分数阶 Fourier 域上非均匀采样信号的频谱重构研究

李炳照[1],陶 然[2],王 越[2]
(1.北京理工大学理学院数学系,北京 100081;2.北京理工大学电子工程系,北京 100081)

摘 要: 本文研究了分数阶 Fourier 变换域上非均匀采样信号的重构问题.首先得到周期非均匀采样信号经非均匀分数阶 Fourier 变换后的频谱表达式,研究了该分数阶频谱和信号连续分数阶频谱之间的关系,并基于该关系式提出了一种分数阶 Fourier 域周期非均匀采样信号的频谱重构算法;其次,讨论了分数阶 Fourier 变换域上更加一般情况下非均匀采样信号重构问题;最后,给出了周期非均匀采样信号频谱重构的仿真结果.

关键词: 分数阶 Fourier 变换; 非均匀采样; 频谱重构; 信号重构
中图分类号: TN911 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2008) 06-1202-04

Spectral Reconstruction from Nonuniformly Sampled Signals in the Fractional Fourier Domain

LI Bing-zhao[1],TAO Ran[2],WANG Yue[2]
(1. *Mathematics Department, School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*;
2. *Electronic Engineering Department, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

Abstract: This paper investigates the problem of signal reconstruction from nonuniformly sampled signals in the fractional Fourier domain. Firstly, the spectral representations of periodic nonuniformly sampled signal in the fractional Fourier domain and the relationship between the spectral and the nonuniform spectral have been deduced. A spectral reconstruction algorithm is proposed based on the derived relationship. Secondly, the signal reconstruction formula from general nonunfiorm samples in the fractional Fourier domain has been proposed. Lastly, the simulation results are obtained for the periodic nonuniform sampling model.

Key words: fractional Fourier transform (FrFT); nonuniform sampling; spectral reconstruction; signal reconstruction

1 引言

随着分数阶 Fourier 变换(FrFT)理论体系的进一步完善和发展,其已被应用到包括量子力学、光电信号处理、人工神经网络、信号处理等多个领域[1~6],现有结果表明 FrFT 是处理非平稳信号(特别是 Chirp 信号)的一个有利工具[2,3].与 FrFT 理论相应的各种离散分数阶 Fourier 变换及其快速算法、分数阶 Fourier 域上的采样理论也由国内外学者陆续从不同的角度得到[3~6].但是,现有关于 FrFT 的理论体系都是建立在均匀采样信号基础上的,对于非均匀采样信号在分数阶 Fourier 域上的信号和频谱重构等问题还未见研究文献发表.而在实际工程应用中会不可避免的遇到非均匀采样信号的情况(如在实现高速信号采集的时间交织系统(A/D)中由于采样时钟的不同步有可能造成非均匀采样情况[7,8]、在信号传输过程中由于信道或噪声的原因也有可能造成均匀采样点丢失而产生的非均匀采样信号的情况[8]).

针对上述问题,文献[9]提出了直接应用非均匀采样信号的频谱特点在 Fourier 域进行频谱重构算法.然而,上述方法仅适用于 Fourier 域带限信号,对于 Fourier 域非带限信号(如某些非平稳信号)来说,以上方法并不适用,这也从另一个方面限制了这些算法在实际工程中的应用和推广.为了解决上述问题,文献[10]从周期非均匀采样信号的特点出发,得到了周期非均匀采样信号在 FrFT 域上的数字频谱,但文献[10]并未讨论如何应用周期非均匀采样信号的特点来进行信号频谱的重构.

本文在上述研究基础上,进一步研究分数阶 Fourier 域上非均匀采样信号的频谱重构问题.

