

广义正交坐标系 FDTD 算法的准完全匹配层吸收边界条件

周晓军¹, 喻志远², 林为干²

(1. 电子科技大学光电子技术系, 成都 610054; 2. 电子科技大学应用物理研究所, 成都 610054)

摘 要: 本文推导出了广义正交坐标系下的各向异性准完全匹配吸收层(QPML)边界条件, 给出了直角坐标、圆柱坐标、保角变换柱形坐标的各向异性准完全匹配吸收媒质。数值计算结果证明了准完全吸收层的吸收效果。

关键词: 广义正交坐标系; FDTD; 准完全匹配层吸收边界

中图分类号: TM153 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 03-0118-03

Quasi-Perfectly Matched Layer Absorbing Boundary Conditions for FDTD Algorithm in Generalized Orthogonal Coordinates

ZHOU Xiao-jun¹, YU Zhi-yuan², LIN Wei-gan²

(1. Department of Photoelectron Technology, University of Electronics Science and Technology of China, Chengdu 610054, China;

2. Institute of Applied Physics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract: This paper presents derivation of anisotropic quasi-perfectly matched layers absorbing boundary condition in generalized orthogonal coordinates (GOC). The anisotropic quasi-perfectly matched layers absorbing media in rectangular coordinates, cylindrical coordinates and conformal mapping cylinder coordinates are given in this paper. Numerical results illustrate the effectiveness of absorbing in anisotropic perfectly matched layers.

Key words: generalized orthogonal coordinates; FDTD; quasi-perfectly matched layer absorbing boundary

1 引言

用 FDTD 算法计算开域问题, 截断边界条件是一个很重要的问题, 直接影响 FDTD 的计算精度。早期由 Lindman, Enquist 等人创立的吸收边界条件理论^[1,2]是由单向波动方程导出的, 仅能在有限的几个入射方向有好的吸收特性。1994 年, Berenger 提出了完全匹配层(PML)的概念^[3], 这种人工设计的完全匹配层由有耗导电、导磁媒质组成, 可吸收任意入射角、任何频率、任意偏振态的入射电磁波。

已经发表的关于 PML 的论文大多数是在直角坐标系下进行的, 而许多电磁问题中的物体形状复杂, 用“阶梯近似”拟合边界必须加大网格的剖分密度才能达到较好的拟合精度。显然, 这样会增加计算时间, 并且计算中需要使用较多的存储单元。为了能够在正交坐标直接使用 PML 吸收边界条件, 本文从广义正交坐标系的 Maxwell 方程出发, 推导广义正交坐标中的 QPML 吸收边界条件。

2 理论分析

2.1 广义正交坐标系的等效 Maxwell 方程

设坐标为 x_1, x_2, x_3 的广义正交坐标系度量系数(Lame 系数)为 $h_i, i=1, 2, 3$ 。作变换 $\tilde{E}_i = h_i E_i, \tilde{H}_i = h_i H_i$, Maxwell 方程可写为

$$\begin{aligned}\nabla \times \tilde{E} &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \tilde{H} &= \epsilon_0 \epsilon_0 \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \epsilon_0 \epsilon_0 \tilde{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mu_0 \mu_0 \tilde{H} &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

式中 $\epsilon_0 \epsilon_0 = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\} = \text{diag}\{\frac{h_2 h_3}{h_1}, \frac{h_3 h_1}{h_2}, \frac{h_1 h_2}{h_3}\}$ (2)

自由空间中广义正交坐标系的 Maxwell 方程可等效为直角坐标系下各向异性非均匀媒质中的 Maxwell 方程。

2.2 广义正交坐标系的色散关系

考虑离场源距离比波长大得多的区域, 满足各向异性非均匀媒质中 Maxwell 方程的一般场解可表示为^[7,8]

$$\{\tilde{E}(r, t), \tilde{H}(r, t)\} = \{\tilde{E}_0(r), \tilde{H}_0(r)\} e^{-j[k_0 \phi(r) - t]} \quad (3)$$

