

# 非均匀采样信号的分数阶数字频谱研究

李炳照<sup>1,2</sup>, 陶 然<sup>1</sup>, 王 越<sup>1</sup>

(1. 北京理工大学电子工程系, 北京 100081; 2. 北京理工大学理学院数学系, 北京 100081)

**摘 要:** 利用分数阶 Fourier 变换对实际采样过程中出现的非均匀、非理想采样信号进行了分数阶频谱分析与研究, 得到了这类非均匀采样信号在分数阶 Fourier 变换域的数字频谱表达形式. 由此进一步得到了非均匀采样 Chirp 信号在分数阶域的频谱表达式, 并分析了非均匀采样 Chirp 信号在分数阶 Fourier 变换域的分数阶频谱性质, 最后仿真结果证明了结论的正确性.

**关键词:** 非均匀采样信号; 采样定理; 分数阶 Fourier 变换; Chirp 信号; 频谱分析

**中图分类号:** TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 12-2146-04

## Fractional Spectrum of Non-Uniformly Sampled Signals

LI Bing-zhao<sup>1,2</sup>, TAO Ran<sup>1</sup>, WANG Yue<sup>1</sup>

(1. Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. Department of Applied Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** Based on the fractional Fourier transform, the fractional spectrum of non-uniformly sampled signal, which occurs in practical applications, has been analyzed and studied. Then the spectrum representation of a non-uniformly sampled chirp signal in the fractional Fourier domain has been derived. And the properties of fractional spectrum for non-uniformly sampled chirp signal have been investigated. The simulations are also proposed in the last to verify the correctness of the results.

**Key words:** non-uniform sampled signals; sampling theory; fractional Fourier transform; chirp signal; spectral analyze

### 1 引言

非均匀采样理论的研究是现代信号研究中的重要组成部分, 其最早可以追溯到 1953 年 Black 提出的非均匀采样信号的重建条件和可能性<sup>[1]</sup>, 以后不同的学者分别从信号的重建、滤波器理论等方面对非均匀采样信号进行了研究和探索<sup>[2~6]</sup>. 文献[5]最早用分析的方法来研究非均匀理想抽取正弦信号的频谱问题, 其基本思路是将一个非均匀的采样序列分解成为  $M$  个均匀序列, 这样一来非均匀的采样序列就可以用  $M$  个均匀的采样序列的组合来表示, 从而可以得到非均匀采样序列的离散频谱和原来信号模拟频谱之间的关系, 在此基础上文献[4]深入研究了非均匀采样信号的数字谱, 并给出了更加一般的非均匀采样周期信号的数字谱表达式. 然而, 在所有的这些非均匀信号的研究中, 所研究的信号都是正弦信号, 或者把周期信号通过 Fourier 级数来展开正弦信号分析. 而在实际的工程应用中, 如雷达、声纳等, 经常会遇到 Chirp 信号, 所以有必要来研究 Chirp 信号在非均匀采样下的频谱特点. 本文深入研究了非均匀采样信号在分数阶 Fourier 变换下的特点, 给出了非均匀采样点序列的分数阶频谱和其模拟分

数阶频谱之间的关系, 在此基础上着重分析了非均匀采样 Chirp 信号的分数阶频谱的特点和其简洁表达式, 并且 Fourier 域的有关结论可看作是本文结论的特例, 因而进一步拓宽了这一理论的应用范围.

### 2 非均匀采样序列的分数阶 Fourier 变换

#### 2.1 分数阶 Fourier 变换

信号  $f(t)$  的角度为  $u$  的分数阶 Fourier 变换定义为:

$$F_a^u(f(t)) = F_a^u[f(t)](u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u, t) f(t) dt \quad (1)$$

其中上标  $a$  和下标  $u$  表示的是角度为  $u$  的连续分数阶 Fourier 变换. 变换核为:

$$K(u, t) = \begin{cases} A \exp\left[j \frac{t^2}{2} \cot u - jut \csc u + j \frac{u^2}{2} \cot u\right], & k \\ (t, u), & = 2k \\ (t+u), & + = 2k \end{cases} \quad (2)$$

关于 FRFT 的详细定义、性质以及应用, 可以参考文献[6].