2 预备知识

2.1 分数阶 Fourier 变换

信号 $x(t)$ 的参数为 α 的 FrFT $X_\alpha^a(u)$ 定义为[2]:

$$X_\alpha^a(u) = X_\alpha^a[x(t)](u) = \int_{\infty}^{\infty} K_\alpha(u,t)\,x(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

其中上标 a 表示连续 FrFT 频谱,积分核 $K_\alpha(u,t)$ 为:

收稿日期:2006-07-09;修回日期:2008-02-10
基金项目:国家自然科学基金杰出青年基金(No.60625104);国家自然科学基金(No.10671013);北京理工大学基础研究基金

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$K_\alpha(u,y)=\begin{cases}A_\alpha e^{j\frac{t^2}{2}\cot\alpha-jut\csc\alpha+j\frac{u^2}{2}\cot\alpha}, & \alpha\neq k\pi\\ \delta(t-u), & \alpha=2k\pi\\ \delta(t+u), & \alpha=(2k+1)\pi\end{cases}$$

其中, k 取整数, $A_\alpha=\sqrt{1-j\cot\alpha/2\pi}$.

由 $X_\alpha^a(u)$ 恢复原始信号 $x(t)$ 的逆变换定义为:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X_\alpha^a(u)\ K_\alpha^*(u,t)\,du \tag{2}$$

其中,"*"表示取复共轭.

2.2 周期非均匀采样模型

设信号 $x(t)$ 是参数为 $\alpha(\alpha\neq k\pi\pm\pi/2,k\in Z)$ 的分数阶 Fourier 域上的 $\Omega_\alpha=\pi\sin\alpha/T,\sin\alpha>0$ 带限信号,即信号 $x(t)$ 的分数阶 Fourier 变换限定在范围 $(-\pi\sin\alpha/T,\pi\sin\alpha/T)$ 内. 若信号的非均匀采样点为 $x(t_n)$,每个采样时刻 t_n 满足:

$$t_n=nT+\Delta_n \tag{3}$$

其中 T 是满足分数阶 Fourier 域上采样定理的均匀采样周期, Δ_n 表示非均匀采样点和均匀采样点之间的采样差值 $\Delta_n=t_n-nT$,并且 Δ_n 具有周期 MT,也即 Δ_n 满足:

$$\Delta_{kM+m}=\Delta_m$$

若令 $n=kM+m$,则上述非均匀采样点 t_n 就可以转化为:

$$t_n=t_{kM+m}=kMT+mT+\Delta_m=kMT+mT+r_mT \tag{4}$$

其中, $k\in Z$, $m=0,1,\cdots$, $r_m=\Delta_m/T$ 表示非均匀采样点与均匀采样点之间的误差和均匀采样周期之间的比率.

由前面的论述及文献[4]中的结论可以知道,上述信号 $x(t)$ 不再是传统 Fourier 域上带限信号,因此不能应用 Fourier 域上基于非均匀采样点的信号频谱重构方法[7~9]来进行频谱分析和重构. 为了解决上述问题,本文借助于 FrFT,首先得到周期非均匀采样信号在 FrFT 域上的频谱重构算法,然后研究了更加一般的非均匀采样信号时域重构公式.

3 FrFT 域上周期非均匀信号频谱重构

3.1 周期非均匀采样信号的非均匀频谱

本文直接应用非均匀 FrFT 核 $K_\alpha(u,t_n)$, $n\in Z$ 对所得到的非均匀采样信号作离散 FrFT:

$$X_\alpha(v)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(t_n)\ K_\alpha(v,t_n) \tag{5}$$

其中 $K_\alpha(v,t_n)=A_\alpha e^{j\frac{t_n^2}{2}\cot\alpha-jut_n\csc\alpha+j\frac{v^2}{2}\cot\alpha}$,

$A_\alpha=\sqrt{1-j\cot\alpha/2\pi}$.

