

使用改进的时域积分方程法计算 导体目标的瞬态散射

王 湃, 夏明耀, 周乐柱, 董 硕
(北京大学信息科学技术学院电子学系, 北京 100871)

摘 要: 本文推导了一种改进的时域积分方程(TDIE)方法, 用于计算任意导体目标的瞬态电磁散射问题. 采用隐式时间步进法, 对典型导体目标包括尖劈板、立方体、导体球和球冠锥体进行了求解, 得到了正确的瞬态响应结果, 没有发现后期不稳定性现象.

关键词: 时域积分方程; 矩量法; 瞬态电磁散射; 导体目标

中图分类号: O441.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2005)03-0488-04

Calculations of Transient Scattering by Conductors Using a Modified Time Domain Integral Equation (TDIE) Method

WANG Pai, XIA Ming yao, ZHOU Le zhu, DONG Shuo
(Department of Electronics, Peking University, Beijing, 100871, China)

Abstract: A modified Time domain Integral Equation (TDIE) method is proposed and used to calculate the transient electromagnetic scattering by arbitrary conducting objects. Some typical targets, including a pie shaped plate, a cube, a sphere and a specific conical model, are analyzed and discussed using the Implicit Marching On in Time scheme. The present approach gives correct transient responses from conducting objects, and late time instability is not observed.

Key words: time domain integral equation; method of moments; transient electromagnetic scattering; conducting objects

1 引言

瞬态电磁学研究有着广泛的应用背景, 包括电磁兼容、目标识别和成像、反隐身技术、超宽带雷达、电路和天线的瞬态信号分析等. 与频域方法相比, 时域方法有其突出的优点, 如: (1) 时域方法的一次模拟可以获得宽带数据, 而频域方法需要计算许多频率取样点, 再通过傅立叶逆变换得到有限带宽的时域数据, 计算量一般要大得多; (2) 时域方法直接给出时域结果, 能清晰地反映出电磁波与目标随时间的相互作用.

计算电磁学中的时域方法包括时域有限差分(FDTD)法和时域积分方程(TDIE)法. FDTD 是基于 K. S. Yee 1966 年提出的 Yee 氏网格单元的一种微分方程方法^[1], 其基本理论比较简单; 但是对于三维问题, 要采用空间离散, 所以未知量数目较多, 边界条件包括吸收边界条件必须小心处理. 与 FDTD 相比, TDIE 理论公式要复杂一些; 但是因为采用表面离散, 所以未知量要少得多, 而且边界条件是自动被满足的, 没有吸收边界条件处理等问题. Bennett 1968 年首先将 TDIE 应用到电磁学领域^[2], 但是受计算方法和计算机性能的限制, 直到上世纪

九十年代, TDIE 才获得重要进展, 主要标志如: (1) 采用隐式时间步进法(IMOT, Implicit Marching on in time)代替原先的显式时间步进法(EMOT, Explicit Marching on in time), 解决了一些计算实例的后期不稳定性^[3,4]; (2) 直接从早先的时域响应通过外插值方法获得后期响应, 因为激励源消失后的后期响应是衰减振荡^[5], 避免了不稳定的后期响应的计算; (3) 计算方法的进步, 包括借鉴频域快速多级子方法(FMM)提出的时域平面波(PWTD)算法, 基本解决了三维电大物体瞬态散射的计算^[6,7]. 近几年, TDIE 又成为计算电磁学的一个研究热点.

本文首先推导了一种既适合于分层介质又适合自由空间问题的通用时域积分方程(TDIE)公式, 接着采用隐式时间步进法(IMOT)计算了三维复杂导体目标的瞬态散射, 因为 IMOT 的时间步长可以自由调整, 不仅有利于克服数值不稳定性, 也可以提高计算效率. 尽管 IMOT 在每个时间步都要求解稀疏矩阵方程, 但总体计算时间一般少于 EMOT, 因为 EMOT 的时间步长受空间离散密度的限制, 所需要的时间步比 IMOT 大很多. 本文第二部分推导改进的时域积分方程矩量法公式, 第三部分给出计算实例的数值结果和相关讨论.

2 基本原理与公式

对于三维任意目标瞬态散射问题, 目前几乎所有文献采用的时域积分方程公式都仅局限于求解自由空间目标的分析. 考虑到时域积分方程(TDIE)对分层介质等非自由空间问题的通用性, 我们把矢势、标势用一般的时域格林函数来表示, 这样针对不同的问题, 只要更换相应的时域格林函数形式就可以了.