2.2 非均匀采样信号模型

设模拟信号  $f(t)$  的连续分数阶 Fourier 变换  $F_a^\alpha(u)$  是分数阶变换域中的带限信号。按照下述方式对信号进行采样,相邻采样点之间不必是均匀的,但是每一个采样点与其后的第  $M$  个采样点之间的间隔是相等的,即总取样周期为  $MT$ ,如图 1 所示<sup>[5]</sup>。

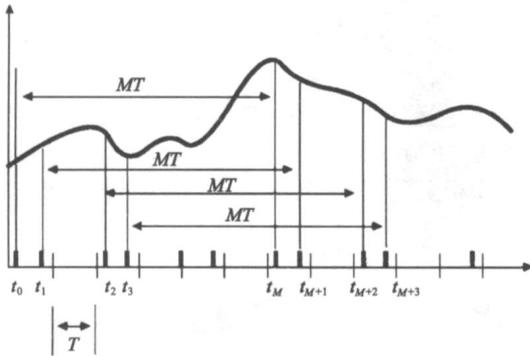


图 1 非均匀采样信号模型

由以上可知,这些非均匀采样序列的采样时刻可以表示为

$$t_{kMT+m} = kMT + t_m, \quad \text{其中 } m=0, 1, \dots, M-1; k \in \mathbf{Z}$$

将此非均匀采样序列写为  $s = \{s_0, s_1, \dots, s_M\}$  的形式,其中

$$s_0 = [f(t_0), f(t_M), f(t_{2M}), \dots],$$

$$s_1 = [f(t_1), f(t_{M+1}), f(t_{2M+1}), \dots]$$

$$s_m = [f(t_m), f(t_{M+m}), f(t_{2M+m}), \dots],$$

$$s_{M-1} = [f(t_{M-1}), f(t_{M+M-1}), f(t_{2M+M-1}), \dots]$$

并将每个子序列  $s_m$  样本值之间插入  $M-1$  个零,得到

$$\bar{s}_m = [f(t_m), 0, \dots, (M-1) \text{ zeros}, f(t_{M+m}), 0, 0, \dots]$$

再将  $\bar{s}_m$  的样本值右移  $m$  个位置,得到

$$\bar{s}_m z^{-m} = [(m \text{ zeros}) f(t_m), 0, \dots, (M-1) \text{ zeros}, f(t_{M+m}), 0, 0, \dots] \quad (3)$$

式中  $z^{-1}$  表示的是单位延迟算子,原始的非均匀采样序列可以表示为:

$$s = \sum_{m=0}^{M-1} \bar{s}_m z^{-m}$$

2.3 非均匀采样序列的分数阶 Fourier 变换

由均匀采样信号的采样定理<sup>[7]</sup>可以得到:

$$F[\bar{s}_m](u) = \frac{1}{MT} e^{j(u^2/2)\cot} [F^\alpha[f(t+t_m)](u) e^{-j(u^2/2)\cot} \cdot F^\alpha(u - n \frac{2\sin}{MT})] \quad (4)$$

而由  $F^\alpha[f(t+t_m)](u)$  与  $F^\alpha[f(t)](u)$  的关系<sup>[6]</sup>:

$$F^\alpha[f(t+t_m)](u) = F^\alpha[f(t)](u + t_m \cos) e^{j\frac{1}{2}(t_m^2 \sin \cos + u t_m \sin)} \quad (5)$$

可以得到序列  $\bar{s}_m$  的离散分数阶 Fourier 变换表示为:

$$F[\bar{s}_m](u) = \frac{1}{MT} e^{j(u^2/2)\cot} [F^\alpha(u - n \frac{2\sin}{MT} + t_m \cos) e^{j\frac{1}{2}(t_m^2 \sin \cos + (u - n \frac{2\sin}{MT}) t_m \sin)}] e^{-j\frac{u^2}{2}(u - n \frac{2\sin}{MT})^2} \quad (6)$$