由逆 FrFT 的定义式(2), $x(t_n)$ 可以表示为:

$$x(t_n)=\int_{u=-\infty}^{\infty}X_\alpha^a(u)\ K_\alpha^*(u,t_n)\,du \tag{6}$$

将式(6)代入式(5),可得到原始信号的分数阶频谱 $X_\alpha^a(u)$ 和非均匀采样信号的频谱 $X_\alpha(v)$ 之间的关系:

$$X_\alpha(v)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}X_\alpha^a(u)\ K_\alpha^*(u,t_n)\ K_\alpha(v,t_n)\,du \tag{7}$$

又因为

$$K_\alpha^*(u,t_n)\ K_\alpha(v,t_n)=\frac{\csc\alpha}{2\pi}e^{j\frac{\csc\alpha}{2}[v^2-u^2-2\sec\alpha(v-u)t_n]}$$

所以,式(7)可以进一步简化为

$$X_\alpha(v)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}X_\alpha^a(u)\frac{\csc\alpha}{2\pi}e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha[v^2-u^2-2\sec\alpha(v-u)t_n]}du \tag{8}$$

把式(4)所表示的非均匀采样点 t_n 代入到式(8)得到:

$$X_\alpha(v)=\frac{\csc\alpha}{2\pi}e^{j\frac{v^2\cot\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}X_\alpha^a(u)\sum_{m=0}^{M-1}e^{j\csc\alpha(v-u)(mT+r_mT)}\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{j\csc\alpha(v-u)kMT}du \tag{9}$$

又因为[13]

$$\sum_k e^{j(v-u)kMT\csc\alpha}\csc\alpha=\frac{2\pi}{MT}\sum_k\delta\left(v-u-k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right)$$

成立,把此关系式代入式(9)可得到周期均匀采样信号的分数阶 Fourier 域频谱 $X_\alpha(v)$ 和原始信号的连续频谱 $X_\alpha^a(v)$ 之间的关系:

$$X_\alpha(v)=\frac{\csc\alpha}{T}e^{j\frac{v^2\cot\alpha}{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}B(k)e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}\left(v-k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right)^2}\cdot X_\alpha^a\left(v-k\frac{\pi\sin\alpha}{MT}\right) \tag{10}$$

其中 $B(k)=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}e^{-jk\frac{2\pi}{M}(m+r_m)}$.

图 1 给出了周期非均匀信号采样及其非均匀分数阶 Fourier 变换情况的示意图.

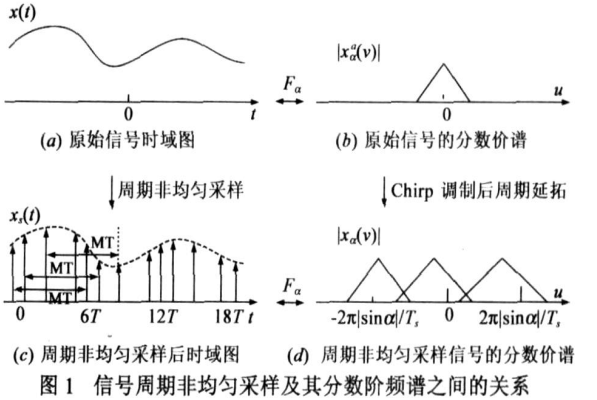


图 1　信号周期非均匀采样及其分数阶频谱之间的关系

3.2 FrFT 域上频谱恢复算法

式(10)给出了周期非均匀采样信号点的分数阶频谱和原始信号的连续分数阶频谱之间的关系,并且 $B(k)=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}e^{-jk\frac{2\pi}{M}(m+r_m)}$ 和信号在分数阶 Fourier 域的频谱变量 v 不相关. 另外,若令 $0<v_0<\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}$ 是信号 $x(t)$ 分数阶 Fourier 域上的任意一点,把它代入式(10)有:

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$TX_\alpha(v_0) = \csc\alpha\, e^{j\frac{v_0^2\cot\alpha}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B(k)\, e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}\left(v_0 - k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right)^2} \cdot X_\alpha^a\left(v_0 - k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right) \tag{11}$$