根据导体表面总切向电场为零的边界条件, 可以得到时域电场积分方程(TDEFIE):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \right]_{\text{tan}} = [\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)]_{\text{tan}} \quad (1)$$

把矢势和标势分别用时域格林函数来表示:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int_S \int_0^t g_A(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') dt' dS' \quad (2)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_S \int_0^t g_q(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \cdot \sigma(\mathbf{r}', t') dt' dS' \quad (3)$$

其中电流分布 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 和电荷分布 $\sigma(\mathbf{r}, t)$ 满足电流连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \sigma(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4)$$

进一步, 可以把 $g_A(R, \tau)$ 、 $g_q(R, \tau)$ 写为:

$$g_A(R, \tau) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} G_A(R, \tau), \quad g_q(R, \tau) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial \tau} G_q(R, \tau) \quad (5)$$

对于在自由空间情形, 有 $G_A = G_q = U(\tau, R/c)/R$, 其中 $U(\cdot)$ 是单位阶跃函数, 利用 $\partial U(\tau - R/c)/\partial \tau = \delta(\tau - R/c)$, 将此式代入式(2)(3)便得到熟知的自由空间下的推迟势公式. 把式(2)~(5)代入到式(1), 得到积分方程为:

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} + \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \right]_{\text{tan}} = [\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)]_{\text{tan}} \quad (6)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \int_0^t G_A(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') dt' dS' \quad (7)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{-1}{4\pi\epsilon} \int_S \int_0^t G_q(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') dt' dS' \quad (8)$$

对于自由空间, \mathbf{A} 就是熟知的 Hertz 矢量, $\phi = -\nabla \cdot \mathbf{A}$. 对于非自由空间比如微带结构^[10], $G_A(R, \tau) \neq G_q(R, \tau) \neq U(\tau - R/c)/R$, 但式(6)~(8)的积分方程和势函数形式仍然成立, 如果 $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t' \leq 0) = 0$ 的话(相当于假定 $\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t \leq 0) = 0$). 另外, 因为式(3)中的电荷密度需要通过式(4)与所求解的电流密度相联系, 所以使用式(6)~(8)比式(1)~(3)也更直观. 于是 TDEFIE 变成求解电流时空分布的积分方程式(6). 将电流分布在空域用 RWG 矢量三角基函数^[8]展开, 即 $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')$

$= \sum_{n=1}^N I_n(t') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')$, 并采用 Galerkin 方法在方程两边内积 RWG 权函数, 利用 $\langle \mathbf{f}_m, \nabla \phi \rangle = -\langle \nabla \cdot \mathbf{f}_m, \phi \rangle$, 得到

$$\sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_{mn}^A(t) + \Phi_{mn}^q(t) \right] = V_m^{\text{inc}}(t) \quad (9)$$

其中

$$\Phi_{mn}^{\zeta}(t) = \int_0^t B_{mn}^{\zeta}(t - t') I_n(t') dt', \quad \zeta = A \text{ or } q \quad (10)$$

$$B_{mn}^A(t - t') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{T_m} \int_{T_n} G_A(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' dS \quad (11)$$

$$B_{mn}^q(t - t') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{T_m} \int_{T_n} G_q(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \nabla' \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' dS \quad (12)$$

$$V_m^{\text{inc}}(t) = \int_{T_m} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \quad (13)$$

将式(9)用中心差分格式离散, 在 $t = k\Delta t$ 时刻有

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{(c\Delta t)^2} [\Phi_{mn}^A(k+1) - 2\Phi_{mn}^A(k) + \Phi_{mn}^A(k-1)] + \frac{1}{4} [\Phi_{mn}^q(k+1) + 2\Phi_{mn}^q(k) + \Phi_{mn}^q(k-1)] \right\} = \tilde{V}_m^{\text{inc}}(k) \quad (14)$$

$$\tilde{V}_m^{\text{inc}} = \frac{1}{4} [V_m^{\text{inc}}(k+1) + 2V_m^{\text{inc}}(k) + V_m^{\text{inc}}(k-1)] \quad (15)$$

其中, 将 V_m^{inc} 和 $\Phi_{mn}^q(t)$ 在 $t = k\Delta t$ 时刻的值用它们在相邻时刻的平均值来代替, 这相当于对式(9)的时间测试函数为矩形脉冲而不是点匹配, 这样有利于数值的稳定. 接着, 把电流分布在时域用三角基函数展开, 即

$$I_n(t') = \sum_{l=1}^{\infty} I_n(l) \Delta_l(t'), \quad \Delta_l(\tau) = 1 - \frac{|\tau - l\Delta t|}{\Delta t}, \quad |\tau - l\Delta t| \leq \Delta t \quad (16)$$

