

# 最佳量子多用户检测技术

赵生妹, 李 飞, 郑宝玉

(南京邮电学院信号与信息处理研究所, 江苏南京 210003)

**摘 要:** 多用户检测的最优解在经典条件下是一个 NP 难解问题. 利用量子态物理特性, 通过量子检测能够有效地解决这一难题. 本文给出在量子贝叶斯最小代价准则下量子最优解的实现过程, 与经典多用户检测最优解相比, 基于量子检测的最佳多用户检测技术的性能得到了极大的提高.

**关键词:** 多用户检测; 误码率; 量子态; 量子检测

**中图分类号:** TN914.5      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2005) 020132-03

## Optimal Quantum Multi-User Detection

ZHAO Shengmei, LI Fei, ZHENG Bao2yu

(Institute of Signal and Information Processing, Nanjing University of P&T, Nanjing, Jiangsu 210003, China)

**Abstract:** The optimal solution for the conventional multi-user detection is a NP hard problem. The quantum multi-user detection (QMUD), which based on quantum detection, can solve this problem efficiently. The procedure of the optimal QMUD under quantum Bayes cost is given in this paper. Performance comparisons with classical techniques show an improvement when quantum detection is employed.

**Key words:** multi-user detection; symbol error probability rate; quantum state; quantum detection

## 1 引言

由于多用户检测(MUD)技术具有高性能和内在抗干扰特性, 它不仅在无线领域中得到广泛的应用, 而且正被推广应用到有线领域<sup>[1]</sup>. 现已证明 DS-SS CDMA 中多用户检测的最优解与二次函数的最优性相关, 求解的计算复杂度与用户数成指数关系<sup>[2]</sup>, 这在经典计算中是一个 NP 难解问题. 为了解决这个难解问题, 人们提出了许多次优的线性和非线性算法. 它们的研究大都是以牺牲性能为代价, 而将多用户检测最优解这样一个 NP 问题简化近似为多项式问题, 从而得到次优解, 以换取算法复杂度的降低, 并没有真正优化求解 NP 问题.

利用量子态特性, 通过量子检测能够有效地解决这一问题<sup>[3]</sup>. 文献[4]使用量子检测对 QAM 和 PSK 信号进行检测, 获得的误码率比同等条件下经典的结果有明显的提高; 文献[5]验证量子检测在适当条件下, 具有比经典检测更好的性能, 因此将量子检测理论应用于多用户检测将是一个有意义的尝试. 本文利用量子态检测理论, 提出在量子贝叶斯最小代价准则下量子多用户检测方案, 通过叠代算法计算出量子最优解, 并给出它与经典最优解的性能比较. 值得说明的是文中所有的经典都是相对于量子而言.

## 2 量子多用户检测模型

量子态描述量子系统的状态, 常用 Dirac 符号  $| \psi \rangle$  表示,

称为右矢, 它的共轭转置  $\langle \psi |$  称为左矢.  $| \psi \rangle$ 、 $\langle \psi |$  分别定义为两量子态  $| \psi \rangle$  和  $\langle \psi |$  在 Hilbert 空间上的内积和外积, 其中外积是称为 1 的算子. 量子态也可通过密度矩阵的形式描述, 纯态  $| \psi \rangle$  的密度矩阵为  $\rho = | \psi \rangle \langle \psi |$ . 如果将发送者的信息编码为量子态  $| \psi \rangle$ , 当信息经过量子信道传输到接收端时, 量子态演化为  $| \phi \rangle$ , 其中从  $| \psi \rangle$  到  $| \phi \rangle$  的变化描述信道的干扰和噪声作用. 接收者通过测量获取输出量子态包含的信息, 这是单个用户量子通信过程. 当发送端多个用户同时发送信息时, 假设用户相互独立, 量子信道输入量子态将是每个用户发送量子态的标量积, 经过量子信道后, 接收者获取了包含多个发送者信息的量子态, 这就是多接入量子信道模型<sup>[6]</sup>. 以量子多址信道通信为基础, 量子多用户检测的目标就是从接收量子态中分析提取每个用户发送信息的过程. 从量子态获取信息的唯一方法是测量, 然而量子态测量是一种概率测量, 所有测量并不能完全反映量子态的全部特征. 而且, 由于量子不可克隆理论限制, 量子态也不能象经典信号一样被复制, 所以每次量子测量后必须带有一定的判决准则, 同时解决测量和判决的最好方法是 POVM 算子 (Positive Operator Valued Measurement) 测量<sup>[4,5]</sup>. 一旦测量算子选定, 量子多用户检测过程将完全经典化. 于是, 量子多用户检测过程演化成依据不同的准则, 设计 POVM 测量算子, 对接收量子态进行测量, 获取并确定发送量子态的基本信息.