同理,  $\bar{s}_m z^{-m}$  的分数阶 Fourier 变换可以表示为

$$F[s](u) = \frac{1}{MT} \sum_{m=0}^{M-1} e^{j\frac{u - n \frac{2\sin}{MT}}{2} \cot} e^{j\frac{1}{2}(mT)^2 \sin \cos - mT \sin} \cdot F^\alpha(u - mT \cos - n \frac{2\sin}{MT} + t_m \cos) e^{j\frac{1}{2}(t_m^2 \sin \cos + (u - mT \cos - n \frac{2\sin}{MT}) t_m \sin)} e^{-j\frac{u^2}{2}(u - mT \cos - n \frac{2\sin}{MT})^2} \quad (7)$$

对上述公式作进一步的化简可得到本文的第一个重要结论如下。

定理 1 若信号  $f(t)$  的角度为  $\alpha$  的分数阶 Fourier 为  $F^\alpha(u)$ , 信号的非均匀采样点的平均采样频率满足分数阶 Fourier 变换的均匀采样定理,则这些非均匀采样点的分数阶数字频谱可表示为:

$$F[s](u) = \frac{1}{MT} \sum_{n=-\infty}^{M-1} F^\alpha[u - n \frac{2\sin}{MT} - r_m T \cos] e^{j\frac{1}{2} T^2 r_m^2 \sin \cos} e^{j\frac{2r_m \cos}{MT} (u - \frac{u \sin}{MT})} e^{-j r_m T \sin (u - \frac{u \sin}{MT})} e^{-j(2 - nm/M)} \quad (8)$$

其中  $r_m = (mT - t_m) / T$

2.4 特殊情况

(1) 均匀采样

此时采样序列为  $f(mT)$ , 且  $r_m = 0$ , 将其代入式(8)可以得到:

$$F(s)(u) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{M-1} F^\alpha(u - n \frac{2\sin}{MT}) e^{j[\cos \frac{2}{MT} (u - n \frac{\sin}{MT})]} \left[ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-jmn \frac{2}{MT}} \right] \quad (9)$$

由于:

$$\begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-jmn \frac{2}{MT}} = 1, & n=0, M, 2M, \dots \\ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-jmn \frac{2}{MT}} = 0, & \text{others} \end{cases} \quad (10)$$

则式(9)简化为:

$$F(s)(u) = \frac{1}{T} e^{j(u^2/2)\cot} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F^\alpha(u - k \frac{2\sin}{T}) e^{-j\frac{u^2}{2}(u - k \frac{2\sin}{T})^2} \quad (11)$$

式(11)与文献[7]中所得到的均匀采样序列在分数阶 Fourier 变换域中的频谱完全相同,这说明了非均匀采样序列的分数阶频谱可以看作是均匀采样频谱的在分数阶 Fourier 变换域中的推广。

(2) 当  $\alpha = \pi/2$ , 把  $\alpha = \pi/2$  代入式(8), 得到

$$F_{/2}(u) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{M-1} \left( \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j[u - n(\frac{2}{MT})] r_m T} e^{-jmn(\frac{2}{M})} \right) \cdot F_{/2}(u - n \frac{2}{MT}) \quad (12)$$

式(12)是文献[5]提出的 Fourier 变换域中的非均匀采样序列频谱表示,从这个方面来说本文所得到的结论可看作是传统 Fourier 变换到分数阶 Fourier 变换的推广。

(3) 当  $\alpha = \pi/2$ , 且均匀采样

把  $\alpha = \pi/2, r_m = 0$  代入到式(8)可得到

$$F_{/2}(u) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{/2}(u - n \frac{2}{T}) \quad (13)$$

