

# 一种基于修正的最小生成树及其邻接谱的特征匹配算法

宣善立<sup>1,2</sup>, 梁 栋<sup>1</sup>, 朱 明<sup>1</sup>, 范益政<sup>1,3</sup>, 王 年<sup>1</sup>

(1. 安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽合肥 230039;

2. 合肥工业大学计算机与信息学院, 安徽合肥 230009;

3. 安徽大学数学科学学院, 安徽合肥 230039)

**摘 要:** 提出一种基于修正的最小生成树及其邻接谱的特征匹配算法. 该算法利用两幅图像的特征点分别构造最小生成树, 并对最小生成树进行修正, 然后对修正的最小生成树的赋权邻接矩阵进行 SVD 分解, 获得点的特征表示, 进而利用特征值及特征向量来构造匹配矩阵, 实现特征匹配. 该算法的优点在于采用图的最小生成树(而不是整个图), 可以减少多余信息的干扰, 提高匹配精度, 实验结果表明, 该算法具有较高的匹配精度.

**关键词:** 特征点; 匹配; 最小生成树; 邻接谱

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 02-0269-06

## A Feature Matching Algorithm Based on Adjacent Spectrum of Modificatory Minimize Spanning Tree

XUAN Shan-li<sup>1,2</sup>, LIANG Dong<sup>1</sup>, ZHU Ming<sup>1</sup>, FAN Yi-zheng<sup>1,3</sup>, WANG Nian<sup>1</sup>

(1. Key Lab Intelligent Computing and Signal Ministry of Education, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China;

2. School of Computer and Information, HeFei University of Technology, Hefei, Anhui 230009, China;

3. School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China)

**Abstract:** Based on adjacent spectrum of modificatory minimize spanning tree, a new feature matching algorithm was proposed in this paper. According to the feature points of two related images, two minimize spanning trees were found and modified. The weighted adjacent matrices of the modificatory minimal spanning trees were submitted to singular-value decomposition(SVD), and then the characteristics of the feature points were obtained. The matching was completed by constructing matching matrix with eigenvalues and eigenvectors. The advantage of this algorithm is that it can reduce the intrusion of the extra information and improve matching accuracy by using the minimal spanning tree of the graph. Experimental results show that the algorithm has a higher accuracy.

**Key words:** feature point; matching; minimal spanning tree; adjacent spectrum

## 1 引言

点模式匹配是计算机视觉和模式识别领域中的一个重要问题, 其主要任务是将满足一定几何变换关系的同一场景的两幅图像中的特征点匹配成对, 从而识别和定位物体, 适用于解决基于光学传感器应用中的许多问题, 如零件识别、运动检测、飞行器导航和姿态测定等.

近年来在计算机视觉和模式识别领域, 如图像匹配、聚类和分割等, 谱图理论得到了越来越多的应用<sup>[1~9]</sup>. Umeyama<sup>[7]</sup>提出了一种 SVD 分解方法, 以寻找两个图的邻接矩阵之间的最小平方置换矩阵. 这种分解

方法适用于精确的图匹配, 它可在具有相同点和边结构的两幅图中, 寻找点之间的对应关系. 借助结构化学的思想, Scott 和 Longue-Higgins<sup>[5]</sup>首次将谱方法应用于图像匹配, 即通过构造图像之间点的亲近矩阵, 并对此矩阵进行 SVD 分解来获得对应关系. 该方法可以处理不同大小的点集, 但对较大角度的旋转效果不好. 为了克服 Scott 和 Longue-Higgins 方法的不足, Shapiro 和 Brandy<sup>[6]</sup>采用了图像内部点的亲近矩阵来进行匹配. Carcassoni<sup>[1]</sup>将图谱分析方法和 EM 算法结合起来, 通过点的亲近矩阵来获得点匹配的概率. 为了获得更精确的结果, Carcassoni<sup>[2]</sup>还采用了一种分层方法来解决匹配问题, 即在

高层次上,通过模式分析得到点聚类中心的对应,在低层次上,用聚类中心对应来约束个体点的对应. Myers<sup>[3]</sup>提出了贝叶斯框架下的基于多模式的遗传算法,用来解决图像中不确定特征点集的匹配问题. 孙冬梅等<sup>[10]</sup>利用薄板样条函数并结合模拟退火法来实现非刚体的匹配,但算法需要指数级的时间.