### 3 基于量子贝叶斯准则下量子多用户检测的最优解

#### 3.1.1 量子贝叶斯最小代价准则

量子贝叶斯准则下的最小代价函数为

$$\min C = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^K F_k c_{jk} \text{Tr} F_j Q_k \quad (1)$$

其中,  $F_k$  为先验概率,  $c_{jk}$  是选择  $j$  出现  $k$  的代价,  $F_j$  为 POVM

算子满足  $\sum_{j=1}^K F_j = I$ ,  $F_j \in \mathcal{E}$ ,  $Q_k$  为量子态,  $\text{Tr} F_j Q_k = p(k/j)$ .

在代价  $c_{jk} = 1 - D_{jk}$  的条件下, 贝叶斯最小代价准则等价于最小误码准则

$$P_e = 1 - \sum_{k=1}^K F_k \text{Tr} F_k Q_k \quad (2)$$

现已证明当输入量子态为纯态  $Q_k = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$  时, 满足条件的 POVM 算子将具有  $F_j = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$  形式<sup>[7]</sup>, 且  $\sum_{j=1}^K |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = I$ . 于是误码率进一步可表示为:

$$P_e = 1 - \sum_{k=1}^K F_k |\langle\psi_k|\psi_k\rangle|^2 \quad (3)$$

令  $X_j = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ ,  $\# = XX^+$ , 其中  $\#_j = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$  为接收态内积. 假设接收态出现的概率相同, 得:

$$P_e = 1 - 2^{-K} \sum_{k=1}^K |X_{kk}|^2 \quad (4)$$

由此, 在量子贝叶斯最小代价准则下的最优解成为寻找矩阵  $X$ , 使其对角元素平方和最大. 由于当  $X^T U X$ , 且  $U$  为一个么正矩阵时,  $X^T U X (U X)^T (U X) = X^T U^T U X = \#$ ,  $\#$  不发生变化. 所以可通过选择不同的  $U$ , 通过重复迭代的方法得到  $X$ , 使得它对角线元素的平方和最大, 从而得到最小误码率. 文献[6]给出解决这个问题的迭代算法的具体过程. 于是, 求解量子多用户检测最优解的关键成为确定接收态内积构成的矩阵.

#### 3.1.2 实现量子多用户检测最优解

以二个用户为例, 讨论量子多用户检测最优解实现过程. 假设用户使用 OOK 调制编码信息: 当用户发送 00 时, 不发送光子; 而当发送 10 时, 发送振幅为  $A_k$  的相干态<sup>[5]</sup>, 表示为:

$$|A_k\rangle = e^{-(1/2)|a_k|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_k^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle \quad (5)$$