又因为 $x(t)$ 是 FrFT 上带宽为 $\Omega_\alpha = \frac{\pi\sin\alpha}{T}$ 的带限信号,所以式(11)可以进一步化简为

$$TX_\alpha(v_0) = \csc\alpha\, e^{j\frac{v_0^2\cot\alpha}{2}} \sum_{k=M/2+1}^{M/2} B(k)\, e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}\left(v_0 - k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right)^2} \cdot X_\alpha^a\left(v_0 - k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right) \tag{12}$$

而对于分数阶 Fourier 域上的另外一点 $v_0 + k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}$ 来说,

$$\begin{aligned} &TX_\alpha\left(v_0 + k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right) \\ &= \csc\alpha\, e^{j\frac{\cot\alpha}{2}\left(v_0 + \frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B(k)\, e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}\left(v_0 + k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT} - k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right)^2} \\ &\quad \cdot X_\alpha^a\left(v_0 + k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT} - k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right) \\ &= \csc\alpha\, e^{j\frac{\cot\alpha}{2}\left(v_0 + \frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right)^2} \sum_{k=M/2+1}^{M/2} B(k+1)\, e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}\left(v_0 - k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right)^2} \\ &\quad \cdot X_\alpha^a\left(v_0 - k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right) \end{aligned}$$

同理,对于 $m = 0, 1, \cdots, M-1$ 来说,可以很容易得到以下关系式成立:

$$\begin{aligned} &TX_\alpha\left(v_0 + \frac{m2\pi\sin\alpha}{MT}\right) \\ &= \csc\alpha\, e^{j\frac{\cot\alpha}{2}\left(v_0 + \frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right)^2} \sum_{k=-M/2+1}^{M/2} B(k+m)\, e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}\left(v_0 - k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right)^2} \\ &\quad \cdot X_\alpha^a\left(v_0 - k\frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

综上,可以得到周期非均匀采样信号在分数阶 Fourier 域的频谱 $X_\alpha(v)$ 和信号的连续频谱 $X_\alpha^a(v)$ 之间的关系用矩阵表示为:

$$\mathrm{X}_\alpha(v_0) = \mathrm{B}\mathrm{X}_\alpha^a(v_0) \tag{14}$$

其中:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} B(M/2) & B(M/2-1) & \cdots & B(-M/2+1) \\ B(M/2+1) & B(M/2) & \cdots & B(-M/2+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B(M/2+M-1) & B(M/2+M-2) & \cdots & B(M/2) \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\mathrm{X}_\alpha(v_0) = \begin{pmatrix} X_\alpha(u_0)\, T\sin\alpha\, e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha u_0^2} \\ X_\alpha\left(v_0 + \frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right) T\sin\alpha\, e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha\left(v_0 + \frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right)^2} \\ \cdots \quad \cdots \\ X_\alpha\left[v_0 + \frac{(M-1)2\pi\sin\alpha}{MT}\right] T\sin\alpha\, e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha\left[v_0 + \frac{(M-1)2\pi\sin\alpha}{MT}\right]^2} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\mathrm{X}_\alpha^a(v_0) = \begin{pmatrix} X_\alpha^a\left(v_0 - \frac{\pi\sin\alpha}{T}\right) \\ X_\alpha^a\left(v_0 - \frac{\pi\sin\alpha}{T} + \frac{2\pi\sin\alpha}{MT}\right) \\ \cdots \quad \cdots \\ X_\alpha^a\left(v_0 - \frac{\pi\sin\alpha}{T} + \frac{(M-1)2\pi\sin\alpha}{MT}\right) \end{pmatrix} \tag{17}$$

根据式(14)～(17),我们可以通过如下的矩阵关系就可以把信号的连续分数阶频谱 $X_\alpha^a(v_0)$ 在 v_0 的值由非均匀采样点的分数阶频谱表示出来:

$$\mathrm{X}_\alpha^a(v_0) = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{X}_\alpha(v_0) \tag{18}$$

又因为对不同的 v_0,矩阵 B 是恒定不变的,所以通过选择不同的 v_0 值可以由式(18)求出足够多的 $X_\alpha^a(v_0)$,从而可以重构出原来信号的频谱.

