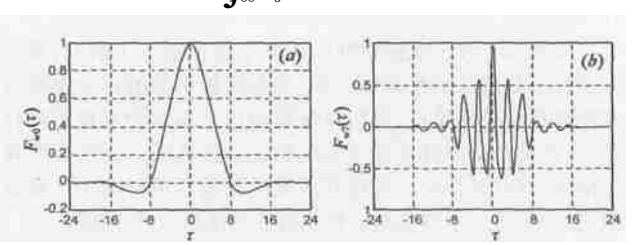

图 2　*Symlets II* 基本尺度函数生成的正交小波包基函数的自相关函数图　(a) U_3^0 空间的正交小波包基函数的自相关函数,其中, $\int_{-\infty}^{\infty} F_{w_0}(\tau)\, d\tau \approx 7.9998 \approx 2^3$; (b) U_3^7 空间的正交小波包基函数的自相关函数,其中, $\int_{-\infty}^{\infty} F_{w_7}(\tau)\, d\tau \approx 1.2121e-13 \approx 0$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

次 m = 3 ,因此在尺度 j = j_0 + 3 = 3 上 ,有 8 个正交小波包空间 U_j^n (n = 0 ,1 , ⋯,7) ,相应的正交小波包基分别为$\{w_{n,j,k}\}_{k\in Z}$. 在仿真试验中 ,取分解尺度 j = 3. 关于定理 6 的仿真结果如图 1～2 所示;关于定理 7 的仿真结果如图 3～4 所示.

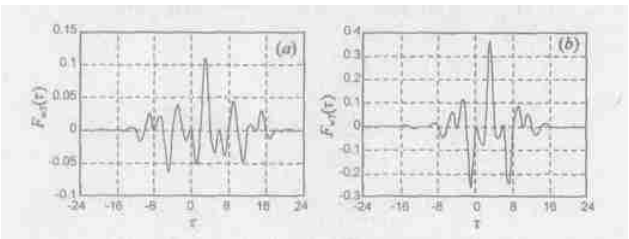

图 3 *Dauubechies II* 基本尺度函数生成的正交小波包基的互相关函数 $F_{w_n,w_m}(\tau)$ 图 (a) U_3^2 ,U_3^5 空间的小波包基函数的互相关函数 ,其中 , $\int_{\infty}^{\infty} F_{w_2,w_5}(\tau)\,d\tau \approx -2.2550e-16 \approx 0$; (b) U_3^1 ,U_3^7 空间的小波包基函数的互相关函数 ,其中 , $\int_{\infty}^{\infty} F_{w_1,w_7}(\tau)\,d\tau \approx 3.4657e-15 \approx 0$

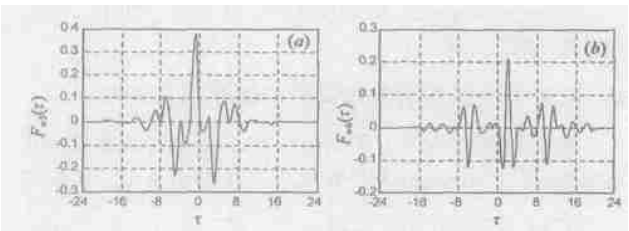

图 4 *Symlets II* 基本尺度函数生成的正交小波包基的互相关函数 $F_{w_n,w_m}(\tau)$ 图 (a) U_3^3、U_3^5 空间的小波包基函数的互相关函数 ,其中 , $\int_{\infty}^{\infty} F_{w_3,w_5}(\tau)\,d\tau \approx 1.2596e-15$; (b) U_3^4、U_3^6 空间的小波包基函数的互相关函数 ,其中 , $\int_{\infty}^{\infty} F_{w_4,w_6}(\tau)\,d\tau \approx -3.4635e-16 \approx 0$

图 1～2 及图 3～4 分别采用两种正交小波包基 ,从数字仿真的角度证实了定理 6 中正交小波包基自相关函数性质的正确性和定理 7 中正交小波包基互相关函数性质的正确性.

7 结论

本文对小波包变换中的一些基本理论进行了研究 ,获得了正交小波包基函数递推关系、平方可积函数的正交小波包变换系数的递推关系、高斯白噪声的正交小波包变换的统计特性、以及正交小波包基函数的相关函数性质方面的一些理论结果 ,同时对正交小波包基函数的相关性进行数字仿真试验 ,验证了正交小波包基函数相关性理论研究的正确性.

参考文献:

[1] Mallat S, G A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence ,1989 ,11(7) :674 - 693.

[2] Daubechies I. The wavelet transform ,time-frequency localization and signal analysis[J]. IEEE Trans on Information Theory. 1990 ,36(5) : 961 - 1005.

[3] 刘贵忠 ,邸双亮. 小波分析及其应用[M]. 西安:西安电子科技大学出版社 ,1992. 1 - 4.

[4] Coifman R ,Wickerhauser M V. Entropy-based algorithms for best basis selection[J]. IEEE Trans on Information Theory ,1992 ,38(2) :713 - 718.

[5] Wickerhauser M V. Lectures on wavelet packet algorithms[C]. 北京: 第三次中法小波会议论文集 ,1992. 231 - 137.

[6] 赵松年 ,熊小芸. 子波变换与子波分析[M]. 北京:电子工业出版社 ,1997. 38 - 128.

[7] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用[M]. 北京:科学出版社 , 2000. 42 - 69.

[8] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets , Common[J]. Communication on Pure and Applied Mathematics ,1988 , 41(3) :909 - 996.

[9] 楼顺天 ,施阳. 基于 MATLAB 的系统分析与设计[M]. 西安:西安电子科技大学出版社 ,1999. 6 - 9.

作者简介:

李合生 男 ,1970 年 9 月生于四川巴中市 ,2002 年获得北京航空航天大学控制理论与控制工程专业博士学位 ,2004 年 4 月从清华大学电子工程系博士后出站 ,现工作于中国工程物理研究院电子工程研究所 ,主要研究方向为信号与信息处理、雷达信号检测、信号建模与谱分析、模式识别、小波理论与应用. E-mail :lihesheng@phd.163.com.

毛剑琴 女 ,1940 年 5 月生于上海市 ,博士、教授、博士生导师、中国自动化学会理事、IEEE 控制系统学会北京分会主席 ,研究领域是控制理论与控制工程、智能控制及应用、鲁棒控制及应用、智能化辨识与建模、控制系统的计算机辅助设计等 ,在国内外发表论文 80 余篇.

赵明生 男 ,1968 年 2 月生于安徽安庆市 ,1995 年于清华大学电子工程系获得博士学位 ,现为清华大学电子工程系副教授 ,主要研究领域为信号与信息处理 ,网络海量信息处理、模式识别等.

吴佑寿 男 ,1925 年 7 月生于广东潮安 ,中国工程院院士 ,清华大学电子工程系教授、博士生导师 ,IEEE 高级会员 ,主要研究方向为数字通信与数据传输、信号处理与模式识别等.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net