式中  $|A_k|^2$  为平均光子数,  $|n\rangle$  为光子数量子态, 且  $\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = I$ . 文献[8]给出相干量子态通过量子信道时, 在不考虑加性高斯噪声的情况下, 接收态也是相干态, 并且振幅  $|S A_k|$  为, 其中  $S$  表示信道干扰. 因为信道的加性噪声为零, 信道的作用主要来源于用户间的相互干扰,  $S$  将满足条件  $S^+ S = \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}$ , 其中  $r$  是用户间相关系数. 现在我们可以推导出接收量子态内积构成的矩阵  $\#$ . 两个用户发送的相干光振幅分别为  $A_1 b_1$  和  $A_2 b_2$ , 其中  $A_1, A_2$  是两个用户的功率 (对应发送光子数),  $b_1, b_2$  是用户发送的信息, 取值为 0 和 1. 通过量子信道后, 接收端获取的相干量子态为  $|a_1 a_2\rangle$ , 其中  $a_1, a_2$  是接收相干量子态振幅. 因此接收端将有 4 种可能的量子态, 分别对应于两用户发送的不同信息. 计算接收态内积为:

$$\langle a_2 a_1 | a_1 a_2 \rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}(|a_1|^2 + |a_2|^2 - 2ac_1 a_1^*)\right\} \quad (6)$$

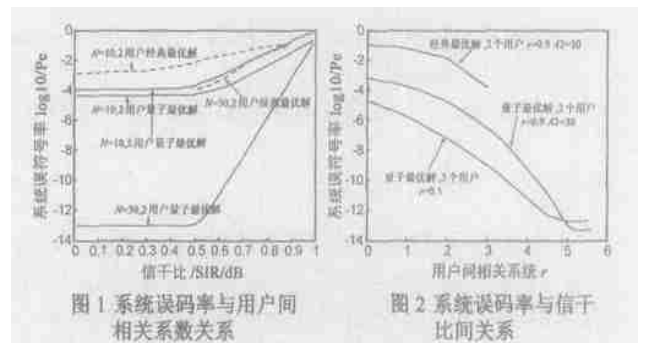
由于接收态与输入态间的关系表示为:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} A_1 b_1 \\ A_2 b_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ac_1 \\ ac_2 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} A_1 bc_1 \\ A_2 bc_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

那么接收量子态内积可进一步表示为:

$$\# = \exp\left\{-\frac{1}{2}[b^+ H b - 2b^+ H bc + b^+ c^+ H bc]\right\} \quad (8)$$

其中  $R = \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ ,  $H = ARA$ ,  $b$  和  $bc$  代表用户信息. 根据文献[6]给出的迭代算法, 图 1 给出两个用户等发送光子数为 10 和 30 情况下误码率与用户相关系数的关系. 由图可知, 在两用户相关系数小于 0.5 时, 误码率几乎没有发生变化. 随着相关系数进一步增加, 曲线开始变化; 当相关系数为 1 时, 由于两用户完全相关, 当两用户发送的 00, 11 时能完全确定, 而发送 01 和 10 时将发生错误, 因而误码率为 0.25, 对应的误比特率为 0.5, 达到最大值, 这与理论分析相一致. 当用户发送的光子数发生变化时, 用户的功率发生改变. 随着功率的增加, 检测的性能有显著地提高, 最小误码率也从  $10^{-4}$  数量级提高到  $10^{-13}$  数量级.



### 4 与经典最优解相比较

为了与量子多用户检测最优解的性能相比较, 图 1 也给出经典条件下多用户检测最优解的误码率与用户相关系数的关系. 因为假设量子信道没有噪声影响, 因此经典最优解也是没有噪声干扰的结果. 由图 1 可知, 当发送功率改变时, 所得的经典最优解的曲线性能变化并不明显. 算法中误码率计算的重复次数为 10000 次, 所以最小的误码率接近为  $10^{-4}$ , 这个数值无法与量子最优解的值相比拟. 在计算过程中我们发现即使计算次数为 10000 次, 由于经典最优解的计算复杂度, 所花的时间仍比量子多用户检测最优解多. 如果要得到与量子检测一样的精度 ( $10^{-13}$ ), 需要的时间在目前情况下将是无法忍受的. 换句话说, 量子最优解比经典最优解具有更大的优越性. 为了进一步比较, 我们计算 5 个用户的量子最优解 (假设每两个用户间的相关系数都相同), 这时尽管用户数增加, 但计算所花时间与两个用户时计算时间差不多. 这表明在计算时间上, 量子多用户检测的最优解的计算复杂度与用户数不存在指数性关系.