可以看出,式(13)是传统的 Fourier 变换域中均匀采样序列的频谱和其模拟频谱的关系公式。

### 3 非均匀采样 chirp 信号的分数阶频谱分析

#### 3.1 Chirp 信号的分数阶数字频谱

Chirp 信号是一种自然存在的信号,在工程处理和应用中经常会遇到这种信号,如在雷达、声纳等中的回波信号等。同时,分数阶 Fourier 变换也被证明为处理 chirp 信号的有利工具<sup>[7]</sup>,因此有必要来研究非均匀采样 chirp 信号的性质和特点。Chirp 信号模型可以表示为

$$x(t) = Ce^{j(2f_0t + m_0t^2)} = Ce^{j(f_0t + \frac{1}{2}m_0t^2)} \quad (14)$$

当  $\cot \alpha + m_0 = 0$  时,其分数阶 Fourier 变换可以表示为:

$$X^\alpha(u) = 2CA e^{j(u^2/2)\cot \alpha} (f_0 - u\csc \alpha) \quad (15)$$

把此公式带入式(8)得到

$$X(u) = \frac{1}{MT} \sum_{n=-m}^{M-1} 2CA e^{j(u - n\frac{2\sin \alpha}{MT} - r_m T \cos \alpha)^2/2\cot \alpha} \cdot [f_0 - u\csc \alpha + n\frac{2}{MT} + r_m T \cot \alpha] e^{j\frac{1}{2}T^2 r_m^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} e^{j\frac{2u}{MT} \cos \alpha (u - \frac{2n \sin \alpha}{MT})} e^{-j r_m T \sin \alpha (u - \frac{2n \sin \alpha}{MT})} e^{-j\frac{2u^2}{M}} \quad (16)$$

经过进一步的化简可以得到本文的另一个重要结论如下:

**定理 2** 假定条件如定理 1 所述,则对于 Chirp 信号  $x(t) = Ae^{j(f_0t + \frac{1}{2}m_0t^2)}$  来说,其非均匀采样信号的分数阶数字频谱可以表示为:

$$X(u) = \frac{2CA}{T} e^{j\cot \alpha (u^2/2)} \sum_{n=-m}^{M-1} [f_0 - u\csc \alpha + k\frac{2}{MT}] A(k) \quad (17)$$

其中

$$A(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} [e^{-j r_m T (f_0 + \frac{1}{2} \cot \alpha T r_m) - j M T r_m T \cot \alpha}] e^{-j m k (2/M)} \quad (18)$$

#### 3.2 定理 2 的几点讨论

(1) 由式(17)可以看出,非均匀采样 Chirp 信号的分数阶频谱是由一系列的线谱经过调制后组成,每个线谱的幅度由  $A(k)$  的大小来确定。

(2) 幅度可以看作是  $e^{-j r_m T (f_0 + \frac{1}{2} \cot \alpha T r_m) - j M T r_m T \cot \alpha}$  的离散 Fourier 变换,它是关于  $k$  的以  $M$  为周期的函数,若 Chirp 信号满足文献[9]所示的 Chirp-周期性,则式(17)所表示的非均匀采样信号的分数阶频谱是关于  $u$  的以  $2/T \sin \alpha$  为周期的周期函数,在每个周期内包含了  $M$  个线谱,这些寄生频谱均匀地分布在分数阶 Fourier 域。

### 4 仿真结果

仿真中选择  $x(t) = e^{j(-2t^2 + 5t)}$  作为原始信号,信号的观测时间  $[-4s, 4s]$ , 平均采样周期为  $f_s = 50\text{Hz}$ , 非均匀采样的重复周期  $M = 3, r_m = m$ , 图 2 给出了均匀采样信号的分数阶 Fourier 频谱,其角度取值范围是  $[0, 1]$ 。从图 2 可明显看到,均匀采样信号的分数阶频谱在某个角度处出现一个线谱,可以应用这些性质来进行多个 Chirp 信号的分离与处理。图 3 与图 4 分别给出了不同的非均匀采样策略下的分数阶 Fourier 变换的频谱,从图中可明显地看到,在  $M = 3$  时的分数阶 Fourier 变