式中, $-jk_0 \phi(r)$ 表示场的相位迟后, $\phi(r)$ 是位置的实数标量函数, $\tilde{E}_0(r), \tilde{H}_0(r)$ 是位置的矢量函数, 一般为复数。将式(3)代入式(1)得到

$$\begin{aligned}\nabla \times \tilde{E}(r) &= \{-jk_0 \nabla \phi(r) \times \tilde{E}_0(r)\} e^{-j[k_0 \phi(r) - t]} \\ &\quad + \{\nabla \times \tilde{E}_0(r)\} e^{-j[k_0 \phi(r) - t]} \\ \nabla \cdot \epsilon_0 \epsilon_0 \tilde{E}(r) &= \epsilon_0 \epsilon_0 \nabla \cdot \tilde{E}_0(r) e^{-j[k_0 \phi(r) - t]} + \epsilon_0 \epsilon_0 \nabla \cdot \nabla \phi(r) \tilde{E}_0(r) e^{-j[k_0 \phi(r) - t]} \\ &\quad + \epsilon_0 \epsilon_0 \nabla \phi(r) \cdot \nabla \tilde{E}_0(r) e^{-j[k_0 \phi(r) - t]}\end{aligned}\quad (4)$$

收稿日期: 1998-12-14; 修订日期: 1999-09-17

基金项目: 国家自然科学基金(No. 697719027)资助课题

式中
$$[J]_1 = \text{diag} \left\{ \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1}, \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2}, \frac{\partial a_{33}}{\partial x_3} \right\} \quad (6)$$

当电磁场的频率极高时, $\omega \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. 右端第二项与第一项相比可以忽略. 式(5)右端第一、第二项与第三项相比可忽略. 在此近似下式(1)变为

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) &= -\mu_0 [\mathbf{J}]_1 \tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) \\ \mathbf{k}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) &= -\epsilon_0 [\mathbf{J}]_1 \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) \\ \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \epsilon_0 [\mathbf{J}]_1 \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) &= 0 \\ \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \mu_0 [\mathbf{J}]_1 \tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \nabla \phi(\mathbf{r}) = k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 + k_3 \mathbf{e}_3$ (8)
与均匀媒质中的平面波相比较, 式(3)表示的是本地平面波. $\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})$ 、 $\tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{k}_0(\mathbf{r})$ 仅在空间某一坐标位置上是常数. 在各个空间坐标点上 $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ 、 $\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})$ 、 $\tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r})$ 相互是不正交的, 作如下变换

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= [\mathbf{J}]_1^{1/2} \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= [\mathbf{J}]_1^{1/2} \tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) \\ \mathbf{k}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{[\mathbf{J}]_1^{1/2}} \mathbf{k}_0(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (9)$$

代入式(7)可得到

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= -\mu \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) \\ \mathbf{k}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= -\epsilon \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \\ \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \epsilon \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= 0 \\ \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \mu \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

在各个空间点上 $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ 两两相互正交, 由 \mathbf{k}_0 反变换, 可得到

$$|\mathbf{k}(\mathbf{r})|^2 = \frac{k_1^2}{h_1^2} + \frac{k_2^2}{h_2^2} + \frac{k_3^2}{h_3^2} \quad (11)$$

式(11)是椭球方程, 其解为

$$k_1 = k_0 h_1 \sin \theta \cos \phi, k_2 = k_0 h_2 \sin \theta \sin \phi, k_3 = k_0 h_3 \cos \theta \quad (12)$$

2.3 广义正交坐标中的 QPML 吸收边界

设 $x_1 < 0$ 为自由空间, $x_1 > 0$ 为 QPML 区. 自由空间的电磁波满足式(1). 用电导率 σ 、等效磁导率 μ_M 表征的 QPML 吸收媒质, 时谐形式的 Maxwell 方程可写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{[\mathbf{J}]_1} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} &= -j \mu_0 \tilde{\mathbf{H}} - \mu_M \tilde{\mathbf{H}} = -j \mu_0 [\mathbf{S}_M] \tilde{\mathbf{H}} \\ \frac{1}{[\mathbf{J}]_1} \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} &= j \epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} + \epsilon_M \tilde{\mathbf{E}} = j \epsilon_0 [\mathbf{S}_E] \tilde{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (13)$$

