

# 冲击噪声背景下基于最小均方归一化误差的波束形成算法

顾 陈,何 劲,朱晓华

(南京理工大学电子工程系,江苏南京 210094)

**摘 要:** 本文提出一种适用于任意未知统计特性的代数拖尾冲击噪声环境下的 MMSNE 波束形成算法.算法利用输出信号和参考信号之间的“归一化误差”最小化来求解最优权向量.“归一化误差”定义为接收信号的瞬时自适应无穷范数归一化的形式.与基于最小分数低阶误差波束形成算法相比,MMSNE 波束形成算法计算更为简单;不需要噪声特征指数的先验信息或估计;适用于更广的冲击噪声环境;具有更小的估计误差;具有更强的干扰抑制能力.

**关键词:** 阵列信号处理;波束形成;分数低阶矩;冲击噪声

**中图分类号:** TN951 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 06-1430-04

## Minimum Mean Square “Normalized-Error” Beamforming Amid Heavy-Tailed Impulsive Noise of Unknown Statistics

GU Chen, HE Jin, ZHU Xiao-hua

(Department of Electron, Engineering, Nanjing University of Science and Technical, Nanjing, Jiangsu 210094, China)

**Abstract:** This paper presents a minimum mean squared “normalized-error” (MMSNE) beamforming technique, against arbitrary unknown heavy-tailed impulsive noises. This new beamformer aims to minimize the “normalized error” between the desired signal and the the beamformer’s output. This normalized error is defined in terms of the instantaneously adaptive infinity-norm snapshot-normalized data. This new MMSNE beamformer outperforms the fractional lower order moments (FLOM)-beamformer with these advantages: (1) simpler computationally with a closed-form solution, (2) needing no prior information nor estimation of the impulsive noise’s effective characteristic exponent’s numerical value, (3) applicable to a wider class of heavy-tailed impulsive noises, (4) providing lower estimation error, and (5) offering better interference-rejection.

**Key words:** array signal processing; beamforming; fractional lower order moments; impulsive noise

## 1 引言

自适应波束形成技术作为阵列信号处理中的一种被广泛使用的工具,在雷达、声纳、地震学、天文学、多媒体成像、无线通信系统等领域有着广泛的应用.利用自适应波束形成技术,可以增强有用信号,抑制干扰信号并且可以估计信号的 DOA.根据实际应用场合的不同需要,在过去的几十年里,发展了大量的波束形成算法.通常,自适应波束形成有多种不同的准则确定自适应权值以应用于不同的场合中,其中最小均方误差波束形成算法(MMSE)<sup>[1]</sup>是使波束形成输出和参考信号之间的均方误差最小化的波束形成算法.MMSE 波束形成算法被广泛应用于雷达目标探测<sup>[2]</sup>、CDMA 无线通信<sup>[3]</sup>、OFDM 无线通信<sup>[4]</sup>、MIMO 通信<sup>[5]</sup>以及语音信号处理的麦克风阵列系统<sup>[6]</sup>中.

MMSE 波束形成方法需要利用接收信号的二阶统

计量.在具有代数拖尾概率密度函数的冲击噪声环境下,阵列接收的二阶统计量可能不存在,因为代数拖尾比高斯概率密度函数的指数递减拖尾更长.错误地将这类冲击噪声假设成高斯分布会使算法的性能严重下降.代数拖尾分布的随机变量只存在有限的  $p$  阶矩( $p < \alpha \leq 2$ ),其二阶及二阶以上统计量都不存在.因此,MMSE 波束形成算法不适用于代数拖尾冲击噪声环境中.针对冲击噪声环境下的波束形成问题,文献[7]提出基于 FLOM 的自适应线性约束波束形成算法;文献[8]提出最小 FLOM 无失真响应波束形成算法;文献[9]提出最小分数低阶功率无失真响应波束形成算法.然而,所有基于 FLOM 的算法都必须假设噪声的特征指数  $\alpha$  大于算法的分数阶数  $p$ ,这就需要有  $\alpha$  的先验信息或估计值,这在实际应用中通常不可能得到或者需要付出计算代价并且可能存在误差.文献[10,11]利用几何功率,提出适用于任意代数拖尾冲击噪声的基于对数矩的波束

形成算法.然而这类算法与基于 FLOM 算法一样,当噪声模型与假设的模型发生偏差时,性能迅速下降.