为了验证量子多用户检测对远近效应的影响, 我们以同样的算法, 计算误码率与信干比之间的关系, 如图 2 所示. 在 5 个用户计算过程中, 假设每两个用户间的相关系数相等, 且

相关系数  $r = 0.1$ . 由图可知, 随着信干比的增大, 误码率逐渐减小. 当信干比增加到一定程度, 其他用户的干扰将非常小, 误码率渐近于单用户检测结果, 接近于一个定值. 这与理论分析结果相符合. 图 2 还给出 2 个用户经典最优解和量子最优解的误码率与信干比间的关系. 曲线的参数都是  $r = 0.9$ ,  $A_2 = 30$ . 由于经典最优解的运算次数  $N = 100000$ , 最大精度为  $10^{-5}$ , 当误码率为 0 时, 对数曲线取不出来. 由图可知, 量子多用户检测具有比经典条件下更好的性能.

## 5 小结

本文根据量子多接入模型, 提出了在贝叶斯最小代价准则下量子多用户检测方案. 与经典多用户检测最优解相比, 系统的性能得到极大的提高. 量子多用户检测最优解利用量子检测特性, 使得经典多用户检测最优解这二次函数优化问题简化为一个线性重复迭代问题, 也使得运算的复杂度大大降低. 因此利用量子态特性进行多用户检测是研究多用户检测最优解的新方向.

然而, 在计算接收量子态时, 我们假设量子信道没有噪声影响, 在这实际过程中是一理想情况, 考虑噪声存在条件下量子多用户最优解是需要进一步研究的问题. 随着量子信号处理技术的发展, 相信量子多用户检测可以直接应用于未来的量子多用户通信应用之中.

## 参考文献:

- [1] Huaiyu Dai, H V Poor. Turbo multiuser detection for coded DMF VDSL systems[J]. IEEE J. Select. Areas Commun, 2002, 20(2): 351- 362.
- [2] S Verdu. Multiuser Detection[M]. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. 154- 213.
- [3] J I Concha, H V Poor. Multiuser Detection in Quantum Channels[A]. In Proc IEEE Intern Symp on Inform Theory[C]. 2000. 276.
- [4] K Kato, M Osaki, M Sadaki, O Hirota. Quantum detection and mutual information for QAM and PSK signals[J]. IEEE trans Comm, 1999, 47(2): 248- 254.
- [5] C W Lau, V A Vlinrotter. Quantum detection and channel capacity us2

ing state2space optimization[R]. IPN Progress Report 42- 148, 2002, 1 - 16.

- [6] J I Concha, H V Poor. Advances in Quantum Detection[A]. In V Bhargava, H V Poor, V Tarokh Editors, Communications, Data Security and Signal Processing[C]. Kluwer, 2002. 89- 122.
- [7] Y C Eldar, A Megretski, G C Verghese. Designing optimal quantum detectors via semidefinite programming[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2003, 49(4): 1007- 1012.
- [8] C W Gardiner, P Zoller. Quantum Noise[M]. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000, 258- 300.

## 作者简介:



赵生妹 女, 1968 年出生于江苏丹徒, 南京邮电学院副教授, 博士研究生, 主要研究方向为量子信息处理. E-mail: zhaosm@njupt.edu.cn



李 飞 女, 1966 年出生于湖南长沙, 南京邮电学院副教授, 博士研究生, 主要研究方向为量子信息处理.



郑宝玉 男, 1945 年出生于福建闽侯, 南京邮电学院教授, 博士生导师, 上海交通大学博士生导师, 主要研究方向为智能信号处理.