换域中,除了在某一个角度出现信号的线谱以外,还产生两个寄生的分数阶频谱;在  $M = 5$  时,除了信号本身的频谱以外,也产生了另外 4 个寄生的分数阶频谱。

为了更加清楚地说明这一特点,可以进一步研究非均匀采样信号在特定角度下的分数阶 Fourier 频谱特点,本文中,信号观测时间为  $[-4s, 4s]$ ,而在离散分数阶 Fourier 变换的计算过程中由于无量纲化处理的影响,必须通过某些调整才能找到正确的角度。本文采用文献[8]所提的方法来确定为,分别取非均匀采样周期为  $M = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  后对所得到的非均匀采样信号进行角度为  $\alpha$  的分数阶 Fourier 变换,其分数阶频谱如图 5 所示。由图可以看出,除了信号本身的频谱以外还产生了  $M - 1$  个寄生频谱,这些仿真结果验证了本文的结论。

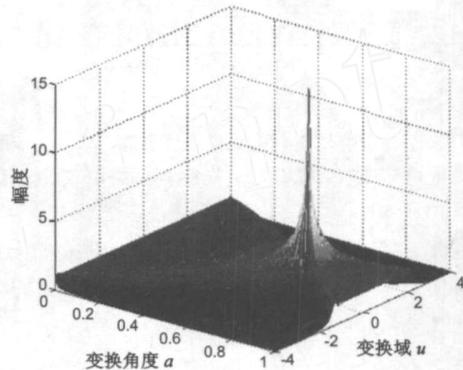


图 2 均匀采样信号的 FRFT

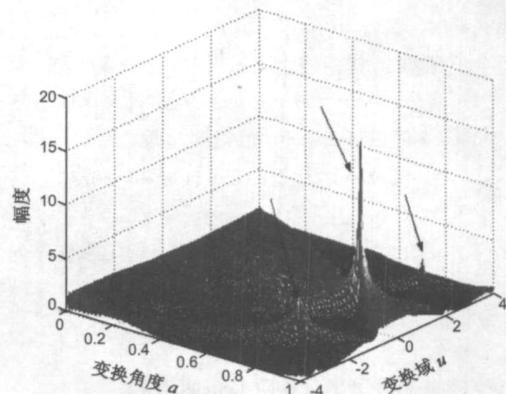


图 3 非均匀采样信号的 FRFT(M=3)

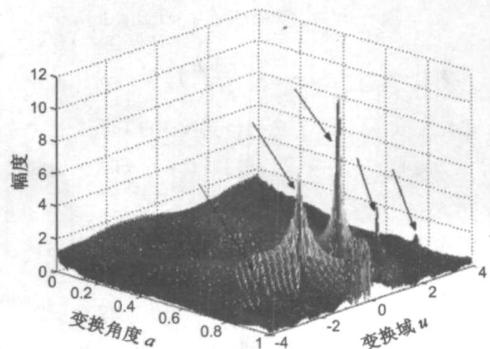


图 4 非均匀采样信号的 FRFT(M=5)

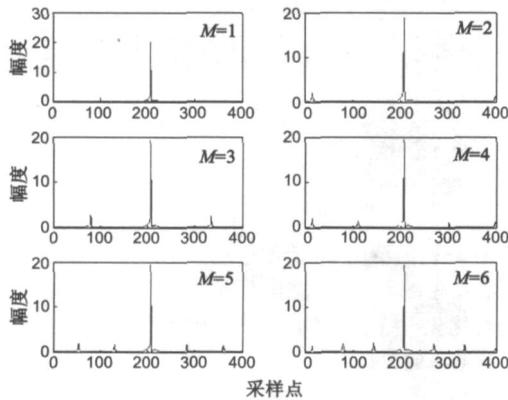


图 5 不同  $M$  情况下的 FRFT 的切片 ( $\alpha=0.8028$ )