Shapiro 和 Brandy 的方法实际上是对赋权图的邻接矩阵进行处理,即对每个点的权赋以 1,而对每条边的权则赋以该边所连两点之间距离的高斯函数值,然后通过赋权邻接矩阵的谱及其特征向量来得到特征点之间的对应关系. 可以发现这些工作的主要思路是:(1)构造赋权完全图;(2)获取赋权完全图的谱信息以刻画特征信息.

由于赋权完全图强调任意两个顶点之间都有权,信息丰富,但太多的信息往往会增加问题处理的复杂性,所以我们思考:从赋权完全图中找出其最小生成树,是否可行? 另一方面,考虑到邻接矩阵可以包含图的全图信息,我们对最小生成树应用其邻接矩阵,是否可行? 根据上述思考,我们首先从赋权完全图中找出其最小生成树,并对最小生成树进行了修正,然后构造赋权邻接矩阵,对其进行 SVD 分解,获得点的特征表示,进而利用特征值及特征向量来构造匹配矩阵,实现特征匹配. 实验结果表明该算法对平移、旋转、缩放、仿射、射影 5 种变换都有较好的匹配结果,而且对于真实图像序列也能够获得较高的匹配精度. 这说明本文算法是有效的.

## 2 基本概念

设  $G$  是一个含有  $n$  个顶点的图,  $v$  是  $G$  的一个顶点. 与  $v$  关联的边的数目称为  $v$  的度,

一个不含圈的连通图称为树,图中度为 1 的顶点称为悬挂点,与悬挂点所邻接的顶点称为拟悬挂点.

**定义 1<sup>[8]</sup>** 设  $G$  是一个含有  $n$  个顶点的连通图,  $G$  的一个含有  $n$  个顶点、 $n-1$  条边的连通子图称为  $G$  的生成树.

**定义 2<sup>[8]</sup>** 若  $G$  是一个边赋权图,在  $G$  的所有生成树中,边权和最小的称为  $G$  的最小生成树.

最小生成树问题可以用不同的算法解决,其中最经典的算法有 Kruskal 算法和 Prim 算法<sup>[8]</sup>,本文采用 Prim 算法.

设  $G$  是一个含有  $n$  个顶点的图,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  是  $G$  的  $n$  个顶点. 图  $G$  的赋权邻接矩阵  $A(G)$  定义为:

$$A(G) = [a_{ij}] = \begin{cases} \|v_i - v_j\|, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 邻接} \\ 0, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 不邻接} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\|v_i - v_j\|$  表示  $v_i$  与  $v_j$  之间的欧氏距离.

$A(G)$  的特征值全体称为图  $G$  邻接谱. 我们这里所提到的邻接谱不仅仅局限于特征值,还包含了对应于特征值的特征向量.

## 3 基于最小生成树及其邻接谱的特征匹配算法

设  $I, J$  是两个相关的点集,均含有  $m$  个顶点,记  $I$  中的顶点为  $v_i (i=1, 2, \dots, m)$ .

对  $I, J$  中的  $m$  个顶点构造完全图,并对完全图中的每条边赋权,权值为边所连接的两个顶点之间的欧氏距离. 在每幅完全图中寻找最小生成树,并按照 (1) 对最小生成树构造邻接矩阵  $A(I)$  和  $A(J)$ .