在 QPML 中, 等效介电常数、磁导率分别为

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}]_2 &= \epsilon_0 [\mathbf{E}]_2 = \epsilon_0 [\mathbf{J}]_1 [\mathbf{S}_E] \\ [\mu]_2 &= \mu_0 [\mathbf{M}]_2 = \mu_0 [\mathbf{J}]_1 [\mathbf{S}_M] \\ [\mathbf{S}_E] &= \text{diag} \left\{ 1 + \frac{1}{E} \frac{1}{j}, 0, 1 + \frac{2}{E} \frac{1}{j}, 0, 1 + \frac{3}{E} \frac{1}{j}, 0 \right\} \\ [\mathbf{S}_M] &= \text{diag} \left\{ 1 + \frac{1}{M} \frac{1}{j}, \mu_0, 1 + \frac{2}{M} \frac{1}{j}, \mu_0, 1 + \frac{3}{M} \frac{1}{j}, \mu_0 \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

QPML 中的波阻抗与自由空间的波阻抗匹配, 可得出 $\frac{1}{E} \frac{1}{j} = 0 = \frac{1}{M} \frac{1}{j} \mu_0$. 因此

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_E] &= [\mathbf{S}_M] = [\mathbf{S}] = \text{diag} \{ s_{11}, s_{22}, s_{33} \} \\ s_{ii} &= 1 + \frac{1}{E} \frac{1}{j} = 0 = 1 + \frac{1}{M} \frac{1}{j} \mu_0 \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $i = 1, 2, 3$.

设 $[\mathbf{J}]_2 = [\mathbf{J}]_1 \cdot [\mathbf{S}] = \text{diag} \{ b_{11}, b_{22}, b_{33} \}$, 用与 2.2 节类似的推导, 不难得出在 QPML 中的色散关系

$$\begin{aligned} k_0^2 &= \frac{k_1^2}{b_{22} b_{33}} + \frac{k_2^2}{b_{33} b_{11}} + \frac{k_3^2}{b_{11} b_{22}} \\ k_1 &= k_0 \sqrt{b_{22} b_{33}} \sin \theta \cos \phi \\ k_2 &= k_0 \sqrt{b_{33} b_{11}} \sin \theta \sin \phi \\ k_3 &= k_0 \sqrt{b_{11} b_{22}} \cos \theta \end{aligned} \quad (16)$$

由于任意偏振的电磁波均可分解为 TE 波和 TM 波的线性叠加, 我们分别考虑 TE₃ 波 (电场仅有 \mathbf{e}_3 方向的分量) 和 TM₃ 波 (磁场仅有 \mathbf{e}_3 方向的分量) 在界面的反射. 对 TE₃ 波, 自由空间与 QPML 的界面上, 电磁场的连续性要求相位和幅度匹配. 因此, 我们得到

$$R^{\text{TE}} = \frac{\sqrt{\frac{a_{33}}{a_{22}}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{b_{33}}{b_{22}}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{a_{33}}{a_{22}}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{b_{33}}{b_{22}}} \cos \theta_t} \quad (17)$$

对 TM₃ 波, 经过类似的推导可得出

$$R^{\text{TM}} = \frac{\sqrt{\frac{b_{33}}{b_{22}}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{a_{33}}{a_{22}}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{b_{33}}{b_{22}}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{a_{33}}{a_{22}}} \cos \theta_t} \quad (18)$$

当满足 $b_{33}/b_{22} = a_{33}/a_{22}$, 即 $s_{33}/s_{22} = 1$ 时, 对任意角度入射的电磁波 $R^{\text{TE}} = R^{\text{TM}} = 0$. 无反射界面要求 QPML 满足

$$[\mathbf{S}] = \text{diag} \{ 1 + \frac{1}{s_{11}}, \frac{1}{s_{11}}, \frac{1}{s_{11}} \} \quad (19)$$