本文提出一种最小均方归一化误差(MMSNE)波束形成算法则可以解决上述问题. MMSNE 波束形成算法利用输出信号和参考信号之间的“归一化误差”最小化来求解最优权向量.“归一化误差”定义为接收信号的瞬时自适应无穷范数归一化的形式,用最小均方归一化误差代替最小均方误差,提高波束形成算法在冲击噪声背景下的性能.

## 2 信号模型

假设有  $K$  个非相干远场窄带信号  $\{\theta_k, k=1,2,\dots,K\}$ ,入射到由  $L(L>K)$  个天线组成的任意结构阵列中,则阵列在  $t$  时刻的接收信号为:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) s_k(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_K(t)]^T$ , 其中,上标 T 表示转置,  $s_k(t_n)$  为第  $k$  个信号的复包络,  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ ,  $\mathbf{a}(\theta_k)$  表示为阵列对第  $k$  个信号的  $L \times 1$  阵列导向矢量;  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), \dots, n_L(t)]^T$  为阵列在  $t$  时刻的  $L \times 1$  维噪声矢量.假设信号之一为期望信号,设其为  $s_{\text{sol}}(t)$ ,其余信号为干扰信号.波束形成的目标是寻找一个最优权向量  $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ ,使得其波束形成输出  $y(t) = \mathbf{w}_{\text{opt}}^H \mathbf{x}(t)$  为期望信号  $s_{\text{sol}}(t)$  的估计  $\hat{s}_{\text{sol}}(t)$ ,即

$$y(t) = \hat{s}_{\text{sol}}(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \quad (2)$$

其中,上标 H 表示共轭转置.

## 3 最小均方误差波束形成算法

最小均方误差波束形成算法通过波束形成输出与期望信号之间的均方误差最小化来求解最优权向量,即最优权向量满足

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} E\{\|\mathbf{s}_{\text{sol}}(t) - y(t)\|^2\} \\ = \min_{\mathbf{w}} E\{\|\mathbf{s}_{\text{sol}}(t) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)\|^2\} \end{aligned} \quad (3)$$

求解上式,可以得到最小均方误差波束形成算法的最优权向量为

$$\mathbf{w}_{\text{MMSE}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} \quad (4)$$

其中  $\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\}$  为阵列接收的自相关矩阵,  $\mathbf{r} = E\{\mathbf{x}(t)s_{\text{sol}}^*(t)\}$  为阵列接收与期望信号的互相关矢量,其中,上标\*表示复数共轭.在有限采样情况下,  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{r}$  可由  $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(t_n)\mathbf{x}^H(t_n)$  和  $\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(t_n)s_{\text{sol}}^*(t_n)$  分别估计得到.

## 4 最小均方归一化误差波束形成算法

传统的 MMSE 波束形成算法是基于二阶统计量发

展而来的,因此,在代数拖尾的冲击噪声环境下不能适用.本文提出用均方归一化误差来代替均方误差,对均方归一化误差进行最小化得到波束形成最优权向量的估计.归一化误差是按照瞬时自适应的无穷范数快拍归一化数据定义的,最小均方归一化误差波束形成算法的权向量满足

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} E\{\|\mathbf{s}_{\text{sol}}(t) - y(t)\|^2\} \\ = \min_{\mathbf{w}} E\{(r_{\text{sol}}(t)) - \mathbf{w}^H \mathbf{s}(\mathbf{x}(t))^2\} \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t))$  表示为瞬时自适应无穷范数快拍归一化信号,其表达式为

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\mathbf{x}(t)}{\max\{|x_1(t)|, \dots, |x_L(t)|\}} \quad (6)$$

其中,  $|z|$  表示复数  $z$  的模,  $r_{\text{sol}}(t)$  表示为瞬时自适应无穷范数归一化尺度参考信号,其表达式为

$$r_{\text{sol}}(t) = \mathbf{s}(\mathbf{s}_{\text{sol}}(t)) = \frac{s_{\text{sol}}(t)}{\max\{|x_1(t)|, \dots, |x_L(t)|\}} \quad (7)$$

因此, MMSNE 波束形成算法是对尺度化的参考信号和期望信号之间的均方误差进行最小化,得到尺度化的波束形成输出.瞬时尺度化波束形成输出为传感器在某一时刻输出的加权,即:

$$z(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) \quad (8)$$

MMSNE 波束形成算法可适用于任意分布的冲击噪声模型,(如  $\alpha$  稳定分布、稳定高斯混合分布、高斯混合分布、拉普拉斯分布等模型),其与传统 MMSE 波束形成算法的区别是均方归一化误差在上述噪声环境中是有界的.