对  $A(I)$  与  $A(J)$  进行奇异值分解(SVD),即将  $A(I)$  与  $A(J)$  分别表示成乘积的形式:

$$A(I) = U\Delta(I)U^T \quad (2)$$

$$A(J) = V\Delta(J)V^T \quad (3)$$

其中  $\Delta(I) = \text{diag}\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_m|\}$ ,  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, m)$  为  $A(I)$  的特征值,  $U = (U_1, U_2, \dots, U_m)$ ,  $U_i$  为  $\Delta(I)$  的对应于特征值  $\lambda_i$  的特征向量;  $\Delta(J) = \text{diag}\{|\delta_1|, |\delta_2|, \dots, |\delta_m|\}$ ,  $\delta_i (i=1, 2, \dots, m)$  为  $A(J)$  的特征值,  $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)$ ,  $V_i$  为  $\Delta(J)$  的对应于特征值  $\delta_i$  的特征向量.

对  $U$  和  $V$  进行处理,首先把  $U$  (或  $V$ ) 的第  $i$  行向量视为点集  $I$  (或  $J$ ) 的第  $i$  个点的特征;其次对  $U$  和  $V$  进行符号校正,使得  $U$  和  $V$  相对应的分量符号尽可能的一致,方法是寻找一个符号矩阵  $S$ , 以及一个置换矩阵  $P$ , 使得  $\|U - PVS\|$  达到其最小值. 最后,考虑

$$\begin{aligned} \|U^{(i)} - V^{(j)}\|^2 &= (U^{(i)} - V^{(j)})(U^{(i)} - V^{(j)})^T \\ &= 2[1 - U^{(i)}(V^{(j)})^T] \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $U^{(i)}$  代表  $U$  的第  $i$  个行向量,  $V^{(j)}$  代表  $V$  的第  $j$  个行向量.  $U^{(i)}$  与  $V^{(j)}$  间距离小等价于  $U^{(i)}(V^{(j)})^T$  值大,这意味着点集  $I$  的第  $i$  个点非常可能与点集  $J$  的第  $j$  个点匹配. 因此我们只需按下述方法构造匹配矩阵  $M$ :

$$M = U(VS)^T = [U^{(i)}(V^{(j)})^T] = [M_{ij}] \quad (5)$$

其中  $V^{(j)}$  是  $VS$  ( $V$  的符号校正矩阵) 的第  $j$  行. 若  $M_{ij}$  是其所在的行与列的最大元,则认为点集  $I$  的第  $i$  个点与点集  $J$  的第  $j$  个点匹配.

## 4 最小生成树的修正

在验证最小生成树匹配算法时,我们发现:若存在多于两个悬挂点连接在同一拟悬挂点上,则该算法不能够很好地处理这些悬挂点之间的对应关系. 主要原因是这些悬挂点在邻接矩阵中对应的列或行是成比例的,这就降低了矩阵的秩,导致在 SVD 分解过程中出现多个 0 特征值,对匹配结果产生不利的影响. 为了提高算法的匹配精度,我们对最小生成树进行了修正. 在寻找到两个最小生成树后,对赋权邻接矩阵  $A(I)$  与  $A(J)$  分别寻找其中只含有一个非零元的行,并比较这些行

中非零元所在的列,若矩阵中有  $t(t \geq 2)$  个非零元在同一列,那么就称这  $t$  个非零元所在的行对应的顶点为不稳定点. 设  $\|(u, v)\|$  表示边  $(u, v)$  的长度(即权值),易知这里所定义的不稳定点只能是悬挂点. 设悬挂点  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_t$  连接到同一个拟悬挂点  $v_0$ , 且假设

$$\|(v_0, v_1)\| \geq \|(v_0, v_2)\| \geq \|(v_0, v_3)\| \geq \dots \geq \|(v_0, v_t)\| \quad (6)$$

在树中删除边  $(v_0, v_2), (v_0, v_3), \dots, (v_0, v_t)$ , 并在相应的树中增加边  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{t-1}, v_t)$ , 则在保证所得到的图是树的前提下,我们消除了这些不稳定点.