3 几个常用正交坐标中的 QPML 吸收边界

3.1 直角坐标系

直角坐标系 $[\mathbf{J}]_1 = \text{diag} \{ 1, 1, 1 \}$, $\{ s_{11}, s_{22}, s_{33} \} = \{ s_x, s_y, s_z \}$. 如果计算域是一个立方体, 则在立方体的六个面、十二个棱、八个角上均应设置 PML 吸收边界. z 为常数的面上的完全匹配层为 PML_z , 对沿 z 方向入射波

$$[\mathbf{J}]^{(z)}_2 = \text{diag} \{ s_z, s_z, 1/s_z \} \quad (20)$$

设 zx 棱边的完全匹配层为 PML_{zx} , 吸收沿 z 和 x 方向入射波 $[\mathbf{J}]^{(zx)}_2 = [\mathbf{J}]^{(z)}_2 \cdot [\mathbf{J}]^{(x)}_2 = \text{diag} \{ s_z/s_x, s_z, s_x/s_z, s_x \}$ (21)
设角域 xyz 的完全匹配层为 PML_{xyz} , 吸收沿 x, y, z 方向入射波

$$[\mathbf{J}]^{(xyz)}_2 = [\mathbf{J}]^{(x)}_2 \cdot [\mathbf{J}]^{(y)}_2 \cdot [\mathbf{J}]^{(z)}_2 = \text{diag} \left\{ \frac{s_z s_y}{s_x}, \frac{s_z s_x}{s_y}, \frac{s_x s_y}{s_z} \right\} \quad (22)$$

式(20)~(22)与文献[5]完全一致.

3.2 圆柱坐标系

圆柱坐标 $[\mathbf{J}]_1 = \text{diag} \{ r, 1/r, r \}$, $\{ s_{11}, s_{22}, s_{33} \} = \{ s_r, s_\phi, s_z \}$. 吸收沿 r 方向入射波

$$[\mathbf{J}]^{(r)}_2 = \text{diag} \{ r/s_r, s_r/r, s_r \} \quad (23)$$

在角域, 吸收沿 r 和 z 方向入射波

$$[\mathbf{J}]^{(rz)}_2 = [\mathbf{J}]^{(r)}_2 \cdot [\mathbf{J}]^{(z)}_2 = \text{diag} \left\{ \frac{r s_z}{s_r}, \frac{s_z s_r}{r}, \frac{r s_r}{s_z} \right\} \quad (24)$$

式(23)、(24)与文献[6]的推导具有相同的形式.

3.3 保角变换柱形坐标系

保角变换 $w = f(z)$ 可看作 Lamé 系数为 $h_1 = h_2 = h, h_3 = 1$ 的柱形坐标系,

$$h = |dz/dw| = f(u, v) \quad (25)$$

$[J_1 = \text{diag}\{1, 1, h^2\}, \{s_{11}, s_{22}, s_{33}\} = \{s_u, s_v, s_z\}]$. 吸收沿 u 方向入射波

$$[J_2^{(u)} = \text{diag}\{1/s_u, s_u, s_u h^2\}] \quad (26)$$

在角域, 吸收沿 u 和 z 方向入射波

$$[J_2^{(uz)} = \text{diag}\{s_z/s_u, s_u s_z, s_u h^2/s_z\}] \quad (27)$$

4 数值结果

判断 QPML 吸收效果经常用全局误差 (Global Error) 和 QPML 界面中点的反射系数来检测. 在 QPML 内电磁波被分为 TE 和 TM 波分别加以吸收. 对 TE 波, 全局误差定义为

$$\text{Global Error} = \sum_i \sum_j [H_z^{n+1/2}(i, j) - H_z^{n+1/2}(i, j)]^2 \quad (28)$$

设有两个嵌套的区域 b 和 a . b 的截断边界前有一终端为理想电壁的 QPML. a 的截断边界为理想电壁, 且比 b 大得多. 在 b 和 a 内相同网格点上设置相同的激励源, 适当选择计算时间步数, 使计算在激励脉冲在 a 的传播到达边界前结束, 在 b 的传播经 QPML 到达边界. b 进行的计算模拟了激励脉冲在无界空间的传播, 而 b 的场量则反映了截断边界前 QPML 的吸收状况. 式 (32) 中的 H_{za} 和 H_{zb} 是 a 和 b 的纵向磁场分量, i, j 是 b 内网格点的标号.

QPML 界面中点的反射系数是该点的时域场分量经过付里叶变换得到的, 反映了 QPML 对不同频率的吸收效果.

为证实广义正交坐标系下 QPML 的吸收, 我们计算了圆柱坐标系的全局误差和 QPML 界面中点的反射系数. 设激励源是一高斯脉冲线源, QPML 的电导率和等效磁阻率按平方率变化. 图 1 表明了圆柱系统系不同厚度 QPML 的全局误差. QPML 层越厚, 其吸收效果越好. 图 2 显示了 QPML 层中点反射系数与频率的关系. 图中反射系数随频率增加而起伏变化是由于推导中的近似假设产生的.