## 5 结论

本文利用分数阶 Fourier 变换作为工具对实际采样过程中出现的一类非均匀、非理想采样信号进行了分数阶域的频谱分析与研究,得到了这类非均匀信号在分数阶 Fourier 变换域的数字频谱表达形式。在此基础上推导了非均匀采样 Chirp 信号在分数阶域的频谱表达形式,并分析了在分数阶 Fourier 变换域中非均匀 Chirp 信号数据采集的分数阶频谱畸变情况。最后仿真结果不但证明了结论的正确性,而且也以后开展基于 chirp 信号的高速多路采集数据系统的研究提供了强有力的理论支持。

## 参考文献:

- [1] H S Black. Modulation Theory [M]. New York: D Van Nostrand Company, Inc, 1953.
- [2] J L Yen. On nonuniform sampling of bandwidth limited signal [J]. IRE Trans Circuit Theory, 1956, 3(4): 251 - 257.
- [3] A J Jerri. The Shannon sampling theorem—its various extensions and applications: a tutorial review [J]. Proc IEEE, 1977, 65(11): 1565 - 1596.
- [4] 初仁辛, 赵伟, 孙圣和. 一类非均匀采样信号的数字谱 [J]. 信号处理, 1999, 15(4): 297 - 302.  
Chu Renxin, Zhao Wei, Sun Shenghe. Digital spectra analysis of a sort of nonuniformly sampled signals [J]. Signal Processing, 1999, 15(4): 297 - 302. (in Chinese)
- [5] Y C Jenq. Digital spectra of nonuniformly sampled signals: fundamentals and high-speed waveform digitizers [J]. IEEE Trans Instrum Meas, 1988, 37(2): 245 - 251.

- [6] 陶然, 齐林, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.  
Tao Ran, Qi Lin, Wang Yue. Theory and applications of the fractional Fourier transform [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)
- [7] X Xia. On bandlimited signals with fractional Fourier transform [J]. IEEE Signal Processing Letters, 1996, 3(3): 72 - 74.
- [8] 赵兴浩, 邓兵, 陶然. 分数阶傅里叶变换数值计算中的量纲归一化 [J]. 北京理工大学学报, 2005, 25(4): 360 - 364.  
Zhao Xinghao, Deng Bing, Tao Ran. Dimensional normalization in the digital computation of the fractional Fourier transform [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2005, 25(4): 360 - 364. (in Chinese)
- [9] Tomaso Erseghe, Peter Kraniuskas, et al. Unified fractional Fourier transform and sampling theorem [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1999, 47(12): 3419 - 3423.

## 作者简介:



李炳照 男, 1975 年 5 月生于山东沂南, 2001 年毕业于北京理工大学数学系, 获理学硕士学位, 并留校任教, 现为北京理工大学电子工程系通信与信息系统专业博士研究生, 目前主要从事均匀、非均匀采样理论、时频分析理论及系统建模等方面的研究。  
E-mail: li\_bingzhao@bit.edu.cn



陶然 男, 1964 年 11 月出生于安徽南陵, 1993 年于哈尔滨工业大学获博士学位, 现任北京理工大学信息安全与对抗研究中心主任、信息安全与对抗学科首席教授、博士生导师, 兼任中国雷达行业协会副理事长, 中国电子学会青年工作委员会副主任, 中国兵工学会信息安全与对抗专业委员会总干事, 《兵工学报》常务编委, IEEE 高级会员。在基于分数阶 Fourier 变换的现代信号处理领域做了大量基础性研究工作, 提出了多种信息系统新体制与新技术, 并已应用于总装和国防预研及型号项目中。已在 IEEE 汇刊, Fuzzy Sets and Systems, 中国科学、电子学报、兵工学报上发表和录用论文 65 篇。以第一作者出版著作、教材 4 部。以第一申请人申报发明专利 22 项。获高校青年教师奖和中国兵工青年科技奖, 部级科学技术二等奖 2 项、海军优秀教材一等奖 1 项。研究方向: 分数阶 Fourier 变换理论及应用、信息安全与对抗、通信与信息系统。E-mail: rantao@bit.edu.cn