**定理 1** 在任意分布噪声背景下,均方归一化误差  $E\{\|(r_{\text{sol}}(t)) - \mathbf{w}^H \mathbf{s}(\mathbf{x}(t))\|^2\}$  为有限的<sup>[10]</sup>.

与 MMSE 波束形成算法的求解过程类似,可以求得 MMSNE 波束形成算法权向量的解为

$$\mathbf{w}_{\text{MMSNE}} = \Omega^{-1} \mathbf{p} \quad (9)$$

其中

$$\Omega = E\{\mathbf{s}(\mathbf{x}(t))\mathbf{s}(\mathbf{x}^H(t))\} \quad (10)$$

$$\mathbf{p} = E\{\mathbf{s}(\mathbf{x}(t))r_{\text{sol}}^*(t)\} \quad (11)$$

在实际情况下,瞬时自适应无穷范数归一化阵列自相关函数  $\Omega$  与互相关函数  $\mathbf{p}$  是未知的,波束形成的权向量需要通过自适应迭代算法获得.本文采用文献[12]提出的采样协方差矩阵求逆算法(SMI)对权系数进行迭代,该算法可以得到最大信干噪比意义下的最优权值,而且收敛速度快.权系数在每  $M$  个采样点,通过使用  $M$  个采样的伪相关函数矩阵和  $M$  个采样的互相关函数矩阵进行迭代

$$\hat{\Omega}_M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{s}(\mathbf{x}(t))\mathbf{s}(\mathbf{x}^H(t)) \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathcal{S}(\mathbf{x}(t)) r_{\text{SOL}}^*(t) \quad (13)$$

因此,基于 SMI 自适应算法的 MMSNE 波束形成的权重为

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{MMSNE}} = \hat{\Omega}_M^{-1} \hat{\mathbf{p}}_M \quad (14)$$

与基于 FLOM 的波束形成算法只适用于 S&S 型冲击噪声不同,MMSNE 算法没有特定的噪声模型,因此适用于任意分布噪声.此外基于 FLOM 的波束形成算法在参数  $p < \alpha$  情况下才能适用,而实际应用中,往往无法得到冲击噪声的  $\alpha$  的先验信息.

## 5 计算机仿真实验

本节给出图 1~4 的计算机仿真实验结果来比较不同冲击噪声环境下 MMSNE 波束形成算法与传统的 MMSE 波束形成算法和基于 FLOM 的波束形成算法的性能.所有仿真均为 500 次蒙特卡罗实验的平均,每次试验中快拍数均为  $N = 200$ .基于 FLOM 的算法我们采

用 IRLS(Iteratively Reweighted Least Squares)算法进行计算.仿真中,假设阵列为 8 阵元的等距线阵,阵元间距为半波长.有 4 个窄带非相关信号入射到阵列中,其中期望信号的 DOA 为  $10^\circ$ ,功率为 0dB,其余 3 个干扰信号的 DOA 分别为  $-20^\circ, 40^\circ$  和  $60^\circ$ ,功率为 30dB.所有仿真中的噪声均为空时独立同分布的.

图 1~4 分别给出了 MMSNE 波束形成算法,MMSE 波束形成算法和基于 FLOM 的波束形成算法在 S&S 噪声、稳定-高斯混合噪声、高斯混合噪声和拉普拉斯噪声环境下的估计均方根误差随信噪比的变化关系(上述几种噪声分布的定义在附录中给出).对 S&S 噪声和稳定-高斯混合噪声,取噪声特征指数  $\alpha = 1.5$ ,对高斯混合噪声,假设  $L = 2, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 2000, \epsilon = 0.05$ ,对拉普拉斯噪声,取  $\sqrt{\lambda} = 5$ .FLOM 的参数  $p = 1$ .由图 1~4 可以发现,MMSNE 波束形成算法的估计精度在各种噪声环境下均高于 MMSE 算法和 FLOM 算法,且该算法对于干扰信号的零陷均远远低于对比的另两种算法.