用同样方法我们计算了 Cassinian 变换柱形坐标系 QPML 的全局误差和中点反射系数. Cassinian 变换为

$$z = c(e^w + 1)^{1/2} \quad (29)$$

其中 $z = x + jy, w = u + jv, c$ 是实常数.

当 $u \gg 1$ 时, u 为常数的曲线接近椭圆.

图 3 表明了 Cassinian 变换柱形坐标系不同厚度 QPML 的全局误差. 图 4 表明反

射系数在低频比较大并且不稳定, 而在高频区基本稳定在 40dB 上, 这种现象也是由于 QPML 吸收边界条件的推导是在高频近似上建立的所致.

本文推导出了广义正交坐标系下的 QPML 边界条件, 给出了几个常用正交坐标中的准完全匹配层吸收媒质数据计算结果证明了准完全匹配层的吸收性能. 然而, 由于推导中引入了高频近似, 低频反射系数比较大, 但在高频仍然有稳定的吸收. 本文的研究结果使 QPML 吸收边界可推广应用于任何一个正交坐标系中, 对于分析、计算形状复杂物体的电磁边值问题具有一定意义.

参考文献

- [1] E. L. Lindman. Free-space boundary conditions for the time dependent wave equation. J. comput. Phys., 1975, 18(1): 66 ~ 78
- [2] B. Engquist & A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. Mathematics of the Computation, 1977, (31): 629 ~ 651
- [3] J. P. Berenger. Perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic wave. J. Comput. Phys., 1994, 114(2): 185 ~ 220
- [4] J. A. Stratton. Electromagnetic Theory. McGraw-Hill, New York, 1941
- [5] L. Zhao & A. C. Cangellaris. GP-PML: generalized theory of perfectly matched layers and its application to the reflectionless Truncation of Finite-Difference Time-Domain grids. IEEE MTT, 1996, 44(12): 2555 ~ 2563
- [6] F. L. Teixeira & W. C. Chew. Systematic Derivation of anisotropic PML absorbing media in cylindrical and spherical coordinates. IEEE Microwave & Guided Wave Letters, 1997, 7(11): 371 ~ 373
- [7] 叶培大、吴彝尊. 光波导技术基本理论. 北京: 人民邮电出版社, 1980 年
- [8] M. 玻恩、E. 活尔夫著. 黄乐天等译. 光学原理. 北京: 科学出版社, 1981 年

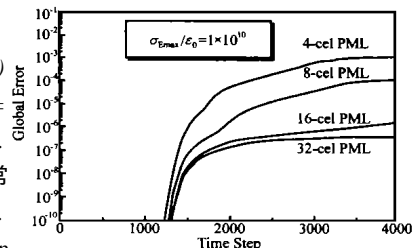


图 3 Cassinian 柱形坐标系 QPML 的全局误差

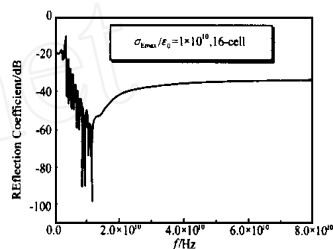


图 4 Cassinian 柱形坐标系 QPML 界面中点的反射系数

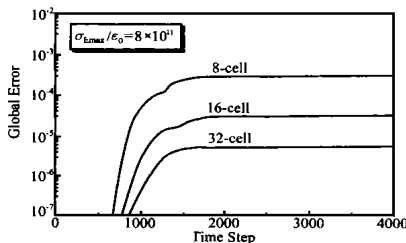


图 1 圆柱坐标系 QPML 的全局误差

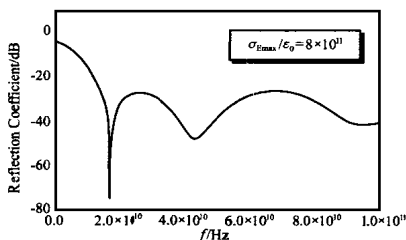


图 2 圆柱坐标系 QPML 界面中点的反射系数