如图 1 所示,每个树均有 3 个不稳定点,用 II、III、IV 来表示,拟悬挂点用 I 来表示,且边  $\|(I, III)\| > \|(I, IV)\| > \|(I, II)\|$ , 因此删除边  $(I, IV)$ 、 $(I, II)$ , 增加边  $(III, IV)$  和  $(IV, II)$ , 用这种方法,我们就消除了不稳定点. 在图 1 中点 III 与 IV 错配,但在图 2 中,它们得到了正确的匹配.

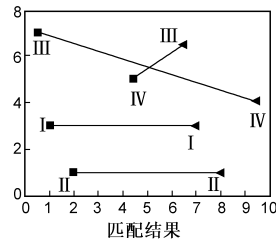
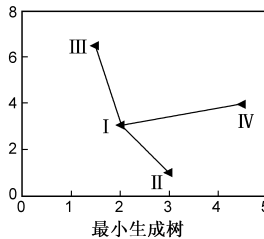
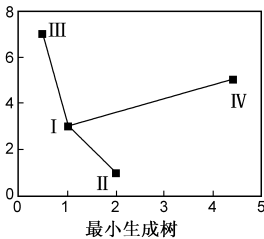


图1 修正前的匹配结果

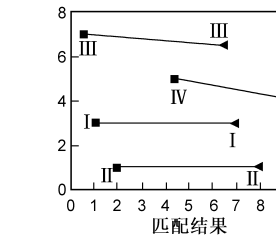
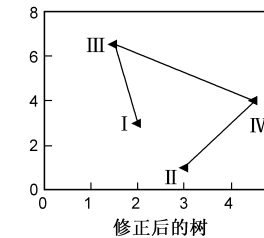
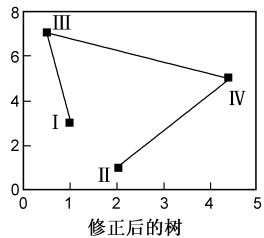
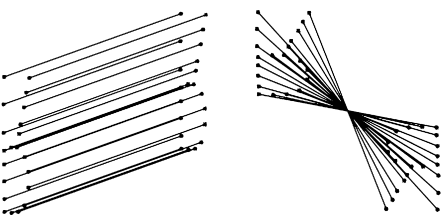


图2 修正后的匹配结果

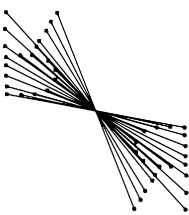
## 5 实验及分析

### 5.1 模拟图像实验

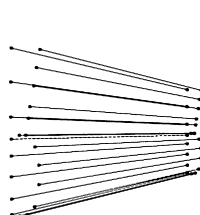
我们构造一个由 21 个特征点构成的字母“R”, 并



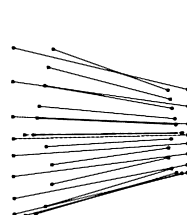
(1) 平移变换下匹配



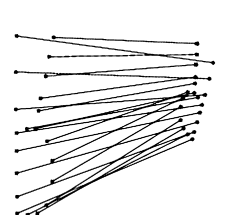
(2) 旋转变换下匹配



(3) 缩放变换下匹配



(4) 仿射变换下匹配



(5) 射影变换下匹配

图3 不同变换下的匹配

### 5.2 算法性能分析

将基于最小生成树及其邻接谱的特征匹配算法记为 MSTA 算法、基于修正的最小生成树及其邻接谱的特

根据以上分析,本文具体算法如下:

(1) 对点集  $I, J$  分别构造赋权完全图;

(2) 在每个完全图中寻找最小生成树;

(3) 对最小生成树进行修正,并构造赋权邻接矩阵  $A(I)$  与  $A(J)$ ;

(4) 对赋权邻接矩阵  $A(I)$  与  $A(J)$  进行 SVD 分解;

(5) 对  $V$  的列进行符号校正;

(6) 构造匹配矩阵  $M$ ;

(7) 在匹配矩阵  $M$  中寻找  $M_{ij}$ , 若  $M_{ij}$  是其所在的行与列的最大元, 则点集  $I$  的第  $i$  个点与点集  $J$  的第  $j$  个点是一对匹配点.