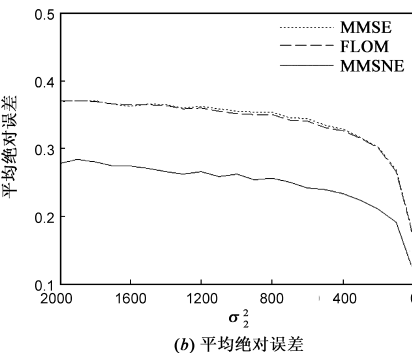
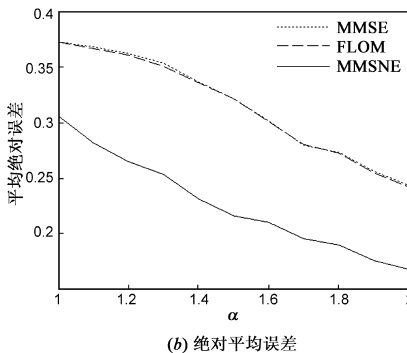
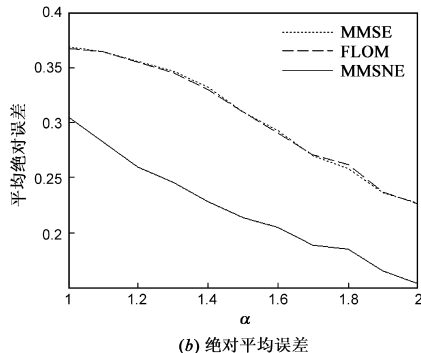
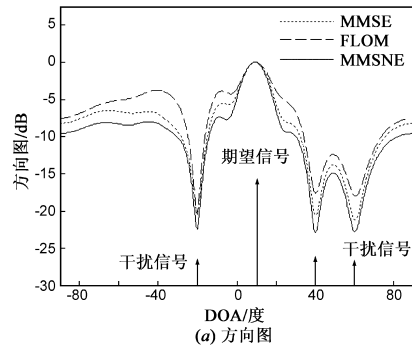
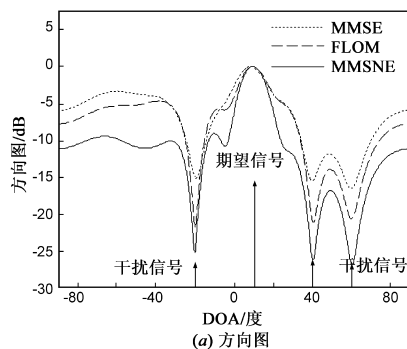
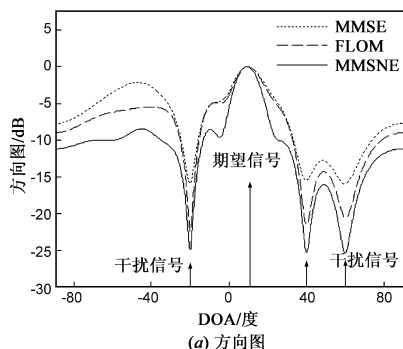


图1 S&S冲击噪声背景下不同波束形成算法的性能对比图

图2 稳定-高斯混合分布冲击噪声背景下不同波束形成算法性能对比图

图3 高斯混合分布冲击噪声背景下不同波束形成算法的性能对比图

## 6 结束语

本文提出最小均方“归一化”误差波束形成算法,算法根据波束形成输出信号与期望信号之间的“归一化”误差的最小化来求解最优权向量.最小均方“归一化”误差波束形成算法本质上是基于二阶统计量的,并且适用于任意代数拖尾的冲击噪声环境.在假设噪声服从 S&S 稳定分布时,最小均方“归一化”误差波束形成算法不需要噪声 S&S 的先验信息或估计值.与最小分数

低阶矩误差波束形成算法相比具有以下优点:(1)计算更为简单;(2)不需要噪声特征指数的先验信息或估计;(3)适用于更广的冲击噪声环境;(4)期望信号的估计误差更小;(5)干扰抑制能力更强.

## 附录 文中采用的噪声分布定义

(1)对称  $\alpha$  稳定分布

稳定分布表示高斯分布的一类推广,它比高斯分

布具有更厚的拖尾. 对称  $\alpha$  稳定分布 SoS 通常用如下特征函数来描述

$$\varphi(t) = \exp(-\gamma |t|^\alpha) \quad (A1)$$

式中: 特征指数  $\alpha \in (0, 2]$  反映了分布拖尾的厚度, 且  $\alpha = 2$  时对应为高斯分布. 分散系数  $\gamma (\gamma > 0)$  类似于高斯分布的方差.

## (2) 稳定-高斯混合分布

稳定-高斯混合分布同常用如下特征函数描述

$$\varphi(t) = \exp(-\gamma_s |t|^\alpha - \gamma_g t^2) \quad (A2)$$

式中:  $\alpha \in (0, 2]$  表示  $\alpha$ -稳定分布的特征指数,  $\gamma_s$  表示  $\alpha$ -稳定分布的分散系数,  $\gamma_g$  表示高斯分布的分散系数.