4 非均匀采样信号重构公式

重构式(18)给出分数阶 Fourier 变换域上周期非均匀采样信号的频谱重构公式和算法,而实际的应用过程中会经常碰到比上述周期非均匀采样更加复杂的非均匀采样信号的恢复问题,为此,本文不加证明的给出分数阶 Fourier 变换域上由信号的非均匀采样点来恢复原始信号的重构公式.

定理 1 假设信号 $x(t)$ 是分数阶 Fourier 变换域上的 Ω_α 带限信号,信号的非均匀采样点为 $x(t_n)$,其中采样时间 t_n 满足关系

$$\left| t_n - n\frac{\pi\sin\alpha}{\Omega_\alpha} \right| \le D < \frac{\pi\sin\alpha}{4\Omega_\alpha} \tag{19}$$

则原始信号可以通过如下的重构关系式完全重构

$$f(t) = e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha t^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n)\, e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha t_n^2} \frac{G(t)}{G'(t_n)(t - t_n)} \tag{20}$$

其中: $G(t) = e^{\alpha t}(t - t_0)\prod_{n\neq 0}(1 - t/t_n)\, e^{t/t_n}$; $\alpha = \sum_{n\neq 0}\frac{1}{t_n}$; $D \in R$; $G'(t_n)$ 是信号 $G(t)$ 在时刻 $t = t_n$ 的值.

5 仿真结果

本节以周期非均匀采样信号为例来对上述所得到的周期非均匀采样信号的频谱重构算法进行验证. 在仿真实验中所用的信号为 $x(t) = e^{j(-6t^2+5t)}$,其中观测时间是 $[-4s, 4s]$,均匀采样周期 $T = 1/50\mathrm{Hz}$,周期非均匀采样的周期选择为 $M = 8$,每个采样点和均匀采样点之间的误差比率 r_m 在 $[-1, 1]$ 区间中随机产生. 图 2 给出了非均匀采样信号在分数阶 Fourier 变换下的频谱. 在重构算法中,我们选取原始信号分数阶频谱 $X_\alpha^a(v)$ 的 512 个点来进行重构,图 3 是原始信号的频谱,图 4 给出了应用本文的算法所得到的由非均匀采样信号重构后的分数阶频谱. 由仿真结果可以很明显看出,本文所提出算法可以很好的从非均匀采样信号来恢复原始信号的频谱.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

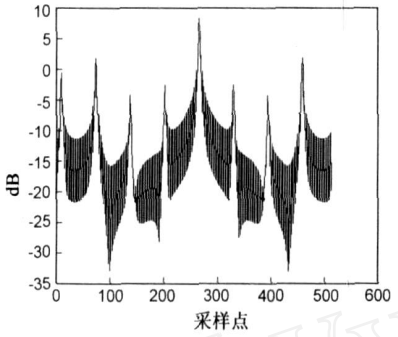


图 2　非均匀采样信号的分数阶频谱 (M=8)