注: 若点集  $I, J$  的点数不相等, 则不妨设点集  $I$  的点数为  $m$ , 点集  $J$  的点数为  $n$ , 且  $m < n$ . 此时仅保留  $A(J)$  的前  $m-1$  个特征向量以及最后 1 个特征向量, 删除第  $m-1$  个特征向量后的  $n-m$  个特征向量, 以达到阶数一致.

用本文算法对字母“R”进行匹配实验, 分别验证了本文算法对平移、旋转、缩放、仿射、射影 5 种变换的匹配结果, 如图 3 所示. 从实验结果看出, 本文算法可以很好地处理这 5 种变换的匹配问题.

征匹配算法记为 AMSTA 算法、Shapiro 与 Brady 的算法简记为 Shapiro 算法.

我们研究了这三种算法对点抖动(坐标进行微小的移动)的匹配结果.选取 100 个随机点,并对这些点进行抖动,经过多次实验,取其正确匹配点数的平均值进行比较.图 4 的纵坐标为正确的匹配点数,横坐标为抖动幅度(以平均距离的百分比表示),三条曲线分别对应于 AMSTA 算法、MSTA 算法和 Shapiro 算法匹配结果.实验表明,三种算法在抖动幅度变大时,准确率均有下降,但 AMSTA 算法与 MSTA 算法的匹配结果都明显好于 Shapiro 算法.当抖动幅度在 20% 以内时,AMSTA 算法与 MSTA 算法的精度可达到 90% 以上,而 Shapiro 算法在抖动幅度达到 20% 时只有 70%.这是因为当抖动幅度变大时,对于完全图来说,包含的信息多,其中许多信息在变化后会成为负面信息(具有  $n$  个顶点的完全图包含  $n(n-1)$  条边,在变化以后,很多边的长度发生了改变,且改变的值会不一致),从而会影响匹配结果,而最小生成树含有的边少(具有  $n$  个顶点的树只包含  $n-1$  条边),受抖动幅度的影响相对来说就要小,匹配结果就会好一些. AMSTA 算法的匹配结果一直比 MSTA 算法好,这说明对最小生成树进行的修正是有效的.

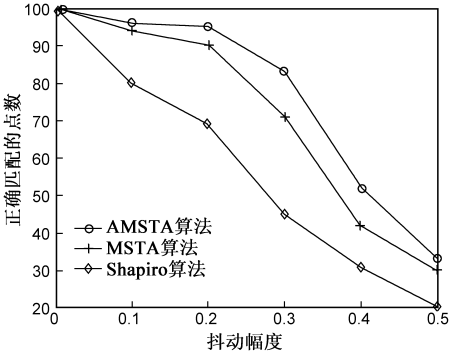


图4 算法性能分析

5.3 真实图像实验

我们还通过大量的真实图像实验来验证本文算法,实验图像来自于 CMU/VASC 图像数据库的图像序列,选取了 6 帧,分别是第 1 帧、第 10 帧、第 20 帧、第 25 帧、第 30 帧、第 39 帧,以第 30 帧作为基准图像,其它图像与其匹配,对每幅图像提取 30 个特征点.图 5 中的 (a)、(b)、(c)、(d)、(e) 分别是匹配结果,其中左边是 AMSTA 算法的匹配结果,中间是 MSTA 算法的匹配结果,右边是 Shapiro 算法的匹配结果.