代入到式(10), 得到:

$$\Phi_{mn}^{\zeta}(k) = \sum_{l=1}^k C_{mn}^{\zeta}(k-l) I_n(l), \quad \zeta = A \text{ or } q \quad (17)$$

其中

$$C_{mn}^{\zeta}(k-l) = \int_{(l-1)\Delta t}^{\min(l+1)\Delta t, k\Delta t} B_{mn}^{\zeta}(k\Delta t - t') \Delta_l(t') dt' \quad (18)$$

最后, 把式(17)代入到式(14), 并分离出 $(k+1)$ 时间步的电流项, 即

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}^{\zeta}(k+1) &= \sum_{l=1}^{k+1} C_{mn}^{\zeta}(k+1-l) I_n(l) \\ &= \sum_{l=1}^k C_{mn}^{\zeta}(k+1-l) I_n(l) + C_{mn}^{\zeta}(0) I_n(k+1) \end{aligned} \quad (19)$$

得到:

$$\sum_{n=1}^N \left[\frac{C_{mn}^A}{(c\Delta t)^2} + \frac{C_{mn}^q(0)}{4} \right] I_n(k+1) = V_m^{\text{inc}}(k) - \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^k \left\{ \frac{1}{(c\Delta t)^2} [C_{mn}^A(k+1-l) - 2C_{mn}^A(k-l) + C_{mn}^A(k-1-l)] + \frac{1}{4} [C_{mn}^q(k+1-l) + 2C_{mn}^q(k-l) + C_{mn}^q(k-1-l)] \right\} \cdot I_n(l) \quad (20)$$

式(20)可以简写为:

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn}^0 I_n(k+1) = \tilde{V}_m^{\text{inc}} - \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^k Z_{mn}^{k+1-l} I_n(l), \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

于是式(21)就是 TDIE 离散后得到的代数方程组, 从中我们可以看出, 矩阵元素 Z_{mn}^{k+1-l} 代表第 l 个时刻取样点的第 n 条棱

边电流对第 k 个时刻取样点的第 m 条棱边广义电压的贡献, 方程左边所有棱边在 $t = (k + 1)\Delta t$ 时刻的电流可由所有棱边在 $t \leq k\Delta t$ 时刻的电流分布来确定.

具体求解时, 通常首先令时间步数 $k = 0$, 方程右边是 $\tilde{V}_m^{inc}(0)$, 求解方程(21)得到第一个时间步的所有棱边的电流 $I_n(1)$ ($n = 1, \dots, N$), 再令 $k = 1$, 重新计算方程右边, 解方程得到 $I_n(2)$ ($n = 1, \dots, N$), 以此按照时间步数的增加, 可以得到所有时刻的电流分布, 这种方法称为时间步进法(MOT, Marching On in Time). 当时间步长满足 $\Delta t \leq R_{min}/c$ (其中 R_{min} 是空间离散网格的最小距离, c 是场在相应介质中传播的速度) 时, 就是传统的显式时间步进法(EMOT); 若时间步长取得较大, 满足 $\Delta t > R_{min}/c$, 称为隐式时间步进法(IMOT). 采用 IMOT 求解时, 矩阵 $[Z_{mn}^0]$ 是一个稀疏矩阵. 时间步长选取的大小直接影响了 $[Z_{mn}^0]$ 的稀疏程度. 本文采用共轭梯度法在每个时间步上进行迭代求解方程(21), 并把前一时刻得到的电流分布作为下一个时刻迭代求解的初始值. 当得到导体目标表面的电流时空分布后, 就可方便地计算出目标各个方向上的远区时域电磁场, 经快速傅立叶变换(FFT), 可以得到所计算频段范围内所有频率点的雷达散射截面(RCS).

3 计算实例与讨论

本文采用的入射脉冲为高斯脉冲, 如图 1(a) 和图 1(b) 所示, 其时域表示形式为

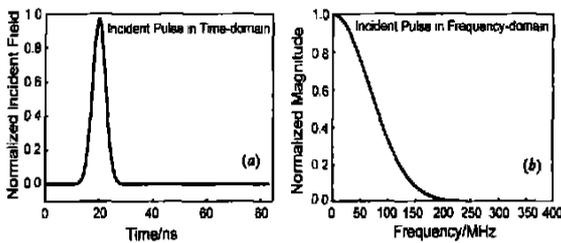


图 1 (a) 入射脉冲时域下的归一化波形
(b) 入射脉冲频域下的归一化波形

$$E(r, t) = E_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left[\frac{t-t_0}{\tau} - r^*k/c\right]^2} \quad (22)$$

其中, E_0 为常数, τ 决定了高斯脉冲的频谱宽度, $\tau = 1/3 \times 10^{-8} s$, $t_0 = 2 \times 10^{-8} s$, k 为脉冲入射方向, 取 $k = -\hat{z}$. 入射脉冲经傅立叶变换得到其频域表达式为 ($r = 0$)

$$E^{inc}(f) = E_0 \tau e^{-2j\pi f t_0} e^{-(\pi f \tau)^2} \quad (23)$$

当 $f = 200 MHz$ 时, 其频谱为最大值的 1.24%.