## (3) 高斯混合分布

有限高斯混合分布通常用概率密度函数来描述, 它表示  $L \geq 2$  个不同高斯概率密度函数的加权和, 即

$$f(b) = \sum_{\ell=0}^L \frac{\varepsilon_\ell}{\pi \sigma_\ell^2} \exp\left\{-\frac{bb^*}{\sigma_\ell^2}\right\}, \sum_{\ell=0}^L \varepsilon_\ell = 1 \quad (A3)$$

式中:  $\varepsilon_\ell$  表示复随机变量  $b$  属于上式第  $\ell$  个分布项的概率,  $\sigma_\ell^2$  表示第  $\ell$  个高斯分布项的方差.

## (4) 拉普拉斯分布

拉普拉斯分布通常用如下概率密度函数来描述

$$f(b) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|b|}{\lambda}} \quad (A4)$$

式中:  $\lambda > 0$  为分布的尺度参数, 类似于高斯分布的标准差.

## 参考文献:

- [1] Widrow B, Mante P E, Griffiths L J. Adaptive antenna systems [J]. Proceedings of IEEE, 1967, 55(12): 2143 - 2159.
- [2] Yetik I S, Nehorai A. Beamforming using the fractional fourier transform [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2003, 51(6): 1663 - 1668.
- [3] Guo Z H, Letaief K B. Adaptive MMSE receiver with beamforming for DS/CDMA systems [J]. IEEE Transaction on Wireless Communications, 2003, 2(4): 605 - 610.
- [4] Budsabathon M, Hara M, Hara Y. Optimum beamforming for pre-FFT OFDM adaptive antenna array [J]. IEEE Transaction on Vehicular Technology, 2004, 53(4): 945 - 955.
- [5] Palomar D P, Lagunas M A. Joint transmit-receive space-time equalization in spatially correlated MIMO channels: a beamforming approach [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2003, 21(5): 730 - 743.
- [6] Ma W K, Ching P C, Vo B N. Crosstalk resilient interference cancellation in microphone arrays using Capon beamforming [J]. IEEE Transaction on Speech and Audio Processing, 2004, 12(5): 468 - 477.
- [7] Taskalides P, Nikias C L. Robust space-time adaptive processing (STAP) in non-Gaussian clutter environments [J]. IEEE Proceedings-Radar, Sonar, Navigation, 1999, 146(2): 84 - 93.
- [8] Kannan B, Fitzgerald W J. Beamforming in additive  $\alpha$ -stable

noise using fractional lower statistics (FLOS) [A]. IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems [C]. Pafos: IEEE, 1999, 3: 1755 - 1758.

- [9] 何劲, 刘中. 脉冲噪声环境中稳健的自适应波束形成算法 [J]. 电子学报, 2006, 34(3): 464 - 468.  
He J, Liu Z. Robust Adaptive Beamforming Method in Impulsive Noise [J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(3): 464 - 468. (in Chinese)
- [10] He J, Liu Z, Wong K T. Linearly constrained minimum-“Geometric Power” adaptive beamforming using logarithmic moments of data containing heavy-tailed noise of unknown statistics [J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2007, 6: 600 - 603.
- [11] 何劲, 刘中. 冲击噪声环境中最小“几何功率”误差波束形成算法 [J]. 电子学报, 2008, 36(3): 510 - 515.  
He J, Liu Z. Minimum “Geometric Power” Error Beamforming Amid Heavy-Tailed Impulsive Noise of Unknown Statistics [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(3): 510 - 515. (in Chinese)
- [12] Reed I S, Mallat J D, Brennan L E. Rapid convergence rate in adaptive arrays [J]. IEEE Transaction on Aerospace Electronic Systems, 1974, AES-10: 853 - 863.

## 作者简介:



顾陈 女, 1980 年出生于江苏省, 现为南京理工大学电子工程系博士生. 主要研究方向: 雷达信号分析与处理、阵列信号处理.

E-mail: gc\_njust@163.com



何劲 男, 1980 年出生于上海市, 现为康考迪亚大学电子与计算机工程系研究员. 主要研究方向: 空-时-极化天线阵列信号处理、非平稳信号处理、非高斯信号处理.

E-mail: andrie1111@hotmail.com



朱晓华 男, 1966 年出生于江苏省, 现为南京理工大学电子工程系教授, 博士生导师, 主要研究方向: 电子系统与现代信号处理、雷达与制导信息处理.

E-mail: zhx@mail.njust.edu.cn