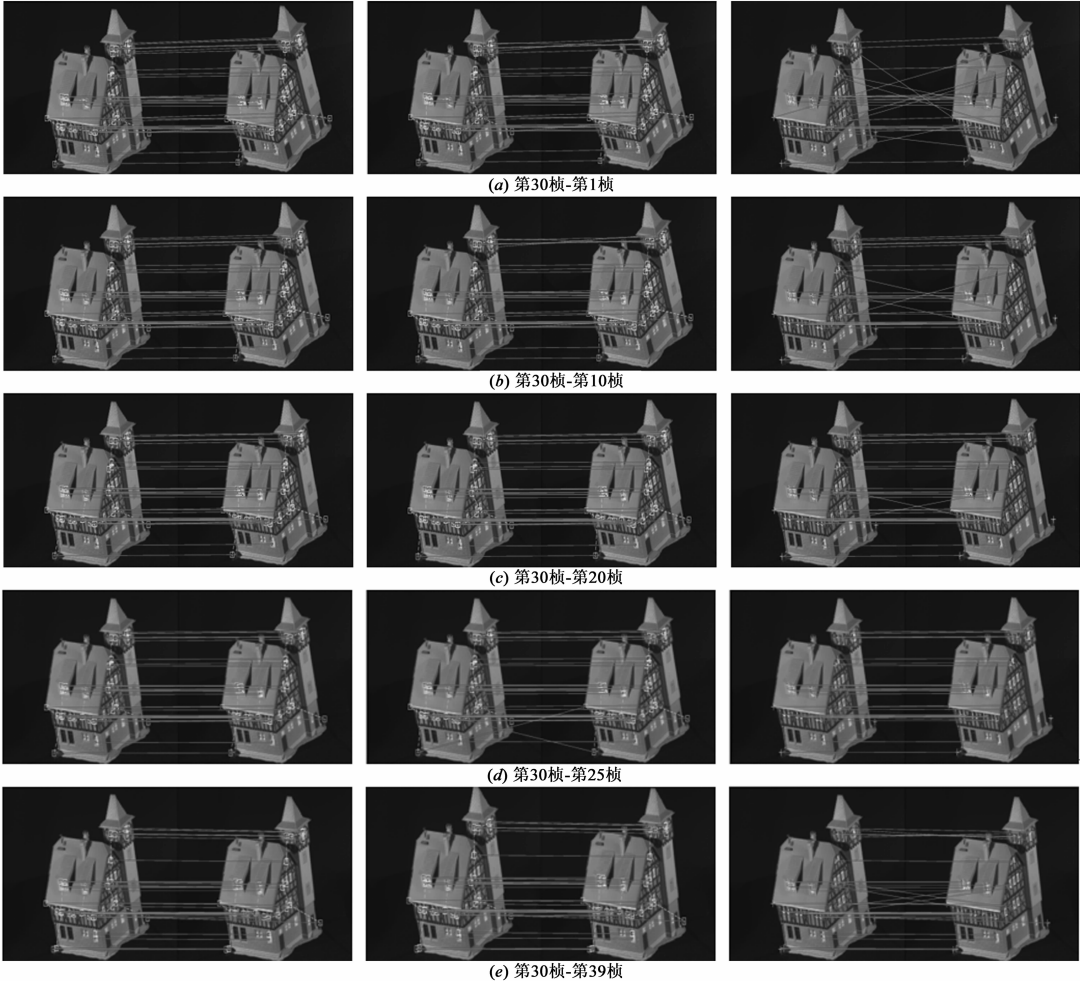


图5 AMSTA算法、MSTA算法和Shapiro算法的匹配结果

上述实验的匹配对象是刚体,下面我们选择非刚体对象进行实验,并将 AMSTA 算法、MSTA 算法与 Shapiro 算法的匹配结果进行比较.实验中,我们选择 5 对图像,10 个特征点,图 6 中的 (a)、(b)、(c)、(d)、(e) 分别为匹配结果,其中左边是 AMSTA 算法的匹配结果,