首先, 取高斯脉冲的 $E_0 = 120\pi \hat{a}_x$, 求出二维尖劈板和三维立方体在高斯脉冲照射下的瞬态电流分布. 二维尖劈板由一个等边三角平板和半个圆盘组合而成, 半圆盘的直径为 0.5m, 圆心为 xy 平面的原点. 用 RWG 三角基函数离散后得到 76 个三角形, 103 条棱边, 时间步长取 0.83ns, 图 2 得到了尖劈板在 $(0, 0, 0.0417m)$ 处的电流随时间的分布. 立方体边长 0.2m, 离散后得到 64 个三角形, 96 条棱边, 同样取时间步长 0.83ns, 得到上表面中心的电流响应, 如图 3 所示. 从图 2 和图 3 可以看出, 所得到的电流响应非常稳定, 与文献[9]也完全吻合.

接着, 取 $E_0 = 1.0 \hat{a}_x$, 计算了直径 2m 导体球的远区散射场. 导体球离散为 336 个平面三角形, 504 条棱边, 时间步长取 0.83ns, 分别得到后向和侧向归一化远区瞬态场如图 4(a) 和 4(b) 所示. 在图 4(a) 中, 第一个峰值由球上顶点的镜像反射产生, 第二个峰值在延迟了大约 $(2a + \pi a)/c$ (a 为导体球半径) 时间后产生, 这恰恰就是球的下顶点处感应电流沿球面爬行的结果. 因此, 时域积分方程可以清楚地反映爬行波的贡献, 这是频域方法不易观察到的. 此外, 将导体球时域下的响应经快速傅立叶变换可以得到频域下的后向 RCS 曲线, 并与严格的理论结果进行了比较, 如图 5 所示. 由于离散后的网格最小距离是 $R_{min} = 0.1568m$, 大约对应最小波长 λ_{min} 的 1/10, 所以只能准确计算满足 $f < f_{max} = \frac{c}{\lambda_{min}} \approx \frac{c}{10R_{min}} \approx 191 MHz$ 的频率分量, 于是图 5 中只给出了频率小于 200MHz 的部分.

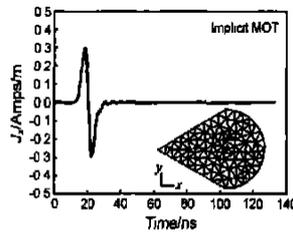


图 2 尖劈板 $(0,0,0.0417m)$ 处的瞬态电流分布

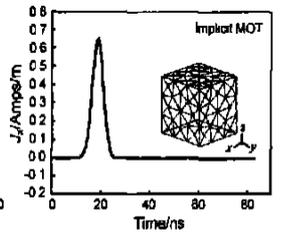


图 3 立方体上表面中心的瞬态电流分布

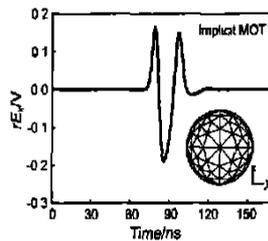


图 4 (a) 导体球后向 $(\theta=0, \phi=0)$ 远区散射场 (b) 导体球侧向 $(\theta=90, \phi=90)$ 远区散射场

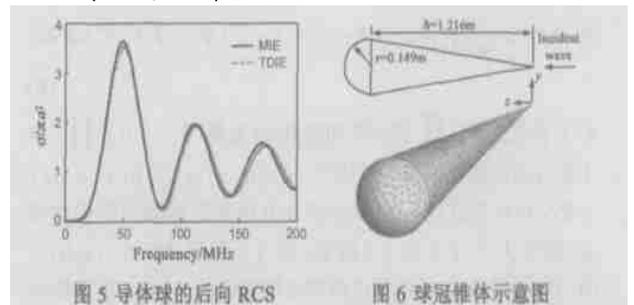
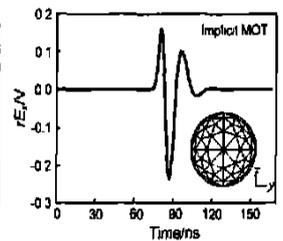