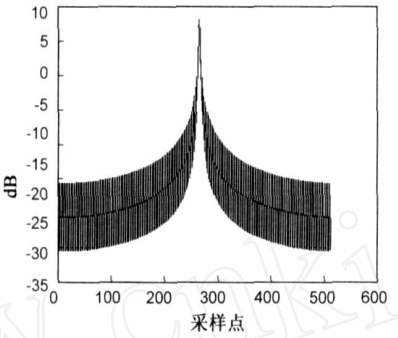


图 3　原始信号分数阶频谱

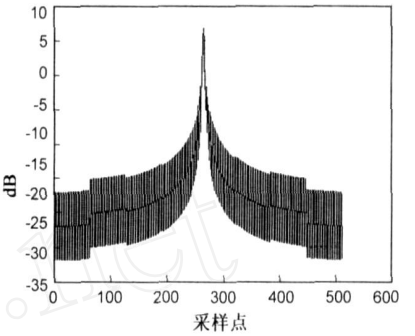


图 4　重构后的分数阶频谱

6　结论

本文研究了分数阶 Fourier 域上非均匀采样信号的频谱重构问题. 首先根据周期非均匀采样点的特点,导出了分数阶 Fourier 域上周期非均匀采样信号的分数阶频谱表示,得到了分数阶 Fourier 域上分数阶频谱和信号的连续频谱之间的关系,并且根据这种关系提出了一种由非均匀采样信号重构原始信号分数阶频谱的算法;其次,进一步给出了分数阶 Fourier 变换域上一般非均匀采样信号的重构公式;最后,利用周期非均匀采样信号模型作为例子,给出仿真实验结果. 该理论的提出将进一步完善分数阶 Fourier 域上的非均匀采样信号理论体系,并进一步推动其在应用领域发挥更大的作用.

参考文献:

[1] H M Ozaktas, Z Zalevsky, M A Kutay. The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing [M]. USA: John Wiley & Sons, 2001.

[2] 陶然,齐林,王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2004.
TAO Ran, QI Lin, WANG Yue. Theory and Applications of the Fractional Fourier Transform [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)

[3] Tao Ran, Deng Bing, Yue Wang. Research progress of the fractional Fourier transform in signal processing [J]. Science in China (Ser. F, Information Science), 2006, 49(1): 1 - 25.

[4] X G Xia. On bandlimited signals with fractional Fourier transform [J]. IEEE Signal Processing Letters, 1996, 3(3): 72 - 74.

[5] A I Zayed. On the relationship between the Fourier and fractional Fourier transforms [J]. IEEE Signal Processing Letters, 1996, 3(12): 310 - 311.

[6] 张卫强,陶然. 分数阶傅里叶变换域上带通信号的采样定理[J]. 电子学报, 2005, 33(7): 1196 - 1199.
ZHANG Weiqiang, TAO Ran. Sampling theorems for bandpass signals with fractional Fourier transform [J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(7): 1196 - 1199. (in Chinese)

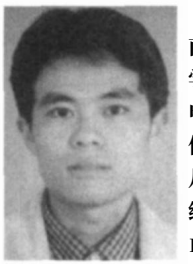
[7] Y C Jenq. Digital spectra of nonuniformly sampled signals: fundamentals and high-speed waveform digitizers [J]. IEEE Trans Instrum Meas, 1988, 37(6): 245 - 251.

[8] F Marvasti. Nonuniform sampling theory and practice [M]. the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[9] Y C Jenq. Perfect reconstruction of digital spectrum from nonuniformly sampled signals [J]. IEEE Trans Instrum Meas, 1997, 46(6): 649 - 652.

[10] 李炳照,陶然,王越. 非均匀采样信号的分数阶数字频谱研究[J]. 电子学报, 2006, 34(12): 2146 - 2149.
LI Bingzhao, TAO Ran, WANG Yue. Fractional spectrum of nonuniformly sampled signals [J]. ACTA Electronica Sinica, 2006, 34(12): 2146 - 2149. (in Chinese)

作者简介:



李炳照　男,讲师. 1975 年 4 月生于山东沂南. 1998 年、2001 年、2007 年分别在山东师范大学数学系、北京理工大学数学系、北京理工大学电子工程系获理学学士、理学硕士和工学博士学位. 现为北京理工大学理学院数学系教师,主要从事均匀、非均匀采样理论、时频分析理论及系统建模等方面的研究.
E-mail: li_bingzhao@bit.edu.cn

陶　然　男,教授、博士生导师. 1964 年 11 月出生于安徽南陵, 1993 年于哈尔滨工业大学获博士学位,现为北京理工大学电子工程系教授. 主要从事分数阶 Fourier 变换理论及应用、信息安全与对抗、通信与信息系统等研究工作.
E-mail: rantao@bit.edu.cn

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net