表 1 AMSTA 算法、MSTA 算法与 Shapiro 算法实验结果对比

实验图像	30-1	30-10	30-20	30-25	30-39
正确匹配点数 (AMSTA 算法)	30	30	30	30	30
正确匹配点数 (MSTA 算法)	28	28	30	28	30
正确匹配点数 (Shapiro 算法)	20	26	27	28	24

中间是 MSTa 算法的匹配结果,右边是 Shapiro 算法的匹配结果.表 2 是实验结果统计,可以看出当匹配对象相对形变较大时,AMSTA 算法与 MSTa 算法的匹配准确率均有所下降,但好于 Shapiro 算法.

表 2 AMSTA 算法、MSTA 算法与 Shapiro 算法实验结果对比

实验图像	a	b	c	d	e
正确匹配点数 (AMSTA 算法)	10	8	10	10	6
正确匹配点数 (MSTA 算法)	10	6	10	10	5
正确匹配点数 (Shapiro 算法)	8	2	3	6	5

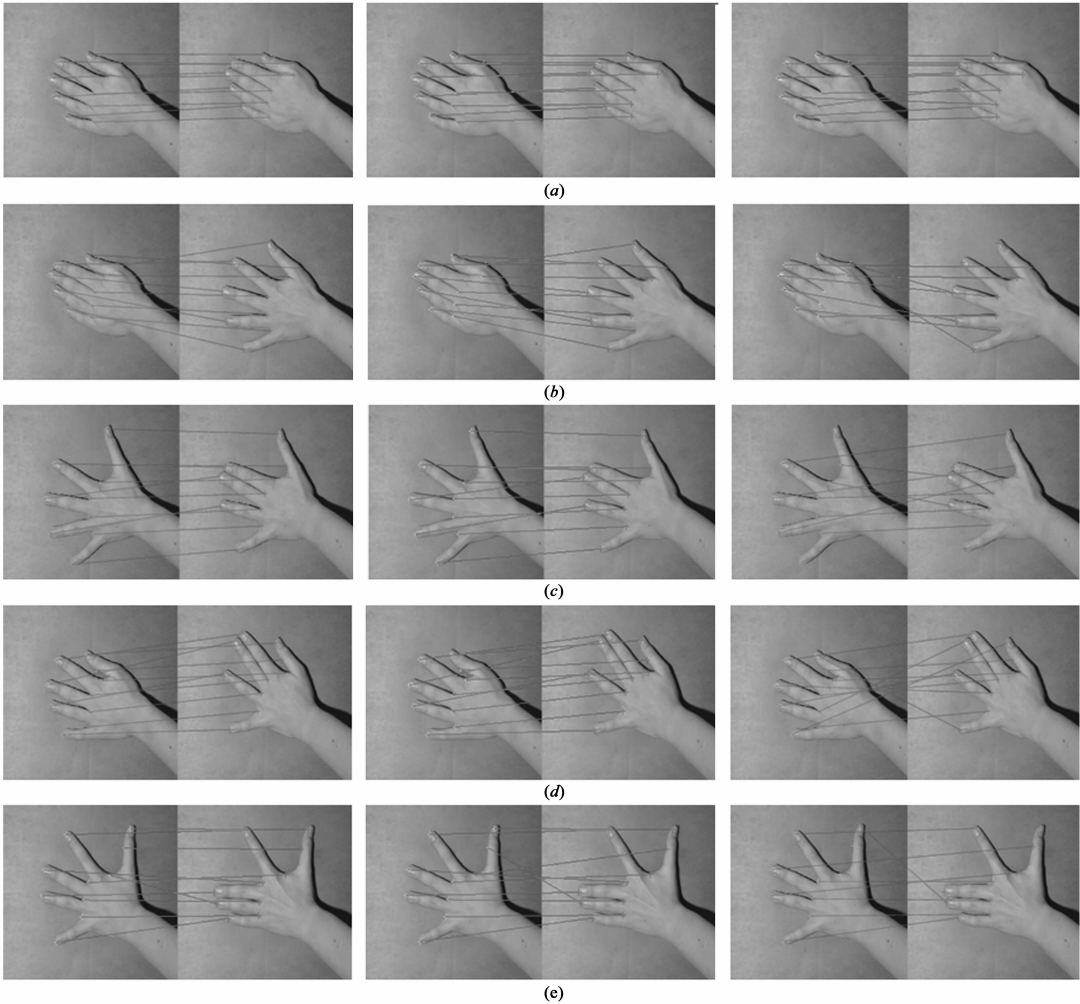


图6 AMSTA算法、MSTA算法和Shapiro算法的匹配结果

6 结论

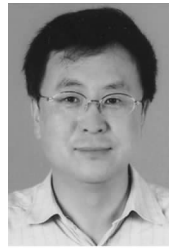
本文基于最小生成树及其邻接谱,并对最小生成树进行了修正,提出一种特征匹配算法,模拟图像和真实图像实验均验证了本文算法具有较高的匹配精度,

但在处理非刚体对象的特征匹配时,尤其是当匹配对象形变较大时,还存在着一定的误差,这是我们今后需要进一步探究和改进的.

## 参考文献:

- [1] M Carcassoni, E R Hancock. Spectral correspondence for point pattern matching[J]. Pattern Recognition, 2003, 36(1): 193 – 204.
- [2] M Carcassoni, E R Hancock. Correspondence matching with modal clusters[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, 25(12): 1609 – 1615.
- [3] Myers Richard, E R Hancock. Least-commitment graph matching with genetic algorithms[J]. Pattern Recognition, 2001, 34(2): 375 – 394.
- [4] A Sanfeliu, R Alquezar, J Andrade, J Climent, F Serratos, J Verges. Graph-based representations and techniques for image processing and image analysis[J]. Pattern Recognition, 2002, 35(3): 639 – 650.