图 5 导体球的后向 RCS

图 6 球冠锥体示意图

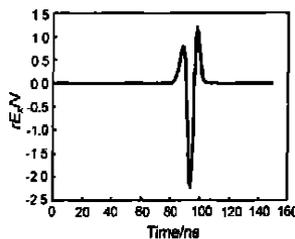


图 7 球冠锥体后向 $(\theta=180, \phi=0)$ 远区散射场

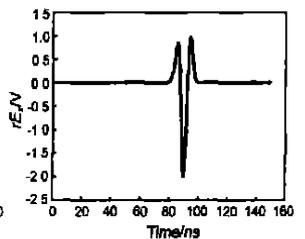


图 8 球冠锥体侧向 $(\theta=90, \phi=90)$ 远区散射场

最后,我们对图 6 所示的球冠锥体模型进行了计算.将表面剖分成 296 个三角形,444 条棱边,采用式(22)的脉冲照射,此时 $E_0 = 1.0\hat{a}_x$, $k = z$, 时间步长 $\Delta t = 0.83\text{ns}$.图 7 和图 8 分别是其后向和侧向归一化远区瞬态场.

4 结论

本文推导了一种改进的时域积分方程(TDIE)矩量法公式,在积分方程中用赫兹势代替磁矢量势,所得到的公式具有普适性,既适合自由空间也适合非自由空间.在时域测试上使用中心差分或脉冲基而不是点匹配,有利于数值结果的稳定.考虑到积分核可能是间断的分片连续函数,使用高阶近似精确地计算矩阵元.用隐含时间步进法(IMOT)计算和讨论了几个典型导体目标的瞬态电磁散射问题,得到稳定的瞬态电流响应,并计算了时域远区散射场和宽带散射截面.如果将分层介质的时域格林函数应用到本文的公式中,可以计算分析微带天线和微带电路的瞬态或宽带散射和辐射问题,这正是我们下一步的工作.

参考文献:

- [1] K S Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1966, 14(3): 302- 307.
- [2] C L Bennett, W L Weeks. Electromagnetic pulse response of cylindrical scatters[A]. IEEE G-AP International Symposium[C]. Boston: Northeastern University, 1968. 176- 183.
- [3] S M Rao, T K Sarkar. Time domain modeling of two dimensional conducting cylinders utilizing an implicit scheme TM incidence[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 1997, 15(6): 342- 347.
- [4] G Manara, A Monorchio, et al. A space time discretization criterion for a stable time marching solution of the electric field integral equation[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1997, 45(3): 527- 532.
- [5] R S Adve, T K Sarkar, et al. Extrapolation of time domain responses from three dimensional conducting objects utilizing the matrix pencil technique[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1997, 45(1): 147- 156.
- [6] A A Ergin, B Shanker, et al. Fast evaluation of three dimensional transient wave fields using diagonal translation operators[J]. Journal of Computational Physics, 1998, 146(1): 157- 180.

- [7] B Shanker, A A Ergin, et al. Fast analysis of transient electromagnetic scattering phenomena using the multilevel plane wave time domain algorithm[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 2003, 51(3): 628- 641.
- [8] S M Rao, D R Wilton, et al. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1982, 30(3): 409- 418.
- [9] S M Rao. Time Domain Electromagnetics[M]. New York: Academic Press, 1999.
- [10] M Y Xia, C H Chan, et al. Time domain green's functions for microstrip structures using cagniard de hoop method[J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 2004, 52(6): 1578- 1585.

作者简介:



王 湃 男, 1979 年出生于山东青岛, 2002 年在电子科技大学电子工程学院获得工学学士学位, 同年进入北京大学电子学系直接攻读博士学位, 现主要研究方向是计算电磁学中频域、时域的高效快速算法及其应用.

夏明耀 男, 1963 年 10 月生于江西九江, 博士, 教授, IEEE 高级会员, CIE 高级会员, 主要研究领域: 电磁场理论与数值方法、微波遥感、天线分析与设计、微波电路分析.



周乐柱 男, 1944 年出生于贵州贵阳, 北京大学教授、博士生导师, CIE 会士, IEEE 高级会员, 1968 年北京大学物理系物理专业本科毕业, 1981 年北京大学电子学系电子物理专业研究生毕业, 获理学硕士学位, 毕业后留校任教至今, 1991 年 8 月—1993 年 2 月在英国伦敦大学学院作高级访问学者, 1994 年 10 月—1997 年 1 月在英国曼彻斯特科技大学作研究教授, 长期从事电磁场理论及微波技术方面的科研和教学工作, 已发表论文、专著和教材等几十篇本, 当前主要研究兴趣是计算电磁学及其应用(散射、天线、微波器件), 通信中的电磁场问题.