- [5] G L Scott, H C Longuet-Higgins. An algorithm for associating the features of 2 images[J]. Proc. Roy. Soc London Ser, B, 1991, 244: 21 – 26.
- [6] L S Shapiro, J M Brady. Feature-based correspondence-eigenvector approach[J]. Image Vision Comput, 1992, 10(5): 283 – 288.
- [7] Umeyama S. An eigen dcomposition approach to weighted graph matching problems[J]. IEEE Transactions on Patten Analysis and Machine Intelligence, 1998, 10(5): 695 – 703.
- [8] Gary Chartland, Ping Zhang. Introduction to Graph Theory [M]. McGraw-Hill College Press Ltd, 2005. 94 – 101.
- [9] 王年, 范益政, 鲍文霞, 韦穗, 梁栋. 基于图割的图像匹配算法[J]. 电子学报, 2006, 34(2): 232 – 236.  
Wang Nian, Fan Yi-zheng, Bao Wen-xia, Wei Sui, Liang Dong. An images matching algorithm based on graph cuts[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(2): 232 – 236. (in Chinese)
- [10] 孙冬梅, 裘正定. 利用薄板样条函数实现非刚性图像匹配算法[J]. 电子学报, 2002, 30(8): 1104 – 1107.  
Sun Dong-mei, Qiu Zheng-ding. Anew non-rigidimge matching algorithm using thin-plate spline[J]. Acta Electronica Sinica. 2002. 30(8): 1104 – 1107. (in Chinese)

## 作者简介:



宣善立 男, 1964 年出生于陕西西安, 博士研究生, 研究方向为计算机视觉、图像处理、模式识别。

梁 栋 (通讯作者) 男, 1963 年出生于安徽合肥, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为计算机视觉、图像处理、模式识别。

E-mail: dliang@ahu.edu.cn